函授大学教材

弹性力学及有限元

武汉水利电力学院　史述昭 主编

函授大学教材

弹性力学及有限元

武汉水利电力学院 史述昭 主编

水利电力出版社

函授大学教材
弹性力学及有限元
武汉水利电力学院　史述昭 主编
*
水利电力出版社出版
（北京三里河路 6 号）
新华书店北京发行所发行 · 各地新华书店经售
水利电力出版社印刷厂印刷
*
787×1092毫米　16开本　15.75印张　355千字
1990年 3 月第一版　1990年 3 月北京第一次印刷
印数0001—3400册
ISBN 7-120-01018-2/TV·331
定价 6.55 元

内 容 提 要

本书是根据国家教委委托课程教学指导委员会制订的“高等工业学校弹性力学课程教学基本要求”而编写的。本书主要用作高等工科院校六年制土建、水利类工程专业函授教材，也可供同类专业本科学生及有关工程技术人员参考。

全书共分八章及一个附录：第一章绪论，第二章平面问题的基本理论，第三章平面问题的直角坐标解答，第四章平面问题的极坐标解答，第五章变分法及求解平面问题，第六章有限单元法解平面问题，第七章空间问题的基本方程及其求解，第八章薄板弯曲问题，附录为变分法简介。

前　　言

这本教材是为高等工科院校六年制土建、水利类工程专业《弹性力学及有限元》函授课程而编写的。内容主要以国家教委委托课程教学指导委员会制订的“高等工业学校弹性力学课程教学基本要求”为依据，并按课内60学时编写。在实际执行时，可以根据需要作适当的选择，例如可以在变分法、空间问题、薄板弯曲等内容中作适当的取舍。

为了反映函授教材的特点，我们除了在取材及阐述方面尽可能做到深入浅出、重点突出、理论结合实际外，并在每章的开始编有简明的内容提要、预备知识，每章的末尾编有自学指导、思考题、习题，以便于学生自学。

参加本书编写的教师有：史述昭（第一、二章）、侯发亮（第三章）、朱以文（第四章）、杨炳麟（第五、六章，附录）、金雅鹤（第七章）、谭道宏（第八章）。全书由史述昭担任主编，武汉工业大学成鸿学教授审阅。

由于我们的学识与经验有限，错误及不妥之处望读者指正。

编　者

1989年

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　　录

第一章 绪　　论

内容提要　本章介绍弹性力学的性质、研究对象及任务，以及有关的基本知识。使在学习开始时对本课程有一个概要的了解，同时熟悉有关的基本假定及基本概念。

预备知识　材料力学中的基本假定，有关应力、应变、位移的概念。

第一节　弹性力学的性质、研究对象及任务

弹性力学是固体力学的一个分支学科。它的任务是：研究在外力或温度变化等外在因素作用下，发生于弹性体内的应力及变形。弹性力学的这一任务，和材料力学、结构力学有共同之处。但是，它们之间也有不同之处，这主要表现在研究对象和研究方法两方面。在研究对象方面，材料力学主要研究单个杆件，如杆、梁、轴等；结构力学主要研究杆件体系，如连续梁、桁架、刚架等；而弹性力学虽然也研究单个杆件，如梁、轴等，但主要研究对象为非杆件或杆系结构，如坝、地基、挡土墙等块体结构及板、壳等薄壁结构。在研究方法方面，材料力学除有基本假定，如假定所研究的材料是均匀的、连续的、各向同性的…等外，还有附加假定，如平截面假定❶等，在这些附加假定下，可以使计算工作大为简化，同时又能在一定程度上满足工程要求。这些附加假定在有些情况下是精确的，在有些情况下是近似的，在有些情况下是不能采用的，如高梁（梁横截面高度与梁的跨度的比值比较大的梁）的弯曲、非圆截面杆的扭转、受拉杆中有小孔口的应力集中等情况。在弹性力学中，除基本假定外通常不再增加附加假定（板、壳计算除外），所以它能计算块体等非杆件结构，以及上述不符合平截面假定的杆件结构。即使计算和材料力学中相同的杆件结构，由于弹性力学没有采用附加假定，所以算出的结果有较高的精确度，可以用来校验材料力学的计算结果。在计算薄板及薄壳等薄壁结构时，弹性力学虽然也采用了附加假定，但是由于它不是杆件结构，所以也属于弹性力学研究的内容。通常把弹性力学中没有附加假定的部分称为经典弹性力学，而把有附加假定的部分称为应用弹性力学。

第二节　弹性力学的基本假定

弹性力学中所采用的基本假定，大体上和材料力学中所采用的相同。作这些假定的目的是使建立起来的理论和方法比较简单，同时又能取得符合工程要求的结果。这些假定有4个。

❶ 平截面假定：在变形前构件中的一个平面截面，当构件变形后，这个截面仍保持为平面。

1. 物体的材料是完全弹性体的假定

所谓完全弹性，就是具有当引起物体变形的因素除去后，可以完全恢复到原来的形状，而不会有残余变形的性能。由材料力学可知，当应力不超过材料的弹性极限时，材料才可以近似地看作完全弹性体。因此，本课程只研究材料在弹性极限以内的应力及变形。由于弹性极限与比例极限很靠近，可以认为是重合的，因此应力与应变成正比，也就是服从胡克定律，这样就使问题得到了简化。

2. 物体的材料是连续的假定

即假定物体所占有的空间，完全为构成该物体的材料无空隙地充满着。事实上各种材料，如钢、混凝土等，都是由微粒组成的，各微粒之间都有一定的空隙。但是，因为我们所研究的物体和各微粒及其间的空隙比较要大得非常多，所以可以不考虑其中的空隙，而把整个物体当作一个连续体看待。由于假定物体的材料是连续的，所以，许多与物体材料有关的量，如应力、应变、位移等才有可能是连续的，而可以用连续函数来表示，这样才有可能用较简单的数学方法，如微分、积分等方法来进行分析。

3. 物体的材料是均匀的、各向同性的假定

即假定物体材料的性能各处都是一样的，而且在各个方向也都是一样的。事实上像钢材这样一种材料，如果从微观角度考虑，不可能是均匀的和各向同性的，只有从宏观的角度，从统计平均的角度考虑才可以当作均匀的、各向同性的。至于象混凝土这种材料，更只有从宏观的角度才可以近似地当作均匀的、各向同性的。对于象木材这种材料，在顺木纹方向与垂直木纹方向具有明显的不同性质，不能当作各向同性材料考虑。由于有了这一假定，则表示材料特性的一些量，如弹性模量 E 、泊松比 μ 等才不因材料所在位置和方向而变化，所以这些量才不是坐标变量和方向变量的函数而是常数。这样，在作与这些量有关问题的计算时才可以简单很多。

4. 小变形假定

即假定物体所产生的变形，与它原来的尺寸比较很小，所以就可以用变形前的尺寸来代替变形后的尺寸，以使计算得到很大的简化。如图1-1所示的悬臂梁，当用平衡方程求固定端力矩反力M_A时

$$M_A = Pl$$

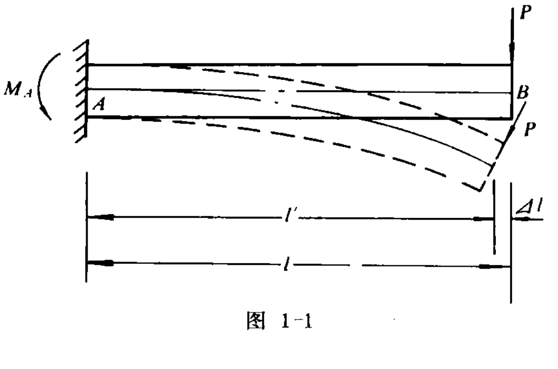

图 1-1

其中 l 用的就是变形前梁的长度。如果要用变形后梁的长度l'来计算时，则先要计算Δl，这就要复杂得多。但若是小变形，Δl与l'比较很小，可以用l来代替l'以求M_A差别很小而可以忽略。所以，在分析物体的变形时，在同一计算式中可以忽略较高阶的微量，这就可以使计算得到简化。

第三节 关于外力、应力、应变及位移的概念

1.外力

外力通常可分为面力和体力两种。面力是施加在物体表面上的力，如作用于坝体上的水压力、地基对水闸底板的反力等都是面力，面力的因次是〔力〕〔长度〕$^{-2}$；体力是分布在物体体积内的力，如物体的重力、振动时的惯性力等都是体力，体力的因次是〔力〕〔长度〕$^{-3}$。在一般情况下，体力和面力都可能是任意分布的，通常以坐标函数的形式来表示。

2.应力

应力是一种内力，它是内力的集度。为了说明应力的概念，设有一受力而处于平衡的物体(图1-2)，用任一平面分物体为 A、B 两部分，设舍去 A 部分而保留 B 部分，则在 B 部分的截面上有 A 部分对 B 部分的作用力，今研究此截面上任意一点 P 的应力。在 P 点附近取一个微分面积 ΔF，在此面积上作用有内力 ΔP，则 ΔF 上内力的平均集度为 $\Delta P/\Delta F$，当 ΔF 无限缩小而趋于 P 点时，因面力为连续分布，所以 $\Delta P/\Delta F$ 趋于极限 p，即

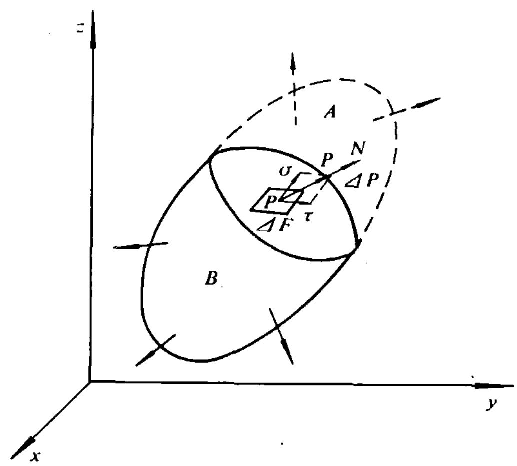

图 1-2

$$\lim_{\Delta F\to 0}\frac{\Delta P}{\Delta F}=p$$

此极限 p 就定义为 P 点的应力。因为 ΔF 是标量❶，ΔP 是矢量，所以 p 也是矢量，它的方向与 ΔP 的极限方向一致。

通常将 p 分解为沿微面外法线 N 方向的分量即正应力 σ，和位于微面上的分量即剪应力 τ（图1-2）。如果所取截面与某一坐标轴垂直，如图1-3(a)所示，所取的截面与 y 轴垂直，则有

$$\sigma=\sigma_y \qquad \tau=\tau_y$$

还可以将 τ_y 沿 x 轴与 z 轴分解为 2 个分量 τ_{yx} 与 τ_{yz}。上述二剪应力的两个下标，第一个字母表示剪应力所作用的截面，第二个字母表示剪应力的方向。如 τ_{yx} 表示作用在垂直于 y 轴的截面上沿 x 轴方向的剪应力，余类推。因此，作用于垂直某一坐标轴截面上的应力常分解为沿坐标轴方向的 3 个应力分量，其中一个正应力二个剪应力。关于应力的正负作如下规定：正应力以拉应力为正、压应力为负。剪应力的正负分两种情形考虑，如果截面外法线的方

❶ 标量是只有大小而无方向的量，如长度、面积等；而矢量是既有大小而又有方向的量，如力、位移等。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

向是与某一坐标轴的方向相同，那么，与另外二坐标轴方向相同的剪应力为正剪应力，与该二坐标轴方向相反的剪应力是负剪应力，图1-3（a）所示的2个剪应力τ_{yx}与τ_{yz}都是正剪力；如果截面外法线的方向是与某一坐标轴的方向相反，那么，与另外二坐标轴方向相反的剪应力为正剪力，与该二坐标轴方向相同的剪应力是负剪应力，图1-3（b）所示的2个剪应力也都是正剪应力。可以看出，正应力正负的规定与材料力学中的规定相同，而剪应力正负的规定却与材料力学中的规定不同。

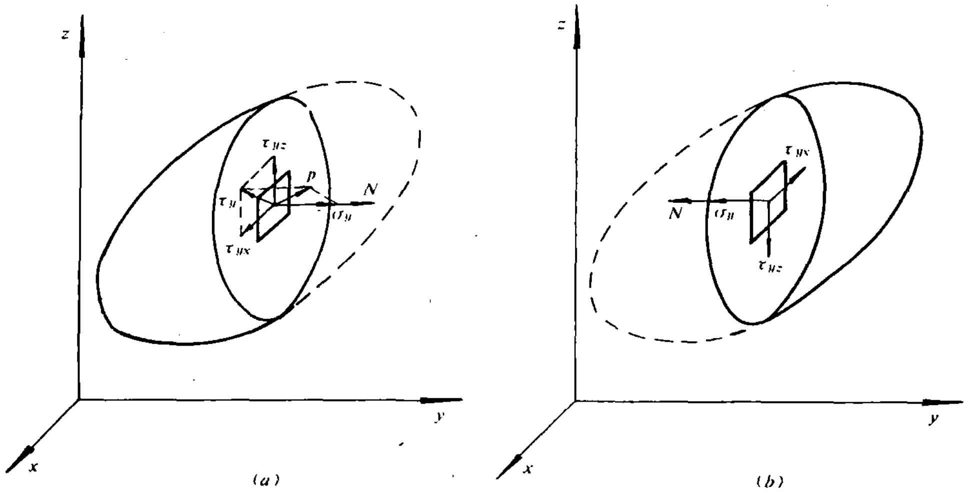

图 1-3

根据上面的分析，为了表示弹性体内任意一点P的应力状态，通常通过P点作与坐标平面平行的3个微面（图1-4）。在每一微面上各有3个应力分量，3个微面上共有9个应力分量。以后将证明，只要知道这9个应力分量，即可求出通过P点的任意截面上的应力，所以这9个应力分量就可以代表这一点的应力状态。

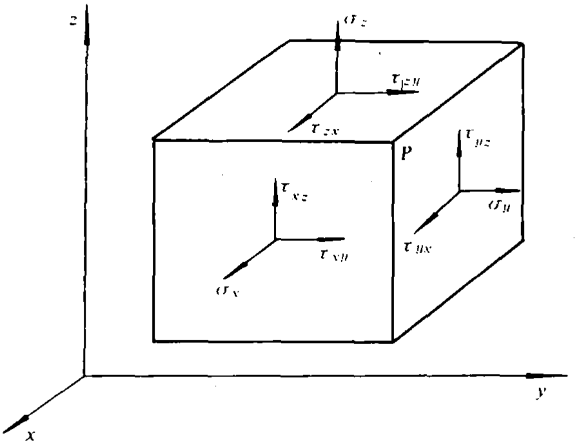

图 1-4

3. 形变

形变是物体形状的改变。如图1-5(*a*)所示的弹性体，未变形前如图中实线所示，受力后将产生变形，虚线表示变形后的形状。未变形前在弹性体内有一个边长为dx、dy、dz的正六面体，变形后此六面体除产生位置的移动外，形状也要发生变化，由原来的正六面体改变为任意形状的六面体。此六面体的变形，总可以用它各棱边长度的改变和各棱角角度的改变来描述。见图1-5(*b*)，其中棱边长度的改变量与原来棱边长度的比值为该棱边的正应变，原来成直角的角度改变量为该角度的剪应变。如图1-6(*a*)所示的正六面体，其中dy棱边沿y轴方向产生一伸长量$\delta(dy)$，则该棱边的正应变用ε_y表示，而有

$$\varepsilon_y = \frac{\delta(dy)}{dy}$$

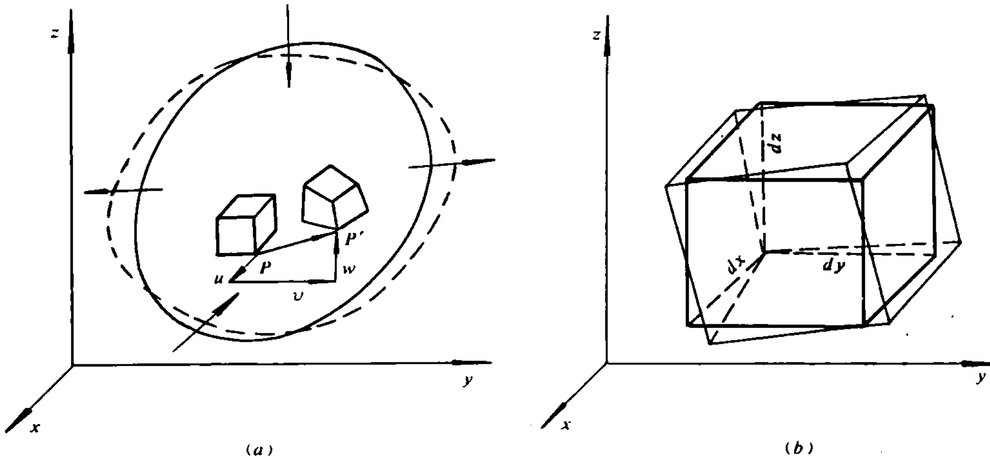

图 1-5

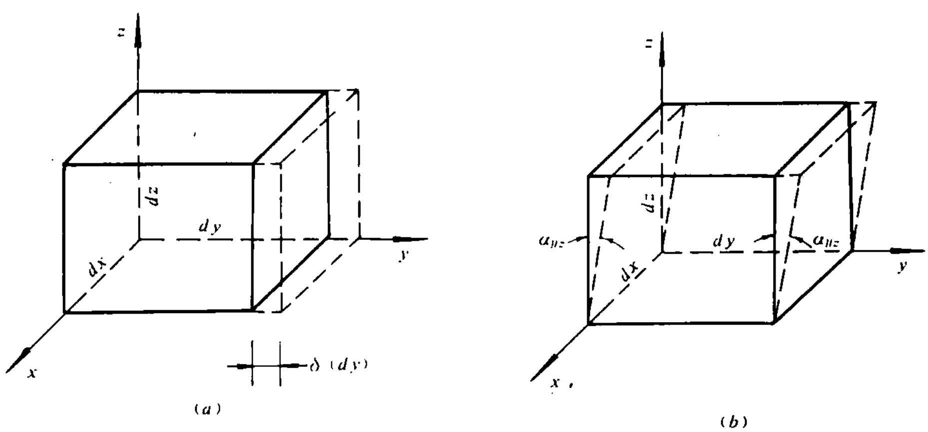

图 1-6

正应变的正负规定以伸长为正，缩短为负，正应变为无因次量。又如图1-6(*b*)所示，此

正六面体在平行于y-z平面内有一直角的改变量α_{yz}，则该角度的剪应变为

$$\gamma_{yz}=\alpha_{yz}$$

剪应变用γ表示，两个下标表示剪应变所产生的平面。如γ_{yz}表示与y-z平面平行的平面内的剪应变，剪应变的正负规定为：使直角减小的为正，使直角增大的为负。剪应变也是无因次量。

4. 位移

位移即位置的移动。如图1-5(a)所示微分体中的P点,物体变形后移动到了P'点,则PP'即为P点的位移，通常用它沿坐标轴x、y、z方向的3个位移分量u、v、w来表示。其正负规定为:与坐标轴方向相同的为正,与坐标轴方向相反的为负。位移的因次为〔长度〕。

上面所述的外力、应力、应变、位移都随它们所在的位置的不同而不同。也就是说，它们都是坐标变量x、y、z的函数。

第四节 弹性力学的方法

弹性力学的任务，通常是要计算在外力作用下产生于弹性体中的应力及变形。用材料力学方法计算应力或变形时，一般是采用截面法先求得横截面上的内力，再由内力去求应力。这时首先要解决的一个问题，就是必须知道应力在横截面上的分布规律，然后才有可能由内力求出应力，为了解决这一难题，在材料力学中常是作一些附加假定，例如平截面假定。如求梁弯曲时的正应力算式为

$$\sigma=\frac{My}{I}$$

就是通过该横截面的内力M来求正应力σ。但是在推导这个算式时，如果不作平截面的假定，以解决正应力在横截面上的分布规律就无法导出。事实上平截面假定只在纯弯曲情形下才是精确的，在横力弯曲中通常只是近似的，而且只适用于低梁（梁的横截面高度远小于梁的跨度的梁），对于高梁是不适用的。

弹性力学是要建立计算任意形状弹性体的应力及变形的理论。在一般情况下，截面上的应力及应变的大小及分布规律都是未知的，所以只能将应力及应变假定为坐标变量的未知函数。因此在弹性力学中用以研究问题的方法，与材料力学中所采用的方法有所不同，不能用先求内力再求应力的方法，而是将弹性体假想为由无数个正六面微单元体（在弹性体内部）及四面微单元体（在弹性体边界上）组成。再从这些微单元体的平衡条件、几何条件、物理条件等三方面建立基本方程。由于各应力、应变、位移等都是x、y、z（空间问题）或x、y（平面问题）的函数，所以建立的方程多是偏微分方程，最后需结合边界条件求解这些微分方程，以求得需求的应力、应变及位移。

在求解这些微分方程时，为了计算简单，可以不必同时将应力、应变及位移都取作基本未知量，而是可以只将应力取作未知量，求出应力后再求应变及位移，即可以按应力求解，相当于结构力学中的力法；也可以只将位移取作基本未知量，求出位移后再求应变及应力，即按位移求解，相当于结构力学中的位移法。

自 学 指 导

本章主要介绍弹性力学的性质、对象及任务；弹性力学中一些基本量的概念；弹性力学的方法等部分内容。学习弹性力学的性质、对象及任务时，应着重了解本课程是一门什么性质的课程，学习它的作用和目的何在，学习这一部分内容时，应该和已学过的材料力学、结构力学的有关内容比较以加深理解；弹性力学的基本假定这部分内容虽然与材料力学中的大致相同，但它是本课程建立的基础，所以还要作必要的重复，但应在原有的基础上加深理解，除应理解这些假定的含义外，还应充分理解它所起的作用；弹性力学中一些基本量的概念，有的在材料力学中也作过介绍，在这里同样应加深理解，应着重理解这些基本量都是坐标变量的函数，其中外力通常是已知函数，而应力、应变、位移通常多是未知而需求出的函数；学习弹性力学的方法应着重与材料力学的方法作对比，要求对弹性力学的方法先有一个概括的了解，以便学习后续内容。

绪论这一章的内容都是统贯全书的，它起着承前启后的作用，学习它们后希望能起到温故而知新的效用。

思 考 题

1-1 材料力学与结构力学这两门学科的任务是什么?它与弹性力学的任务有无本质区别?

1-2 在材料力学中、应力和位移是否也是坐标变量的函数? 试举梁的弯曲为例加以说明。

1-3 图1-7所示的单元体上作用的剪应力τ_{xy}、τ_{yx}，按照弹性力学中关于剪应力正负符号的规定，如何确定它们的正负? 按照材料力学中关于剪应力正负的规定，如何确定它们的正负? 对照这两种规定所得结果的正负是否相同?

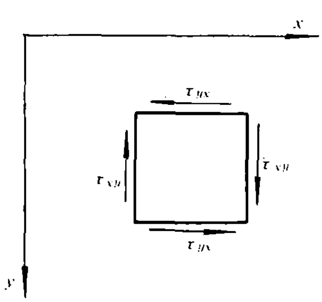

图 1-7

1-4 图1-8所示为中心受拉等截面直杆，横截面面积为F，要求各横截面上的应力，用材料力学方法计算时，各横截面上只有正应力σ而无剪应力τ，且各横截面上的正应力都

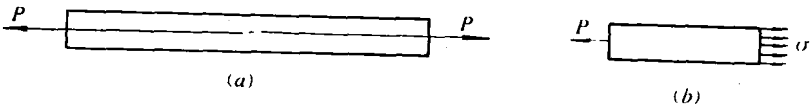

图 1-8

相等，其值为

$$\sigma=\frac{P}{F}$$

若只用基本假定能得出上列算式吗？如果不能得出，还要增加什么假定才能得出？怎样得出？

1-5 在材料力学中，关于圆轴扭转时应力的计算，增加了附加假定没有？如有，增加了什么假定？这个假定起了什么作用？

第二章 平面问题的基本理论

内容提要 本章先介绍什么问题属于平面问题，而在平面问题中哪些是平面应力问题，哪些是平面应变问题。其次介绍从平衡、几何、物理等三方面建立的弹性力学基本方程，以及如何结合边界条件求解这些方程。

预备知识 高等数学中的偏导数；微分方程及其解；第一章中关于外力、应力、应变及位移的概念。

第一节 平面应力问题与平面应变问题

任何一个弹性体都有三个方向的尺度，所以都是空间体。当研究这个弹性体时，如果需要同时考虑三个方向的尺度，这种问题就应属于空间问题；如果只需考虑二个方向的尺度，这种问题就属于平面问题。在平面问题中又可分为平面应力问题和平面应变问题两种。

1. 平面应力问题

设有如图2-1所示的等厚度薄片，在前、后两个平面上没有荷载作用，荷载只作用在薄片的周边，而且沿厚度方向不变，同时体力也与前、后两个平面平行，而且也沿厚度方向不变。我们在薄片的中间平面上设置x、y轴，z轴垂直于中间平面，因为在前、后两个外表平面上没有荷载作用，所以当$z=\pm h/2$时有

$$\sigma_z=0 \quad \tau_{zx}=0 \quad \tau_{zy}=0 \qquad (2\text{-}1)$$

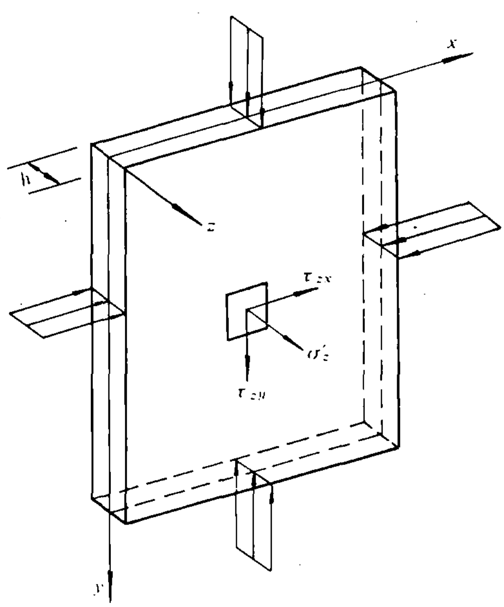

图 2-1

因为薄片很薄，而上述应力分量是连续变化的，在薄片的厚度里，这些应力即使不为零也必然很小，见图2-2(a)。我们可以近似地认为也为零。根据剪应力的互等定律(下节将要证明)应有

$$\tau_{zx}=\tau_{xz} \quad \tau_{zy}=\tau_{yz} \qquad (a)$$

这样，9个应力分量中就只剩下不为零的3个独立的分量，它们是σ_x、σ_y、$\tau_{yx}=\tau_{xy}$。此外，这3个应力分量可能沿薄片的厚度稍有变化，但因薄片厚度很小，变

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com