现代应用数学方法

姜健飞　编著

清华大学出版社

现代应用数学方法

姜健飞　编著

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书讲授有关"现代应用数学方法"的基本概念与方法，并着重讨论了如何将这些概念与方法应用于解决实际中的问题。主要包括5个方面的内容：1. 泛函分析关于三个空间与空间之间的映射的概念；2. Banach不动点原理及相关应用；3. Hilbert空间的直和分解及方阵的Jordan标准形与解线性常微分方程组的理论；4. 算子导数与泛函极值(变分)问题；5. 线性赋范空间的完备化与Lebesgue积分。

本书理论精炼，方法新颖，可作为工科研究生"现代应用数学方法"课程的教材，也可作为科技工作者的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

现代应用数学方法/姜健飞编著. —北京：清华大学出版社，2009.3
ISBN 978-7-302-19238-1

Ⅰ. 现…　Ⅱ. 姜…　Ⅲ. 数学方法　Ⅳ. O1-0

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第004246号

责任编辑：佟丽霞　王海燕
责任校对：王淑云
责任印制：李红英

出版发行：清华大学出版社　　**地　　址**：北京清华大学学研大厦A座
http://www.tup.com.cn　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京鑫海金澳胶印有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185×230　　**印　张**：8.5　　**字　数**：184千字
版　　次：2009年3月第1版　　**印　次**：2009年3月第1次印刷
印　　数：1～3000
定　　价：16.00元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话：010-62770177转3103　　产品编号：026931-01

序言

“泛函分析”是现代数学的一个重要分支。随着科学技术的迅速发展,泛函分析的概念和方法不仅渗透到了数学的许多分支,而且正被广泛地应用于工程技术理论的各个领域,成为从事这些领域研究工作的专家和学者的必要的数学基础。

始于 20 世纪 80 年代,我国许多院校开设了面向工科研究生的“应用泛函分析”课程,也有一批相关的“应用泛函分析”教材问世。东华大学(前中国纺织大学)也是从 20 世纪 80 年代初开始向各工科专业研究生开设讲授泛函分析基础知识的“高等分析”课程的。以后“高等分析”更名为“现代应用数学方法”,至今已进行了 25 年的教学实践。一批又一批的工科研究生通过这门课程的学习,使自己的数学修养得到了显著的提高,并学到了许多在理论与实践中应用现代数学方法解决工程技术领域问题的基本方法。

本人首先建立了“高等分析”课程的框架并主讲该课程。若干年后,本人的学生姜健飞成为“高等分析”及后更名为“现代应用数学方法”课程的主讲教师,他已进行了 20 年的教学实践。我们感到由于工科学生在大学本科阶段未曾受到“数学分析”等数学专业课程的严格训练,要掌握目前大多数“应用泛函分析”教材所提供的内容有一定的困难,于是针对工科研究生的实际情况编写了“高等分析”及“应用泛函分析方法”讲义,并在教学实践过程中进行了多次修改,使教学的内容更易为学生理解和掌握。经过这些年的教学实践,这本讲义已日益完善。

这次由姜健飞执笔的“现代应用数学方法”教材是在这些讲义的基础上充实完成的,它具有以下五方面特色:

1. 对泛函分析的基本概念作出了精炼化的讨论;
2. 将泛函分析的一些基本方法浓缩到了各个应用分支之中;
3. 由泛函分析方法讨论矩阵的 Jordan 标准形理论与常微分方程组理论;
4. 通过算子导数解决各类泛函极值(变分)问题;
5. 实变函数中的Lebesgue积分概念成为泛函分析空间完备化理论的

重要应用。

这些特色赋予了泛函分析这一现代数学方法在应用中的新的活力，其理论上的精炼性及应用上的有效性是国内外同类教材中不多见的。

本教材在各章后都配有一定数量的习题，它们一方面是主讲内容的完善，另一方面也是为了使读者适时得到数学修养上的训练。这将是一本适合于工科各个专业研究生学习现代应用数学方法的好教材，对应用数学专业高年级本科生及有关专业的高校教师与工程技术人员也是一本有价值的参考书。

李绍宽

2008 年春

目录

引言

泛函分析这一现代分析方法已经从数学领域逐渐渗透到工程技术的各个领域，成为一类现代高级工程技术人员迫切需要掌握的数学工具.本课程讲授泛函分析关于度量空间、线性赋范空间与内积空间的基本概念与方法，并将这些概念与方法应用于解决一些从实际问题中抽象出来的用一般微积分学与线性代数学难以解决的数学问题.

下例是著名的“最速降线问题”，对此问题的研究过程体现了泛函分析方法的核心思想.

例 最速降线问题(1696 年)：求一条连接 $A(0,0)$ 与 $B(a,b)$ 的光滑曲线 $y=y(x)$，使质量为 m 的质点能从静止状态在重力加速度的作用下沿此曲线用最短的时间由 A 点滑至 B 点(略去一切阻力因素).

解 由能量守恒定律知 $mgy=\frac{1}{2}mv^2$，从而 $v=\sqrt{2gy}$. 另一方面如图 1 知

$$v=\frac{v_x}{\cos\alpha}=(\sqrt{1+\tan^2\alpha})v_x=\sqrt{1+y'^2}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},$$

得 $\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\mathrm{d}x$，从而质点沿 $y(x)$ 由 A 点滑至 B 点用时

$$F(y)=\int_0^a\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\mathrm{d}x.$$

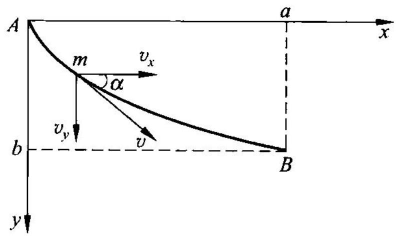

图 1

至此“最速降线问题”已转化为在一切连接 $A(0,0)$ 与 $B(a,b)$ 的光滑曲线中求一曲线 $y(x)$，使得上述 $F(y)$ 取得最小值.

解决“最速降线问题”使我们面对着研究 $F(y)$ 这样的自变量不是“数”而是“函数”的一类函数——泛函(functional). 这里我们已经无法由对一般函数求导数的方法来获得极值点，而需要研究如何对泛函(或更一般的算子)求导数，并由此来得到诸如“最速降线问题”这类泛函极值问题的解. 总之为解决此类问题，在本课程中我们将引进一系列相关的现代数学的基本概念与方法.

下面大致介绍一下本课程的主要内容：

第 1 章讨论度量空间、线性赋范空间与内积空间的定义、例子及相互关系；讨论空间的几何性质与代数性质；讨论空间之间的映射、算子与泛函的概念及性质.

第 2 章讨论空间的完备性概念，在此基础上给出 Banach 不动点原理，然后将此原理应用于讨论各类方程解的存在唯一性定理及相关问题.

第 3 章讨论 Hilbert 空间的直和分解并将其应用于解决矩阵的 Jordan 标准形问题，然后结合解的存在唯一性定理讨论线性常微分方程组解的结构.

第 4 章将一元实值函数的导数推广到连续算子的导数，特别讨论连续泛函的导数的算法，并将一元实值函数的极值问题推广到泛函极值问题，最后获得各类变分问题的解.

第 5 章通过泛函分析的线性赋范空间完备化理论引进一类比 Riemann 积分更为一般的积分——Lebesgue 积分与 L^p 空间概念，由此简化了讨论测度论这一经典理论的困难过程.

第1章

泛函分析初步

泛函分析是 20 世纪初由 Hilbert、Banach 等数学家建立起来的现代数学分支. 它源于古典分析(Newton-Leibniz 微积分)，但其观念又高于古典分析，已经成为了处理现代工程技术问题的不可缺少的数学工具.

泛函分析的主要研究对象是度量空间、线性赋范空间与内积空间，研究这三类空间的几何性质与代数性质，以及研究关于空间之间的映射的性质. 通过对一般问题的高度抽象来达到去粗取精，从而深入到问题的本质是泛函分析方法研究问题的特点.

作为泛函分析初步，本章仅介绍三个空间及空间之间的映射的基本概念与性质. 讨论的内容是泛函分析中最基本的或者是以后各章所需要的. 另外考虑到本教程的主要读者是工科学生，本章介绍的定义尽可能以实用的形式给出，列举的例子尽可能是在微积分学与线性代数学中已讨论的，性质的论证也尽可能直观化，并略去了一些难度较大的证明. 总之希望能使读者既初步掌握泛函分析的一些基本概念与方法，又尽可能避开纯数学理论的讨论过程.

1.1 度量空间、线性赋范空间与内积空间的定义、例子及相互关系

已知实数集$\mathbb{R}$中任意两个数 x,y 间的距离是 $d(x,y)=|x-y|$，同样，平面$\mathbb{R}^2$上任意两个向量 $\boldsymbol{x}=(a_1,a_2)$，$\boldsymbol{y}=(b_1,b_2)$间的距离是 $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=[(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2]^{\frac{1}{2}}$. $\mathbb{R}$ 与$\mathbb{R}^2$上的距离均具有“非负性”及“两点距离不超过这两点分别与第三点距离之和”两个基本特征. 那么对于比$\mathbb{R}$，$\mathbb{R}^2$更一般的集合是否也能定义相应的距离并具有$\mathbb{R}$，$\mathbb{R}^2$上距离的上述基本特征呢？这个问题的回答是肯定的.

定义 1.1.1 设集合 $X\neq\varnothing$，若 X 上的二元实值函数 d 满足：$\forall x,y,z\in X$，

(M1) $d(x,y)\geqslant 0$，且 $d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$(正定性)；

(M2) $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(y,z)$(三角不等式)；

则称 d 为 X 上的**距离函数**，称 $X=(X,d)$为**度量空间**(**距离空间**).

注：将(M2)中的 z 用 x 替代，结合(M1)得到 $d(x,y)\leqslant d(y,x)$，同样，$d(y,x)\leqslant d(x,y)$，故有

(M3) $d(x,y)=d(y,x)$(对称性).

定义 1.1.1 给出了重要的度量空间概念，它由非空集合 X 与 X 上的距离函数 d(满足"正定性"、"三角不等式"与"对称性")两部分共同构成. 需注意若 d_1,d_2 为同一非空集合 X 上的两个不同的距离函数，则 $(X,d_1)\neq(X,d_2)$.

例 1.1.1 设 $X=\mathbb{R}^n$(全体 n 维实向量)，$\forall \boldsymbol{x}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\boldsymbol{y}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in X$，若定义

$$d_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=|a_1-b_1|+\cdots+|a_n-b_n|,$$

$$d_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=[(a_1-b_1)^2+\cdots+(a_n-b_n)^2]^{\frac{1}{2}},$$

则 d_1,d_2 均为 $\mathbb{R}^n$ 上的距离函数，得两度量空间 $X_1=(\mathbb{R}^n,d_1)$，$X_2=(\mathbb{R}^n,d_2)$.

证明 d_1 满足(M1)(M2)的证明留作习题.

d_2 显然满足(M1). 又若记 $\boldsymbol{z}=(c_1,c_2,\cdots,c_n)\in X$，$|\boldsymbol{\alpha}|$ 表示向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的长度，则有

$$\begin{aligned}d_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})&=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|=|(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})-(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})|\leqslant|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}|+|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}|\\&=d_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+d_2(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\end{aligned}$$

(参见线性代数学中关于向量长度的性质)，从而 d_2 满足(M2).

注：虽然 d_1,d_2 为 $\mathbb{R}^n$ 上两个不同的距离函数，但以后将知道它们是等价的.

例 1.1.2 设 $X=C[a,b]$($[a,b]$上的全体连续函数)，$\forall x=x(t)$，$y=y(t)\in X$，若定义

$$d(x,y)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|,$$

$$d_1(x,y)=\int_a^b|x(t)-y(t)|\,\mathrm{d}t,$$

则 d,d_1 均为 $C[a,b]$上的距离函数，得度量空间 $C[a,b]=(X,d)$，$C_1[a,b]=(X,d_1)$.

证明 d 显然满足(M1)(注意这里 $x=y\Leftrightarrow\forall t\in[a,b]$，$x(t)=y(t)$).

又设 $z=z(t)\in X$，由 $\forall t\in[a,b]$，

$$\begin{aligned}|x(t)-y(t)|\leqslant|x(t)-z(t)|+|y(t)-z(t)|\leqslant d(x,z)+d(y,z)\\\Rightarrow d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(y,z),\end{aligned}$$

知 d 满足(M2).

再由积分的性质易得 d_1 满足(M2)，而 d_1 满足(M1)的证明留作习题.

以后将知道 $C[a,b]$与 $C_1[a,b]$的几何性质有着本质上的差异.

上述两例中讨论的集合 $\mathbb{R}^n$ 及 $C[a,b]$都是通过学习线性代数学及微积分学已熟悉的，但是泛函分析讨论的集合更为广泛. 它不但讨论有限维向量空间，而且讨论无限维序列空间；不但讨论连续函数空间，而且讨论非连续函数空间. 以下是两个常见的例子.

例 1.1.3 设 $X=\{$全体有界复序列$\{a_n\}\}$. 当 $x=\{a_n\}\in X$ 时，$\exists M$ 使 $\forall n$ 有 $|a_n|\leqslant M$，记上述 M 中的最小值为 $\sup|a_n|$，称为$\{|a_n|\}$的上确界(即最小上界). 如对 $a_n=1-\dfrac{1}{n}$，由

$|a_n|\leqslant 1$ 且 $\forall M<1$，$\exists n$ 使得 $|a_n|>M$，知 $\sup|a_n|=1$.

现 $\forall x=\{a_n\}$，$y=\{b_n\}\in X$，由 $|a_n-b_n|\leqslant|a_n|+|b_n|$ 知 $\{a_n-b_n\}$ 仍为有界序列，从而可定义

$$d(x,y)=\sup|a_n-b_n|.$$

又直接验证易知 d 满足(M1)、(M2)(证明留作习题)，从而得度量空间 $l^{\infty}=(X,d)$.

例 1.1.4 设 $X=\{$全体$[a,b]$上的有界函数$\}$，$\forall x=x(t)$，$y=y(t)\in X$，若定义

$$d(x,y)=\sup_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|\ (\{|x(t)-y(t)|\mid x,y\in X\}\text{ 在}[a,b]\text{ 上的最小上界}),$$

则可验证 d 满足(M1)、(M2)(证明留作习题)，得度量空间 $B[a,b]=(X,d)$.

注：sup 与 max 是两个不同的概念. 当实数集有上界时 sup 一定存在，但 max 不一定存在. 如前述 $a_n=1-\frac{1}{n}$，$\sup a_n=1$，但 $\max a_n$ 不存在；又如取

$$x(t)=\begin{cases}t, & 0\leqslant t<1,\\ 0, & t=1,\end{cases}$$

$\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}x(t)=1$，但 $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}x(t)$ 同样不存在.

度量空间讨论了集合中的元素之间的几何关系——距离，但若仅局限于此尚不足以进一步深入了解集合的内在性质. 事实上，集合中的元素之间还可能具有某种代数关系——线性运算关系，这种代数关系是在线性代数学中讨论的向量的“加法”与“数乘”运算关系的推广.

定义 1.1.2 设 $X\neq\varnothing$，K 表示 $\mathbb{R}$ 或者 $\mathbb{C}$. 若 X 具有加法“$+$”与数乘“$\cdot$”运算，满足 8 条运算公理：$\forall x,y,z\in X$，$k,l\in K$，

(L1) $x+y=y+x$，

(L2) $(x+y)+z=x+(y+z)$，

(L3) X 中存在唯一的零元素“θ”，使得 $x+\theta=x$，

(L4) X 中存在唯一的负元素“$-x$”，使得 $x+(-x)=\theta$，

(L5) $1\cdot x=x$，

(L6) $(kl)\cdot x=k\cdot(l\cdot x)$，

(L7) $(k+l)\cdot x=k\cdot x+l\cdot x$，

(L8) $k\cdot(x+y)=k\cdot x+k\cdot y$，

则称 X 为**线性空间**，当 $K=\mathbb{R}(\mathbb{C})$ 时称 X 为**实(复)线性空间**.

由定义 1.1.2 知线性空间为具有“加法”与“数乘”运算(满足 8 条运算公理)的非空集合.

注：(1) 由(L4)知可定义 X 上的减法运算 $x-y=x+(-y)$；

(2) 由(L1)～(L8)可得性质：$0\cdot x=\theta$，$k\cdot\theta=\theta(k\in K)$ 及 $(-1)\cdot x=-x$(证明留作习题).

例 1.1.5 分别按向量及函数的加法与数乘运算，容易验证 $\mathbb{R}^n$ 及 $C[a,b]$ 均构成线性空

间. $\mathbb{R}^n$中的零元素为零向量,而$C[a,b]$中的零元素为$[a,b]$上的零函数.

又$\forall x=\{a_n\},y=\{b_n\}\in l^\infty,k\in\mathbb{C}$,定义

$$x+y=\{a_n+b_n\},\quad kx=\{ka_n\}. \tag{1.1.1}$$

一方面由$|a_n+b_n|\leqslant|a_n|+|b_n|,|ka_n|=|k||a_n|$知$x+y,kx\in l^\infty$,即(1.1.1)式定义了$l^\infty$上的运算;另一方面容易验证(1.1.1)式定义的运算满足(L1)～(L8)(其中零元素$\theta=(0,\cdots,0,\cdots)$为零序列),从而$l^\infty$构成一个线性空间.

注:(1) 一般在实际问题中遇到的大多数为离散型(序列)或连续型(函数)集合,此时其上的线性运算均可按照例1.1.5中的方法定义,从而使之构成线性空间,如$B[a,b]$按通常的函数加法与数乘运算构成一线性空间(证明留作习题);

(2) 对一些具有限制性的集合,需验证给定线性运算对此集合的封闭性,如平面上的单位闭圆盘$X=\{(a,b)\mid a,b\in\mathbb{R},a^2+b^2\leqslant1\}$按$\mathbb{R}^2$的线性运算不能构成线性空间.事实上$\boldsymbol{x}=(1,0)\in X$,而$2\boldsymbol{x}=(2,0)\notin X$,即$X$对向量的数乘运算不封闭.

例 1.1.6 设$X=\mathbb{R}^+$(全体正实数),易知按通常数的加法与数乘运算X不能构成线性空间.又若$\forall x,y\in X,k\in\mathbb{R}$,定义

$$x\oplus y=xy,\quad k\circ x=x^k,$$

则"$\oplus,\circ$"为X上的运算且满足(L1)～(L8)(证明留作习题),故知$(\mathbb{R}^+,\oplus,\circ)$为线性空间.

注:例1.1.6使我们对"加法"的本质有了更为深入的理解.

泛函分析进一步将集合的代数与几何两种关系联系在一起研究,建立起了重要的线性赋范空间概念.

定义 1.1.3 设X为线性空间,若$X\to\mathbb{R}$的映射$\|\cdot\|$满足:$\forall x,y\in X,k\in K$,

(N1) $\|x\|\geqslant0$,且$\|x\|=0\Leftrightarrow x=\theta$(正定性),

(N2) $\|kx\|=|k|\,\|x\|$(齐次性),

(N3) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$(三角不等式),

则称$\|\cdot\|$为X上的范数,$X=(X,\|\cdot\|)$为**线性赋范空间**.

对于线性空间X及其上范数$\|\cdot\|$,若$\forall x,y\in X$定义

$$d(x,y)=\|x-y\|, \tag{1.1.2}$$

则容易验证d满足(M1)、(M2)(证明留作习题),从而d为X上的距离函数.称由(1.1.2)式定义的距离函数为由范数导出的距离函数.

综上知线性赋范空间是由线性空间X与其上的范数$\|\cdot\|$(满足正定性、齐次性及三角不等式)两部分共同构成的,它是一类特殊的度量空间(X为线性空间,距离函数d由范数按(1.1.2)式导出).

例 1.1.7 对线性空间$\mathbb{R}^n,C[a,b],l^\infty,B[a,b]$中的元素$\boldsymbol{x}=(a_1,a_2,\cdots,a_n),y=y(t)$,$z=\{a_n\},w=w(t)$,若定义

$$\|\boldsymbol{x}\|_1=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|,\quad \|\boldsymbol{x}\|_2=(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|y\| = \max_{a\leqslant t\leqslant b} |y(t)|, \quad \|y\|_1 = \int_a^b |y(t)|\,\mathrm{d}t,$$

$$\|z\| = \sup |a_n|, \quad \|w\| = \sup_{a\leqslant t\leqslant b} |w(t)|,$$

则容易验证 $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ 分别定义了 $\mathbb{R}^n$, $C[a,b]$, l^∞, $B[a,b]$ 上的范数，从而它们均构成线性赋范空间. 又显见依据导出距离函数(1.1.2)式，他们分别是在例 1.1.1～例 1.1.4 中已讨论的度量空间.

以下要给出两类重要的线性赋范空间，为此需先引进一个重要的不等式.

引理 1.1.1(Hölder 不等式) 设 $p>1$, q 为 p 的共轭指数$\left(\text{即满足}\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1\right)$.

(1) 若对 $r\geqslant 1$，记 $X_r=\{\{a_n\}\mid a_n\in\mathbb{C}$ 且 $\sum |a_n|^r$ 收敛$\}$，则 $\forall \{a_n\}\in X_p$, $\{b_n\}\in X_q$, $\{a_nb_n\}\in X_1$ 且

$$\sum |a_nb_n| \leqslant \left(\sum |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum |b_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}; \tag{1.1.3}$$

(2) 若记 $X=C[a,b]$，则 $\forall x=x(t)$, $y=y(t)\in X$,

$$\int_a^b |x(t)y(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \left[\int_a^b |x(t)|^p\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_a^b |y(t)|^q\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{q}}. \tag{1.1.4}$$

证明略.

注：当 $p=q=2$ 时，(1.1.3)式即

$$\sum |a_nb_n| \leqslant \left(\sum |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum |b_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.1.5}$$

称为 Cauchy-Schwartz 不等式.

例 1.1.8 当 $p\geqslant 1$ 时，引理 1.1.1 中的 X_p 为线性空间且 $\forall\{a_n\}\in X_p$,

$$\|\{a_n\}\|_p = \left(\sum |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

定义了 X_p 上的范数，从而得线性赋范空间 $l^p=(X_p, \|\cdot\|_p)$.

证明 根据前述，我们以 l^∞ 的线性运算作为序列空间的线性运算，显然(L1)～(L8)成立. 以下验证可由 $\{a_n\}$, $\{b_n\}\in X_p$, $k\in K$ 推出 $\{a_n+b_n\}$, $\{ka_n\}\in X_p$. 当 $p=1$ 时，易知

$$\left(\sum |a_n+b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum |b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.1.6}$$

成立.

又当 $p>1$ 时，记 q 为 p 的共轭指数，$c_n=a_n+b_n$，由(1.1.3)式及 $(p-1)q=p$ 得

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^m |a_n+b_n|^p &= \sum_{n=1}^m |a_n+b_n|\,|c_n|^{p-1} \\
&\leqslant \sum_{n=1}^m |a_n|\,|c_n|^{p-1} + \sum_{n=1}^m |b_n|\,|c_n|^{p-1} \\
&\leqslant \left(\sum_{n=1}^m |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^m |c_n|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

$$+\left(\sum_{n=1}^{m}|b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{m}|c_n|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant\left[\left(\sum|a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum|b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]\left(\sum_{n=1}^{m}|a_n+b_n|^p\right)^{\frac{1}{q}},$$

由 $1-\frac{1}{q}=\frac{1}{p}$ 知(1.1.6)式仍然成立(称(1.1.6)式为 Minkowski 不等式).

由(1.1.6)式知,可由 $\{a_n\},\{b_n\}\in X_p\Rightarrow\{a_n+b_n\}\in X_p$,而 $\{a_n\}\in X_p\Rightarrow\{ka_n\}\in X_p$ 是显然的. 至此证得 X_p 按序列的线性运算构成线性空间.

最后直接验证可得 $\|\cdot\|_p$ 满足(N1)、(N2),而(1.1.6)式指出 $\|\cdot\|_p$ 满足(N3),故知 $\|\cdot\|_p$ 为 X_p 上的范数.

例 1.1.9 当 $p\geqslant 1$ 时,对 $\forall x=x(t)\in C[a,b]$,

$$\|x\|_p=\left[\int_a^b|x(t)|^p\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{p}}$$

定义了 $C[a,b]$ 上的范数,从而得线性赋范空间 $C_p[a,b]=(C[a,b],\|\cdot\|_p)$.

证明可由连续型的 Hölder 不等式(1.1.4)式得到(参见习题 1.1 中的题 2 及题 10).

已知线性赋范空间可视为一类特殊的度量空间,那么问题的逆是否成立,即是否每一个线性的度量空间 X 上的距离函数 d 均可由 X 上的某范数 $\|\cdot\|$ 按(1.1.2)式关系导出呢?要回答这个问题需讨论由范数导出的距离函数的特征.

命题 1.1.1 设 X 为线性空间,若 X 上的距离函数 d 可由 X 上的某范数 $\|\cdot\|$ 导出,则 d 满足: $\forall x,y,z\in X,k\in K$,

(1) $d(x+z,y+z)=d(x,y)$(平移不变性);

(2) $d(kx,ky)=|k|d(x,y)$(齐次性).

反之,若 X 上的距离函数 d 满足上述(1)、(2),则存在 X 上的某范数 $\|\cdot\|$ 使 d 恰由此范数导出(即 $d,\|\cdot\|$ 满足由范数导出的距离函数的关系式(1.1.2)式).

证明 若距离函数 d 由某范数 $\|\cdot\|$ 导出,则 $\forall x,y,z\in X,k\in K$,

$$d(x+z,y+z)=\|(x+z)-(y+z)\|=\|x-y\|=d(x,y),$$
$$d(kx,ky)=\|kx-ky\|=\|k(x-y)\|=|k|d(x,y),$$

知 d 满足(1)与(2).

反之,若 d 满足(1)与(2),则 $\forall x\in X$ 定义

$$\|x\|=d(x,\theta),\tag{1.1.7}$$

得 $\|x\|=d(x,\theta)\geqslant 0$,且

$$\|x\|=0\Leftrightarrow d(x,\theta)=0\Leftrightarrow x=\theta,$$

知 $\|\cdot\|$ 满足(N1);又由(2)得

$$\|kx\|=d(kx,\theta)=d(kx,k\theta)=|k|d(x,\theta)=|k|\,\|x\|,$$

知 $\|\cdot\|$ 满足(N2);再由(1)得

$$\begin{aligned}\|x+y\| &= d(x+y,\theta) \leqslant d(x+y,y)+d(\theta,y)\\ &= d(x,\theta)+d(y,\theta) = \|x\|+\|y\|,\end{aligned}$$

知 $\|\cdot\|$ 满足(N3). 证得(1.1.7)式定义了 X 上的范数.

最后由(1)得

$$d(x,y)=d(x-y,\theta)=\|x-y\|,$$

知 d 恰由(1.1.7)式定义的范数导出.

由此命题知要考察一个线性的度量空间 X 是否为线性赋范空间,只需检验 X 上的距离函数 d 是否满足平移不变性与齐次性.

例 1.1.10 设 $X=\{$全体复序列$\}$,显然按序列的线性运算 X 构成一线性空间. 又若对 $\forall x=\{a_n\},y=\{b_n\}\in X$,定义

$$d(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|a_n-b_n|}{1+|a_n-b_n|},$$

则可验证 d 为 X 上的距离函数(证明留作习题),从而 $X=(X,d)$ 为线性的度量空间. 但若取 $x=(1,0,0,\cdots),y=(0,0,\cdots)\in X$,则 $2x=(2,0,0,\cdots),2y=(0,0,\cdots)\Rightarrow d(2x,2y)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1+2}=\frac{1}{3}$,而 $2d(x,y)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$,知 d 不满足齐次性. 命题 1.1.1 指出 d 不可由任何范数导出,从而(X,d)不是线性赋范空间.

由例 1.1.10 知,线性的度量空间是比线性赋范空间更为一般的空间.

至此我们对度量空间及线性赋范空间的定义与相互关系已有了比较完整的了解. 注意到上述两类空间都可以以我们所熟悉的 n 维向量空间$\mathbb{R}^n$为背景导出,故有必要进一步发掘$\mathbb{R}^n$的其他基本属性. 熟知向量的内积是在$\mathbb{R}^n$中的向量的距离与长度关系之外的另一重要关系,研究此关系的本质并推广到一般线性空间,我们得到了下述重要的内积空间概念.

定义 1.1.4 设 X 为实(复)线性空间,若 X 上的二元实(复)值函数$(\cdot,\cdot)$满足: $\forall x,y,z\in X,k\in\mathbb{R}\,(\mathbb{C})$,

(P1) $(x,x)\geqslant 0$,且$(x,x)=0\Leftrightarrow x=\theta$(正定性),

(P2) $(x,y)=\overline{(y,x)}$(共轭对称性),

(P3) $(ax,y)=a(x,y)$,

(P4) $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$,

则称$(\cdot,\cdot)$为 X 上的**内积**,$X=(X,(\cdot,\cdot))$为**实(复)内积空间**((P3)、(P4)合称为线性性).

注:(P2)、(P3)、(P4)指出 $\forall x,y,z\in X,k,l\in\mathbb{R}\,(\mathbb{C})$,

$$(kx+ly,z)=k(x,z)+l(y,z),\quad (x,ky+lz)=\bar{k}(x,y)+\bar{l}(x,z),$$

即内积对第一变元线性,对第二变元共轭线性.

命题 1.1.2 设 X 为内积空间.

(1) $\forall x,y\in X$,成立 Schwartz 不等式

$$|(x,y)|\leqslant(x,x)^{\frac{1}{2}}(y,y)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.1.8}$$

(2) 若 $\forall x\in X$,记

$$\| x \| = (x,x)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.1.9}$$

则(1.1.9)式定义了 X 上的范数.称由(1.1.9)式定义的范数为由内积导出的范数.

证明　(1) 若 $y=\theta$,则(1.1.8)式显然成立.

又若 $y\neq\theta$, $\forall k\in\mathbb{C}$,由(P1)得 $(x-ky,x-ky)\geqslant 0$,从而再由内积的线性性和共轭线性性得

$$(x,x)-k(y,x)-\bar{k}(x,y)+|k|^2(y,y)\geqslant 0,$$

特别取 $k=\dfrac{(x,y)}{(y,y)}$,知(1.1.8)式成立.

(2) 直接验证知(1.1.9)式定义的 $\|\cdot\|$ 满足(N1)、(N2).再由(1.1.8)和(1.1.9)两式得, $\forall x,y\in X$,

$$\begin{aligned}\| x+y\|^2 &= (x+y,x+y)=(x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y)\\ &= \|x\|^2+2\mathrm{Re}(x,y)+\|y\|^2\\ &\leqslant \|x\|^2+2\|x\|\,\|y\|+\|y\|^2\\ &= (\|y\|+\|x\|)^2,\end{aligned}$$

从而(1.1.9)式定义的 $\|\cdot\|$ 满足(N3).

注:由(1.1.9)式可将 Schwartz 不等式(1.1.8)式重新写为

$$|(x,y)|\leqslant \|x\|\|y\|. \tag{1.1.10}$$

综上所述,可知内积空间是由线性空间 X 与 X 上的内积(满足正定性、(共轭)对称性及(共轭)线性性)两部分共同构成的,它是一类特殊的线性赋范空间(范数 $\|\cdot\|$ 按(1.1.9)式由内积导出).

例 1.1.11　对线性空间 $\mathbb{R}^n$, l^2, $C[a,b]$ 中的元素 $\boldsymbol{x}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $\boldsymbol{y}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$, $u=\{a_n\}$, $v=\{b_n\}$, $f=f(t)$, $g=g(t)$ 定义

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n,\quad (u,v)=\sum a_n\overline{b_n},\quad (f,g)=\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t.$$

容易验证上述各 $(\cdot,\cdot)$ 分别定义了 $\mathbb{R}^n$, l^2, $C[a,b]$ 上的内积,从而它们均构成内积空间,其中记 $C_2[a,b]=(C[a,b],(\cdot,\cdot))$.又显见依导出范数(1.1.9)式,它们恰分别为在例 1.1.7、例 1.1.8 及例 1.1.9 中已讨论的线性赋范空间.

命题 1.1.2 指出内积空间可视为一类特殊的线性赋范空间,与研究线性度量空间与线性赋范空间的关系一样,要研究它的逆命题,即何时线性赋范空间上的范数可由内积导出,也需讨论相关特征.

命题 1.1.3　线性赋范空间 X 上范数 $\|\cdot\|$ 可由某内积导出的充分必要条件为 X 满足平行四边形公式: $\forall x,y\in X$,

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2). \tag{1.1.11}$$

证明　必要性:由内积的线性性直接计算立即得到.