WEN KE YING YONG SHU XUE FANG FA DAO YIN

数学加油站

文科应用数学方法导引

主编 王勇

WENKEYINGYONG SHUXUEFANGFA DAOYIN

UESTCP 电子科技大学出版社

文科应用数学方法导引

主　编　王　勇

副主编　任　宁　郑　海

编著者（按姓氏笔划）　王　勇

任　宁　杨　骏　郑　海

罗殿英　高世全　曾德国

电子科技大学出版社

文科应用数学方法导引

主编　王　勇

出　　版:电子科技大学出版社(成都建设北路二段四号)
责任编辑:郭志军
发　　行:电子科技大学出版社
印　　刷:北京市朝教印刷厂
开　　本:850mm×1168mm　1/32　印张:10.375　字数:275千字
版　　次:1999年8月第一版
印　　次:2005年10月第二次印刷
书　　号:ISBN 7-81065-211-7/O·10
定　　价:26.00元

前　言

数学是一切科学的基础．随着社会的发展、科技的进步，以及人类对客观世界认识的深化，数学方法不独在自然科学领域，而且在社会科学领域内对许多学科的研究产生了深刻的影响．数学方法之所以能在该领域发挥重要的作用，原因就在于它推理周密、判断准确．利用数学方法研究复杂的社会经济现象，即使推演过程显得冗长，也丝毫不会丧失其可靠性．而利用常识进行推理，很快会变得牵强附会，使人陷入将信将疑的境地，这正是一些传统学科如古典经济学中的一个突出弱点．数学方法的严格性、精密性和客观性，使我们在考察社会经济现象时，得以摈弃一切先入为主的偏见，得以摆脱好些理所当然的概念的影响．特别奇妙的是，数学方法中一些基本的表达手段如微积分，一旦被赋予研究对象的现实含义时，复杂事物竟变得如此清晰可辨，乃至不需任何多余的文字说明．

今天，高等文科院校的财经、管理、商贸类专业已普遍将数学作为必修课开设，甚至法学、公安（含物证技术）、外语类专业也已将数学列入了选修课，数学成为我们个人知识结构中的重要组成部分．为了帮助同学们克服数学学习中的困难，较好掌握数学课程的基本内容，逐步提高运用数学知识分析和解决实际问题的能力，我们组织西南政法大学、四川外语学院从事数学教学的老师共同编写了本书，并对所用教材《文科应用数学》的部分习题作了示范解答，可作为该教材的参考用书，本书还兼顾到了参加高等教育自学考试经济管理类专业的考生和报考经注管理类专业硕士研究生的同学．

《文科应用数学方法导引》各章由以下几部分组成：

1. 内容提要：列出本章基本概念、公式与结论；

2. 疑难分析：就本章较难把握的内容，力求以通俗易懂的解释帮助读者准确理解；

3. 解题示范：通过对一些典型例题的分析求解，帮助读者掌握基本解题技巧与方法，并能举一反三、融会贯通；

4. 思考与练习：提供单选、判断、填空及若干练习(计算或证明)题型，帮助读者复习、巩固所学知识，并检查学习情况.

本书按国际规定，x 的正切和反正切分别用$\tan x$ 和$\arctan x$ 表示，不再使用$\mathrm{tg}x$ 和$\mathrm{arctg}x$；x 的余切和反余切分别用$\cot x$ 和$\mathrm{arccot}x$ 表示，不再使用$\mathrm{ctg}x$ 和$\mathrm{arcctg}x$ 表示. 此外，在附录中还对 1996 年 5 月修订后的全国经济学硕士研究生入学考试《数学考试大纲》作了介绍，录入了考试样卷及参考答案，并提供了 1997 年经济学硕士研究生入学考试数学试题及参考答案.

本书由王勇负责总纂. 编著者如下：罗殿英(第 1、2、3 章)、杨敏(第 4 章)、高世全(第 5 章)、王勇(第 6、9、10 章)、曾德国(第 7 章)、任宁(第 8 章，第11章的投入产出模型)、郑海(第 11 章的线性规划).

在撰写过程中，我们参阅了有关教材资料，谨向这些文献的作者致谢. 西南政法大学教材工作委员会和电子科技大学出版社的同志对本书的出版付印给予了大力的支持，在此一并表示谢意.

限于编者的水平与经验，书中难免存有疏漏，恳请同行及读者不吝赐教.

王　勇

目　　录

第1章　函　数

1.1　内容提要

1.1.1　函数的定义

设x与y是两个变量. 如果当变量x在实数的某一范围中任意取定一个数值时, 变量y按照一定的法则f, 总有确定的数值和它对应, 则变量y叫做变量x的函数, 记作

$$y = f(x) \qquad (x \in D),$$

其中变量x叫做自变量, 而变量y叫做因变量, D是使函数有定义的自变量x的全体, 叫做函数的定义域, 因变量的变化域称为函数的值域, 记作$E: y = f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$.

1.1.2　函数的表示法

1. 公式法: 用数学式子表示自变量和因变量对应关系的方法. 用该法表示函数不一定总是用一个式子表示, 如果需要, 也可以分段用几个式子表示一个函数, 这类函数叫做分段函数.

2. 表格法: 在实际应用中常将一系列的自变量值与对应的函数值列成表.

3. 图式法: 对于函数$f(x)$, 在其定义域内取一个x值时, 就可得到确定的对应值y. 以这一对x, y值为坐标, 在平面坐标x, y定出一个点$M(x, y)$. 当x变化时, M点应在平面上运动可描出一条曲线, 这条曲线就叫做函数$y = f(x)$的图形.

1.1.3　函数的简单特性

1. 奇偶性：设函数 $y = f(x)$ 的定义域是 D，若对于任意的 $x \in D$，都有 $-x \in D$，且满足 $f(-x) = f(x)$，则称函数 $y = f(x)$ 是偶函数. 若对于任意的 $x \in D$，都有 $-x \in D$，且满足 $f(-x) = -f(x)$，则称函数 $y = f(x)$ 是奇函数.

偶函数的图形对称 y 轴；奇函数的图形对称于坐标原点.

2. 单调性：若对于 (a,b) 内任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，有 $f(x_1) < f(x_2)$，则函数 $y = f(x)$ 在区间 (a,b) 内是单调增加的；如果对于 (a,b) 内任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，有 $f(x_1) > f(x_2)$，则称函数 $y = f(x)$ 在区间 (a,b) 内是单调减少的.

3. 有界性：若存在 $M > 0$，使得当 x 取定义域的每一个值时，都有 $|f(x)| \leqslant M$ 成立，则称函数 $y = f(x)$ 为该定义域上的有界函数.

4. 周期性：如果对函数 $y = f(x)$，存在一个常数 $T > 0$，使得对于 x 在定义域内的一切值，都有 $f(x+T) = f(x)$ 成立，则称函数 $y = f(x)$ 为周期函数，T 为函数的周期. 习惯上，函数的周期是指最小正周期.

1.1.4　反函数

设函数 $y = f(x)$（直接函数）的值域为 E，若对于 E 中的每一个 y 值，都可由方程 $y = f(x)$ 唯一确定出 x 值，则得到一个定义在 E 上的函数 $\varphi(y)$，称 $x = \varphi(y)$ 为 $y = f(x)$ 的反函数，在习惯上，常将 $y = f(x)$ 的反函数记为 $y = f^{-1}(x), x \in E$.

函数 $y = f(x)$ 的图形与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形是关于直线 $y = x$ 对称的两条曲线.

1.1.5　复合函数

y 是 u 的函数 $y = f(u)$，而 u 是 x 的函数 $u = \varphi(x)$，与 x 对应的 u 值能使 y 有定义，则称 y 是 x 的复合函数，记作 $y = f[\varphi(x)]$，

其中 u 叫做中间变量，x 叫做基本变量.

1.1.6 基本初等函数和初等函数

基本初等函数是指以下六类函数：常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数.

由基本初等函数经过有限次四则运算和复合运算所得到的函数，称为初等函数.

1.1.7 经济学中的常用函数

1. 需求函数与价格函数

消费者想要购买和能够购买的某种商品的数量，受许多因素的影响，其中最主要是产品的价格. 一般说来，价格越高需求量就越小. 反之，需求量越大. 这种关系可表示为

$$Q = Q(P),$$

式中 Q 表示需求量，P 表示价格. 即需求量 Q 可视为该商品价格 P 的函数，称为需求函数. 根据需求函数画出的曲线，叫做需求曲线. 需求曲线通常是条左高右低的曲线.

需求函数 $Q = Q(P)$ 的反函数，就是价格函数. 记作

$$P = P(Q),$$

它也反映商品的需求与价格的关系.

2. 供给函数

供给是与需求相对的概念. 需求是就购买者而言，供给是就生产者而言. 供给函数是讨论在其它因素不变的条件下供应商品的价格与相应供给量的关系，即把供应商品的价格 P 作为自变量，而把相应的供给量 Q 作为因变量，则供给函数一般可表示为

$$Q = Q(P)$$

一般地，商品供给量随商品价格的上涨而增加. 因此，商品供给函数 Q 是商品价格 P 的增加函数. 根据供给函数所作的图形称做供给曲线，通常是一条左低右高的曲线.

3. 总成本函数

企业在一定时期内，为了生产制造一定的产品所支付的全部费用的总和即生产成本．根据生产成本与产量之间的关系，生产成本又可分为变动成本与固定成本．变动成本是指其总额随产量增加而相应增加的成本．固定成本是指其总额不随产量变化的成本．若用 C_0 表示固定成本总额，C_1 表示单位变动成本，q 表示产量，C 表示总成本，则有总成本函数．

$$C = C_0 + C_1 q.$$

4．收益函数与利润函数

设某种产品的价格为 P，相应的需求量为 Q，则销售该产品的收益 $R = QP$．又若需求函数为 $Q = f(P)$，其反函数为 $P = f^{-1}(Q)$，则收益函数也可表示为需求量 Q 的函数

$$R = QP = Qf^{-1}(Q).$$

收益与总成本之差就是利润 L．若收益函数为 $R(Q)$，总成本函数为 $C(Q)$，则利润函数

$$L = R(Q) - C(Q).$$

1.2 疑难分析

1．关于函数概念

① 函数概念的本质特征，是确定函数的两个要素：定义域和对应法则．定义域是自变量和因变量能相互联系构成函数关系的条件，无此条件，函数就无意义了．对应法则是正确理解函数概念的关键．函数关系不同于一般的依赖关系，“y 是 x 的函数”并不意味着 y 随 x 的变化而变化，如最简单的常数函数 $y = c$．函数关系也不同于因果关系．例如一昼夜的气温变化与时间变化是函数关系，但时间变化并不是气温变化的实际原因．

② 两个函数，当其定义域相同，对应法则也相同(即对定义域中的每一个值都对应着相同的函数值）时，那么这两个函数是相

等的或相同的;否则就是两个不同的函数.例如,函数 $y=\frac{x^4-4}{x+2}$ 的定义域是 $\{x \mid x \in R, x \neq -2\}$.但是,如果约去分子与分母的公因子 $x+2$,变成 $y=x-2$,此函数的定义域是 $\{x \mid x \in R\}$.由于定义域不相同,所以 $y=\frac{x^2-4}{x+2}$ 与 $y=x-2$ 是两个不同的函数.但是,如果不是从函数角度讨论问题,对一般的代数式恒等变形还是可以毫无顾虑地正常进行.例如,$\frac{x^2-4}{x+2}=x-2$,$\ln x^2=2\ln x$ 等都是成立的.

③ 表示函数对应法则的记号 $f(\quad)$ 有着广泛的涵义,不要认为它只表示某个数学式子.只要是对应法则,就可以用它来表示.它可以表示一个或几个数学表达式(比如不能用一个数学式子表示的分段函数),也可以表示一个图形、一张表格.

④ 根据实际问题建立起来的函数 $y=f(x)$ 的定义域往往与它的自然定义域不完全一致.一个函数的定义域可以是一个区间,也可以是几个区间,甚至可以是一些离散的数.例如函数 $y=\sqrt{\cos x-1}$ 的定义域是一些离散的数:$2k\pi\ (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\cdots)$.

2.函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

① 并不是函数都具有这四种特性,而是在研究函数时,常要研究函数是否具有这些特性.

② 函数是否"有界"或"单调",与所讨论的区间是有关系的.例如,函数 $y=x$ 在它的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内,显然是无界的;若指定在区间 $(1,2)$ 内讨论,则它是有界的.函数 $y=\sin x$ 在 $[0,\pi]$ 上有增有减,它既不是单调增加的,也不是单调减少的.如果把 $[0,\pi]$ 分成两个区间:$[0,\frac{\pi}{2}]$ 和 $[\frac{\pi}{2},\pi]$.则函数 $y=\sin x$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上是单调增加的;在区间 $[\frac{\pi}{2},\pi]$ 上是单调减少的.

③ 周期函数的周期通常是指其最小正周期,但并不是任何周期函数都有最小正周期.比如常函数 $y=c$,对任何实数 x 都成立.

所以常函数是周期函数，任何正数都可以作为周期，但它没有最小正周期.又如狄利克雷函数 $D(x)=\begin{cases}1, x \text{ 为有理数;} \\ 0, x \text{ 为无理数.}\end{cases}$ 任何正有理数都是 $D(x)$ 的周期，但它没有最小正周期.

3.关于复合函数的概念

① 理解复合函数的概念，会将几个相关联的函数正确地复合成一个复合函数；反过来，也会将一个比较复杂的复合函数分解成几个相关联的简单函数.但应该注意的是：函数的复合是有条件的，并不是任何几个函数都可以复合成一个复合函数.例如，函数 $y=\lg u$ 和 $u=-\sqrt{x}$ 就不能构成复合函数(由对数的定义可知，函数 $\lg(-\sqrt{x})$ 是没有意义的)

② 复合函数的顺序是不能交换的.例如 $f(x)=\sqrt{1+x}$，$\varphi(x)=x^2+5$，则 $f[\varphi(x)]=\sqrt{1+(x^2+5)}=\sqrt{x^2+6}$，$\varphi[f(x)]=(\sqrt{1+x})^2+5=x+6$，$f[\varphi(x)]\neq\varphi[f(x)]$.

4.关于反函数的概念

设 $x=\varphi(y)$ 是函数 $y=f(x)$ 的反函数.这时，它们是变量 x 与 y 之间的同一个方程，所以在同一个坐标面上它们有同一个图形.但习惯上常把自变量记为 x，因变量记为 y，即常把函数 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $y=f^{-1}(x)$，这时，函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形是关于直线 $y=x$ 对称的两条曲线.但应当注意，当变量 x 与 y 有特定的实际意义时，$y=f(x)$ 的反函数就不能记作 $y=f^{-1}(x)$.例如 $C=2\pi R$，其中 C 表示圆周的长，R 表示圆周的半径，这时反函数只能写为 $R=\dfrac{C}{2\pi}$，不能写成 $C=\dfrac{R}{2\pi}$.

5.初等函数与非初等函数

① 初等函数是由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次复合所构成的，是能用一个数学式子表示的函数.例如，函数 $y=\arcsin x^2$，$y=\dfrac{x+\sin x}{\cos^2 x}$，$y=x+\sqrt{\ln(1+\cos x)}$ 都是初等函

数.

② 非初等函数是指除初等函数以外的函数. 如通过多个数学式子表示的分段函数 $y = f(x) = \begin{cases} e^{\sin x}, & x < 0; \\ x+1, & x \geqslant 0. \end{cases}$ 以及

$y = \operatorname{sign}x = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$ 是非初等函数, 因为在定义域内, 不能用一个数学式子表示.

又如取整函数 $y = [x]$, 虽然在它的定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内, 能用一个数学式子表示, 但它并不是由基本初等函数经过四则运算和复合所得到的, 所以它是非初等函数.

③ 不能用一个数学式子表示的分段函数往往不是初等函数. 但不能说分段函数都不是初等函数, 例如

$y = \begin{cases} x, & x \geqslant 0; \\ -x, & x < 0. \end{cases}$ 是分段函数, 也是初等函数, 因为它可以用一个数学式子 $y = \sqrt{x^2}$ 表示.

1.3 解题示范

1. 求下列函数的定义域(用区间表示):

(1) $y = \sqrt{2x-1} + \dfrac{1}{3x-2}$; (2) $y = \lg(x+1) + \arcsin\dfrac{x-1}{3}$.

解 (1) 要使函数 y 有定义, x 必须使得右边的两个算式都有意义, 故 x 应满足不等式组

$$\begin{cases} 2x-1 \geqslant 0, \\ 3x-2 \neq 0, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} x \geqslant \dfrac{1}{2}, \\ x \neq \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

于是所求函数的定义域为: $D = [\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}) \cup (\dfrac{2}{3}, +\infty)$.

(2) 因为要使 y 有定义, 必须使得 $\lg(x+1)$ 与 $\arcsin\dfrac{x-1}{3}$ 都有

意义，所以 x 必须满足不等式组：

$$\begin{cases} x+1>0, \\ \left|\dfrac{x-1}{3}\right| \leqslant 1, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} x>-1, \\ -1 \leqslant \dfrac{x-1}{3} \leqslant 1. \end{cases}$$

解此不等式组，得 $-1<x\leqslant 4$. 故所求定义域为 $D=(-1,4]$.

关于求函数的定义域的方法：如果函数是一个抽象的数学式子，则其定义域是使这个式子有意义的一切实数. 这时应注意：① 分式的分母不能为零；② 偶次根号下应大于或等于零；③ 对数式的真数应大于零；④ $\arcsin x$ 或 $\arccos x$，其 $|x|\leqslant 1$；⑤ 若函数表达式由几项组成，则其定义域是各项定义域的公共部分；⑥ 分段函数定义域是各段定义域的并集.

2. 已知 $f(x)=\dfrac{1}{\lg(3-x)}+\sqrt{49-x^2}$，求 $f(x)$ 的定义域及 $f[f(-7)]$.

解 要使函数 $f(x)$ 有定义域，x 必须使得 $\dfrac{1}{\lg(3-x)}$ 与 $\sqrt{49-x^2}$ 都有意义，所以 x 必须满足不等式组

$$\begin{cases} 3-x>0, \\ 3-x\neq 1, \\ 49-x^2\geqslant 0. \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} x<3, \\ x\neq 2, \\ -7\leqslant x\leqslant 7. \end{cases} \quad \text{解之得} \begin{cases} -7\leqslant x<2, \\ 2<x<3. \end{cases}$$

于是，所求函数的定义域为 $D=[-7,2)\cup(2,3)$.

因为 $f(-7)=\dfrac{1}{\lg 10}=1$，所以 $f[f(-7)]=f(1)=\dfrac{1}{\lg 2}+4\sqrt{3}$.

3. 设函数 $f(x)$ 的定义域是开区间 $(0,1)$，求函数 $f(\lg x)$ 的定义域.

解 设 $u=\lg x$，则函数 $f(\lg x)$ 可看作是由 $f(u)$ 和 $u=\lg x$ 复合而成的复合函数. 由于 $f(u)$ 与 $f(x)$ 仅是自变量所选用的字母不同，所以它们是同一个函数. 于是由已知条件知 $0<u<1$，即 $0<\lg x<1$. 解此不等式得 $1<x<10$.

4. 设 $f(x)=\begin{cases} e^x, & \text{当 } 0<x\leqslant 1; \\ 1+x, & \text{当 } 1<x\leqslant 2. \end{cases}$ 求 $f(x+1)$.

解 设 $u=x+1$，则 $f(x+1)$ 可看作是由函数 $f(u)$ 和 $u=x+1$ 复合而成的复合函数. 而

$$f(u)=\begin{cases}e^u, & 0<u\leqslant 1;\\ 1+u, & 1<u\leqslant 2.\end{cases}$$

将 $u=x+1$ 代入，得

$$f(x+1)=\begin{cases}e^{x+1}, & 0<x+1\leqslant 1;\\ 2+x, & 1<x+1\leqslant 2.\end{cases}$$

即
$$f(x+1)=\begin{cases}e^{x+1}, & -1<x\leqslant 0;\\ 2+x, & 0<x\leqslant 1.\end{cases}$$

5. 设 $f(x+5)=x^2+2x-7$，求 $f(x)$.

解 方法一 设 $u=x+5$，则 $x=u-5$，代入已知关系式得

$$f(u)=(u-5)^2+2(u-5)-7=u^2-8u+8.$$

因为 $f(u)$ 与 $f(x)$ 是同一个函数，所以把 u 换成 x，即得

$$f(x)=x^2-8x+8.$$

方法二 通过配方，把已知关系式写为

$$f(x+5)=(x+5)^2-8(x+5)+8.$$

令 $u=x+5$，代入得

$$f(u)=u^2-8u+8,$$

即 $f(x)=x^2-8x+8.$

6. 证明函数 $y=\sqrt{x}$ 在它的定义域内是单调增加的.

证 函数 $y=\sqrt{x}$ 的定义域是区间 $[0,+\infty)$. 设 x_1,x_2 是区间 $[0,+\infty)$ 的任意两点，且 $x_1<x_2$.

因为 $0\leqslant x_1<x_2$，又 $f(x_2)=\sqrt{x_2}>0$，所以

$$\frac{f(x_1)}{f(x_2)}=\frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}}=\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}<1.$$

即有 $f(x_1)<f(x_2)$.

所以函数 $y=\sqrt{x}$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调增加的.

7. 求下列函数的反函数，并指出它的定义域和值域.