最优化理论与算法

唐恒永　赵大宇　赵玉芳　编著

辽宁大学出版社

最优化理论与算法

唐恒永　赵大宇　赵玉芳　编著

辽宁大学出版社

一九九七年·沈阳

图书在版编目（CIP）数据

最优化理论与算法/唐恒永等编著. 一沈阳：辽宁大学出版社，1997. 12
ISBN 7-5610-3544-6

Ⅰ. 最… Ⅱ. ①唐… ②赵… Ⅲ. 最优化-数学理论
Ⅳ. 0224

中国版本图书馆 CIP 数据核字（97）第29728号

辽宁大学出版社出版
（沈阳市皇姑区崇山中路66号 邮政编码 110036）
地方国营新民印刷总厂印刷 辽宁大学出版社发行

开本：850×1168毫米1/32 字数：220千字 印张：11.375
印数：1—2000册
1997年12月第1版 1997年12月第1次印刷

责任编辑：黄永恒 王德年 责任校对：恒 永 玉 芳
封面设计：刘桂湘 版式设计：贾 莉

定价：19.00元

前 言

最优化是一个新兴的数学分支，是运筹学的最重要组成部分，它广泛地应用于工程技术、计算机科学和经济管理领域. 因而发展日新月异，越来越受到人们的重视。不仅数学、运筹学等专业人员应该掌握它，而且也是管理科学、系统工程和计算机软件专业人员不可缺少的知识。

本书编著者在辽宁大学数学系和沈阳师范学院数学计算机系多年从事最优化理论与算法的教学和科研工作，在此基础上，并参阅了大量著作和论文，写成此书，作为数学、运筹学、管理科学、系统工程和计算机软件等专业本科生或研究生的教材或参考书。

本书着重介绍了线性规划、非线性规划和组合最优化的基本理论和应用广泛、使用方便、具有实效的重要算法，并注意反映先进成果和思想。例如：约束问题的最优性条件（第七章），网络最优化问题的线性规划方法（第十二章），算法复杂性理论和线性规划的 Karmarkar 算法（第十三章）等。

本书的叙述为求深入浅出，在一切可能的情况下，使用直观的、具有启发性的几何背景引进问题，解释问题，然后再给出必要的理论分析，以便使读者能较快和深入地理解问题的本质和掌握求解方法。

本书的内容比较广泛. 作为教材，全部讲授本书约需80～90学时. 学时较少的课程使用本书时，可根据不同专业，选讲所需要的内容。

沈阳师范学院科研处的丁言镁处长和穆英同志对本书的出版给予了大力的支持，没有他们的辛勤努力，就没有这本拙作，对此我们表示诚挚的感谢。

由于编著者的水平有限，加之时间仓促，书中肯定有不少错误和不妥之处，恳请读者批评指正。

编著者

1997 年 7 月 10 日

目　录

第一章 概 论

最优化方法是数学中一个十分活跃的新分支，是运筹学的一个重要组成部分．随着电子计算机的发展和普及，它已被广泛地应用于工程技术、经济管理及其它自然科学领域，并产生了直接经济效益，是一门越来越受到重视的学科．本章从实际例子出发，给出最优化问题的数学形式和对今后的研究很有启发的二维问题的图解法．

§1.1 实 例

例 1.1.1 曲线拟合问题

设有两个物理量 ξ、η，根据某一规律知道它们满足下列函数关系

$$\eta=h(\xi,x_1,x_2,x_3)=x_1+x_2\xi^{x_3} \tag{1.1.1}$$

假定由实验测得了 m 个点对 $(\xi_1,\eta_1),(\xi_2,\eta_2),\cdots,(\xi_m,\eta_m)$ 要求根据这 m 个点对确定 x_1、x_2、x_3 的最优值，对于任意一组 x_1、x_2、x_3 来说，与 ξ_i 相对应可以由式(1.1.1)计算出 $\hat{\eta}_i$

$$\hat{\eta}_i=h(\xi_i,x_1,x_2,x_3)$$

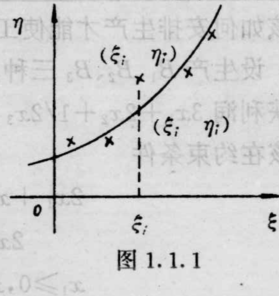

图 1.1.1

在 ξ_i 处测得的 η_i 与根据这组 x_1、x_2、x_3 计算出的值 $\hat{\eta}_i$ 的偏离为

$$\delta_i=\hat{\eta}_i-\eta_i=h(\xi_i,x_1,x_2,x_3)-\eta_i$$

于是所有 $\xi_1,\xi_2\cdots\cdots,\xi_m$ 处的总偏差可用 $\sum\limits_{i=1}^{m}\delta_i^2$ 来度量，它显然是 x_1,x_2,x_3 的函数

$$\sum_{i=1}^{m}\delta_i^2=\sum_{i=1}^{m}[h(\xi_i,x_1,x_2,x_3)-\eta_i]^2=f(x_1,x_2,x_3)$$

我们自然是想求这样一组 x_1、x_2、x_3，使得相应的总编差最小，也就是要求出三元函数 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的极小点做为问题的解.

例 1.1.2 生产安排问题

某工厂用 A_1、A_2 两种原料生产 B_1、B_2、B_3 三种成品，工厂现有原料数、生产每吨成品需要原料数、以及每吨成品可得利润列表如下：

每吨成品需原料(吨) 成品 / 原料	B_1	B_2	B_3	现有原料(吨)
A_1	2	1	0	30
A_2	0	2	4	50
每吨成品利润(万元)	3	2	$\frac{1}{2}$	

应该如何安排生产才能使工厂获利最大？

设生产 B_1、B_2、B_3 三种成品分别为 x_1 吨、x_2 吨、x_3 吨，则共获利润 $3x_1+2x_2+1/2x_3$ 万元. 由于受到现有原料的限制，应该在约束条件

$$2x_1+x_2\leqslant 30$$

$$2x_2+4x_3\leqslant 50$$

$$x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0,x_3\geqslant 0$$

的限制下求函数

$$f(x_1,x_2,x_3)=3x_1+2x_2+\frac{1}{2}x_3$$

的极大点.

例 1.1.3 营销计划问题

某销售公司经营两种商品，第一种商品每件售价 30 元，第二种商品每件售价 450 元. 根据统计，售出一件第一种商品所需的营业时间是 0.5 小时，第二种商品是售出数量 x_2 的函数，为$(2+0.25x_2)$小时，已知该公司在这段时间内的总营业时间为 800 小时，如何计划经营数量才能使营业额最大？

设该公司计划经营第一种商品 x_1 件，第二种商品 x_2 件，则其营业额为

$$f(\boldsymbol{x})=30x_1+450x_2$$

由于营业时间的限制，该计划必须满足约束条件

$$0.5x_1+(2+0.25x_2)x_2\leqslant 800$$

此外，还应满足 $x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0$. 问题归结为在上述约束条件下，求 x_1,x_2 的值，使营业额函数的值达到最大.

例 1.1.4 集装箱托运问题

某公司拟用集装箱托运甲乙两种货物，两种货物每箱的体积、重量，可获利润及托运所受限制如下表所示：

货　物	体　积 每箱(米^3)	重　量 每箱(百斤)	利　润 每箱(百元)
甲	5	2	20
乙	4	5	10
托运限制	24	13	

问两种货物各托运多少箱，可获得利润最大？

设 x_1,x_2 分别为甲、乙两种货物的托运箱数，其数学模型

为：在约束条件

$$5x_1+4x_2\leqslant 24$$

$$2x_1+5x_2\leqslant 13$$

$$x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0$$

$$x_1, x_2 \text{ 是整数}$$

下，求函数 $f(\boldsymbol{x})=20x_1+10x_2$ 的最大值.

§1.2 最优化问题的数学形式

上节考虑的四个例子都是求多元函数的极值点，使该函数达到极大值或极小值，这样的问题称为最优化问题，在例 1.1.1 中自变量不受限制，这类问题称为约束问题，在后三个例子中，自变量受到了等式或不等式的限制，这类问题称为约束问题. 像例 1.1.4 那样，如果自变量要求是整数，称为整规划问题，整规划是一类重要的组合最优化问题.

由于极大化 $f(\boldsymbol{x})$ 的问题等价于极小化 $\bar{f}(\boldsymbol{x})=-f(\boldsymbol{x})$，因此在这本书中我们将主要讨论极小化的最优化问题.

1.2.1 无结束问题

无约束最优化问题的数学形式是

$$\min f(\boldsymbol{x}) \quad \boldsymbol{x}\in\Omega\subset R^n \qquad (1.2.1)$$

其中 $f(\boldsymbol{x})$ 称为目标函数，Ω 为其定义域. 本讲义大部分是限于 $\Omega=R^n$ 的这样情况.

定义 1.2.1 若对于 $\boldsymbol{x}^*\in\Omega\subset R^n$，存在着 $\varepsilon>0$，使得当 $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*\|<\varepsilon$ 且 $\boldsymbol{x}\in\Omega$ 时，总有

$$f(\boldsymbol{x})\geqslant f(\boldsymbol{x}^*) \qquad (1.2.2)$$

则称 $\boldsymbol{x}^*$ 是 $f(\boldsymbol{x})$ 在 Ω 上的局部极小点（最优解）. 若当 $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*$

$\| < \varepsilon$,但 $x \neq x^*$ 时,式(1.2.2)的不等式恒成立,则称 x^* 是 $f(x)$ 在 Ω 上的严格局部极小点(最优解). $f(x^*)$ 称为(严格)局部最优值.

定义 1.2.2 若存在着 $x^* \in \Omega \subset R^n$,使得对任意的 $x \in \Omega$,式(1.2.2)都成立,则称 x^* 是 $f(x)$ 在 Ω 上的整体极小点(最优解). 若当 $x \neq x^*$ 时,式(1.2.2)的不等式恒成立,则称 x^* 是 $f(x)$ 在 Ω 上的严格整体极小点(最优解). $f(x^*)$ 称为(严格)整体最优值.

虽然实际问题中所关心的往往是整体最优解,但是现有的算法常常只能保证近似地求出局部最优解. 对于寻求整体最优解的问题,目前最流行的方法是多次使用求解无约束最优化问题的算法,多找出几个局部最优解,然后把其中取值最小的那个局部最优解做为近似的整体最优解.

1.2.2 约束问题

约束最优化问题的数学形式是

$$\begin{aligned} &\min f(x) \\ &\text{s.t} \quad g_i(x) \leqslant 0 \qquad i=1,\cdots,m \\ &\qquad\ \ h_i(x) = 0 \qquad i=1,\cdots,l \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

其中 $f(x)$、$g_i(x)$、$h_i(x)$ 是 R^n 上的连续函数,函数 $f(x)$ 称为目标函数,等式、不等式的限制称为约束,$g_i(x)$、$h_i(x)$ 称为约束函数. 只含等式约束的问题称为等式约束最优化问题,只含不等式约束的问题称为不等式约束最优化问题,两种约束都包含的问题称为一般约束最优化问题.

定义 1.2.3 称满足约束的点集

$S=\{x \mid g_i(x) \leqslant 0, i=1,\cdots,m, h_i(x)=0, i=1,\cdots,l\}$ 为可行域. 属于可行域的点称为可行点,不属于可行域的点称为不

可行点.

定义 1.2.4 设 S 是问题(1.2.3)的可行域，若对于 $\boldsymbol{x}^*\in S$，存在着 $\varepsilon>0$，使得对一切满足 $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*\|<\varepsilon$ 的 $\boldsymbol{x}\in S$，总有

$$f(\boldsymbol{x})\geqslant f(\boldsymbol{x}^*) \tag{1.2.4}$$

则称 $\boldsymbol{x}^*$ 是问题(1.2.3)的局部极小点(最优解). 若当 $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*\|<\varepsilon$，但 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{x}^*$ 时，式(1.2.4)的不等号恒成立，则称 $\boldsymbol{x}^*$ 是问题(1.2.3)的严格局部极小点(最优解). $f(\boldsymbol{x}^*)$ 称(严格)局部最优值.

与约束问题类似，我们也可以定义问题(1.2.3)的(严格)整体极小点(最优解)和(严格)整体最优值.

记 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=(g_1(\boldsymbol{x}),\cdots,g_m(\boldsymbol{x}))^T$，$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})=(h_1(\boldsymbol{x}),\cdots,h_l(\boldsymbol{x}))^T$，约束问题(1.2.3)可以写成更紧凑的形式

$$\begin{aligned}&\min f(\boldsymbol{x})\\&\text{s.t}\quad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\leqslant\boldsymbol{0}\\&\qquad\ \ \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}\end{aligned} \tag{1.2.5}$$

在约束最优化问题中，如果目标函数和约束函数都是线性的，那么该类问题称为线性规划问题，线性规划问题的标准形式是

$$\begin{aligned}&\min \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{s}\\&\text{s.t}\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\\&\qquad\quad \boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{c}$ 是 n 维向量，$\boldsymbol{A}$ 是秩为 m 的 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{b}$ 是 m 维的向量.

§1.3 二维问题的图解法

由于在空间直角坐标系中能表示出二元函数的图象，因

而二维最优化问题有清晰的几何解释. 二维问题可用图解法求解. 另外二维问题的直观几何表示对理解高维问题的理论以及建立有效的算法都有很大的启发性. 下边我们通过几何例子来说明二维问题的图解法.

例 1.3.1 考虑无约束问题

$$\min f(\boldsymbol{x})=(x_1-2)^2+(x_2-2)^2+1 \tag{1.3.1}$$

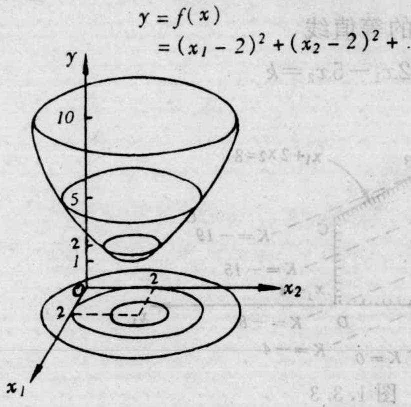

图 1.3.1

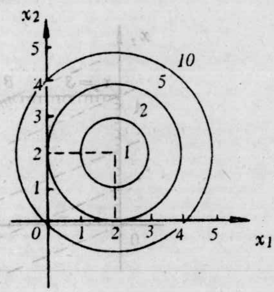

图 1.3.2

在图 1.3.1 中画出了函数 $y=f(\boldsymbol{x})$ 的图象, 该图象的最低点在平面 x_1ox_2 上的投影为问题的最优解. 而 $f(\boldsymbol{x})=k$ 的点都在 x_1ox_2 平面上的曲线

$$(x_1-2)^2+(x_2-2)^2+1=k$$

上, 不同的 k 确定了不同的曲线. 我们称它们为等值线. 它是一族以 $\boldsymbol{x}^*=(2,2)^T$ 为园心的图(见图 1.3.2). 园的半径越小, 其相应的函数值也越小, 公共园心 $\boldsymbol{x}^*=(2,2)^T$ 是问题 1.3.1 的最优解, 最优值 $f(\boldsymbol{x}^*)=1$

例 1.3.2 考虑线性规划问题

$$
\begin{aligned}
\min\ & f(\boldsymbol{x})=-2x_1-5x_2 \\
\text{s.t}\ & x_1+2x_2\leqslant 8 \\
& x_1\leqslant 4 \\
& x_2\leqslant 3 \\
& x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0.
\end{aligned}
\tag{1.3.2}
$$

问题的可行域是 x_1ox_2 平面上的凸多边形 $OABCD$（参看图 1.3.3），画出目标函数的等值线

$$-2x_1-5x_2=k$$

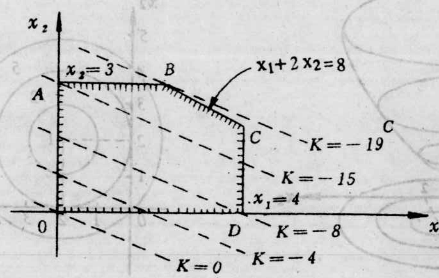

图 1.3.3

它们是一族平行直线（图 1.3.3 中的虚线），原点右上方的等值线离原点越远，相应的目标函数值越小. 问题成为：在平行直线族中找一条直线，使与凸多边形 $OABCD$ 相交，而又尽可能地离原点最远，从图 1.3.3 中可以看出，过 B 点的那条符合要求，即 B 点坐标既满足约束条件，且对应的目标函数值最小. 方程组

$$\begin{cases} x_2=3 \\ x_1+2x_2=8 \end{cases}$$

的解 $x_1=2, x_2=3$ 是 B 点的坐标. 所以问题的最优解是 $\boldsymbol{x}^*=(2,3)^T$，最优值是 -19.

例 1.3.3 考虑约束问题