# 運筹報导

（二）

中国科学院数学研究所
运筹学研究室主编

1978. 4.

# 前言

运筹学是一门应用性较强的学科。它所研究的课题，无论是应用性的，抑或是理论性的，都具有明显的实际背景。研究的成果，有些可直接有助于改进生产过程或生产的计划、组织和管理，有些则逐步地接近实际，为将来的实际应用奠定基础。由于运筹学与生产实践有着广泛的、密切的联系，所以虽然它与别的学科比较，历史较短，但却发展迅速：它的一些分支有其自身的国际组织和专门杂志（如数学规划、应用概率、系统分析等），一些新的分支正在迅速成长（如组合数学、模糊集合等）。在我国，运筹学近年来越来越受到人们的注意，研究工作正逐渐开展。为了便于交流研究成果，为了将运筹学的一些新方法和动态给以迅速推广和介绍，特创办不定期的运筹报导。

一、本报着重选登：1）理论方面带有创造性的研究成果，2）实际任务中带有较普遍性（即具有一定参考意义的）工作总结；3）系统地介绍新方法的文章；4）国内外有关运筹学活动的情况介绍；5）书评。

二、由于我们对编辑工作还缺乏经验，本刊目前只刊登本室同志所写的文章，或少另外单位通过预约撰写的文章，作者有权将其文章同时投交别的杂志。

三、欢迎读者对本报提出批评和意见。

# 运筹学报导第二期目录

# 多目标最优化问题有效点的性质及其标量化

陈光亚（中国科学院数学研究所）

## 一、引言

多目标最优化问题，也即向量极值问题有着广泛的实际背景。现在经济，控制论，系统理论，决策论，微分对策中大量涉及到了。问题的抽象提法是：在考虑有限维空间时，给出一向量函数 $f(x)=(f_1(x),\cdots,f_n(x))$，是 $R^m$ 到 $R^n$ 里的映象。在 $R^m$ 中有一约束集合 $A\subset R^m$。问题是在 $A$ 中找出一点 $x_0$，使得 $f(x_0)$ 最使我们满足。我们也可以考虑无穷维空间，$X$，$Y$ 是适当的无穷维空间，$f$ 是 $X$ 到 $Y$ 的映象。约束集合 $A\subset X$，问题同样是在 $A$ 中找一点 $x_0$，使其象点 $f(x_0)$ 最能使得我们满足。"满足"一词可以根据要求定出标准。一般处理方法是用适当的方式在 $R^n$ 或者 $Y$ 中的元素间决定一个次序关系。如用 $C$ 记对于 $A$ 的所有映象点集合，则要求在 $C$ 中定出关于次序关系的最大元素。有限维情况最自然的次序关系就是座标次序了。

最近，J. G. Lin [1] 在有限维空间中考虑了座标序的最大向量问题。得出了最大向量的一些有趣的性质及求解的充分必要条件，在 [2] 中 J. Borwein 考虑了局部凸拓朴向量空间的真有效点（proper efficient points）的求解问题，把 [3] 中的结果从有限维空间推广到无穷维空间及一般由闭凸锥确定的偏序的情况。本文考虑一般的模向量空间，在它上面用

闭凸锥确定了偏序、考察了有效点的特征，将〔1〕的一些结果作了推广，并得出了有效点另外一些性质。文中还对〔2〕中一个未加证明的论断在去掉凹凸性的一般情况下给出了证明，本文定理1　2、5是〔1〕中定理3.1，3.2，4.1，4.2的推广、定理3是对〔2〕中一个论断的证明，定理4从几何角度显示了真有效点和有效点的区别，同时明显地将〔1〕中基本定理5.1作为其特殊情况。

最后，作者应该感谢顾基发同志在本文完成的过程中所给与的帮助。

## 二、有效点的性质

$Y$是实模向量空间。以零为顶点的闭凸锥$S\subset Y$。我们知道（参看〔4〕），凸锥$S$在$Y$上确定了一个偏序$\geqq_S$。如果更设$S\cap(-S)=\{0\}$，则此偏序$\geqq_S$还具有反对称性。偏序$\geqq_S$是如下定义的：

$y_1, y_2\in Y$，$y_1\geqq_S y_2 \Longleftrightarrow y_1-y_2\in S$，并满足

(i)反身性：$y\in Y\Rightarrow y\geqq_S y$。

(ii)传递性：$y_1, y_2, y_3\in Y$，$y_1\geqq_S y_2$，$y_2\geqq_S y_3\Rightarrow$

$y_1\geqq_S y_3$。

(iii)反对称性：$y_1, y_2\in Y$，$y_1\geqq_S y_2$，$y_2\geqq y_1\Rightarrow y_1=y_2$。

由偏序$\geqq_S$的定义知$S$是$Y$中所有依此偏序大于零的元素集合即

$$S=\{y\mid y\geqq_S 0,\ y\in Y\} \tag{2.1}$$

定义2.1. $Y$是任意实线向量空间，$C\subset Y$是$Y$的任一子集，$y_0$称为$C$的有效点，如果$y_0\in C$，对于任意的$y\in Y$
$y\geqq y_0$，且$y\neq y_0\Rightarrow y\bar{\in} C$。

我们用$\underset{y\in C}{Max}\ y$ 记$C$的所有有效点集合。

我们的向量极值问题（VMP）（参考(2)）是$X$，$Y$是实线向量空间，$f$是$X$到$Y$里的映象。$A\subset X$，要求：

$$Max\, f(x),\quad x\in A \qquad (VMP) \qquad (2.2)$$

如果令$C=f(A)$，$A$的映象点集合，显然问题（2.2）等价于求$\underset{y\in C}{Max}\ y$。

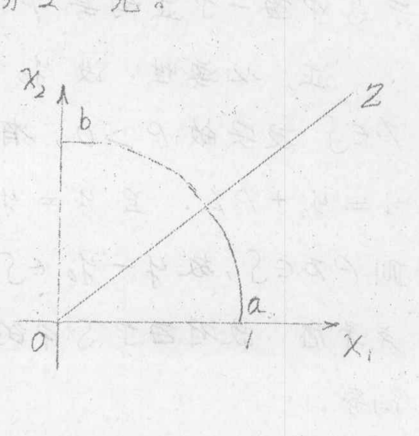
例1：设$X=Y=R^2$，$S=\{x\,|\,x=(x_1,x_2), x_2\geq 0, x_1\geq x_2\}$

$$A=\{(x_1,x_2)\,|\,x_1^2+x_2^2\leq 1,\ x_1\geq 0,\ x_2\geq 0\}$$

$f=I$不变映象。

则$f(A)$是图1第一相限的四分之一元。

$S$是$Z0$，$X_1 0$两射线所夹的闭凸锥，$f(A)$的有效点集合是$\widehat{ab}$弧。




下面探讨有效点的特性。

定理2.1（接触点定理）。

$Y$是任意实线向量空间。$S\subset Y$是闭凸锥（2.1），确定$Y$上的偏序$\geqq$，$C\subset Y$是$Y$的任意子集。

$y_0$是C的有效点 $\Longleftrightarrow C\cap(S+y_0)=\{y_0\}$．

证：必要性，设$y_0$是C的有效点，如果存在$y_1\in Y$，$y_1\neq y_0$，且$y_1\in C\cap(S+y_0)$．则存在$s\neq 0$，$s\in S$，有$y_1=s+y_0$、$y_1-y_0=s\in S$、即$y_1\underset{S}{\geqslant} y_0$．$y_1\neq y_0$．且$y_1\in C$．这与$y_0$是C的有效点矛盾．又因$0\in S$．故$y_0\in S+y_0$．且$y_0\in C$，所以$C\cap(S+y_0)=\{y_0\}$．

充分性．设$C\cap(S+y_0)=\{y_0\}$．则不存在$s\neq 0$，$s\in S$，使得$y_0+s\in C$．即任$y\in C$，$y\neq y_0$，不可能有$y\underset{S}{\geqslant} y_0$．由有效点定义，则$y_0$是C的有效点。

向量$p\in Y$称为正向量，如果$p\in S$，$p\neq 0$．

向量$y_0\in C$，称为C的$p$—线性上界向量．如果不存在正实数$\rho>0$，使得$y_0+\rho p\in C$．

定理2.2 向量$y_0\in C$是C的有效点，充分必要条件是对于S中每一个正向量$p$，$y_0$是$p$—线性上界向量。

证，必要性．设$y_0$是C的有效点．如果存在一正向量$p\in S$及实数$\rho>0$，有$y_0+\rho p\in C$．则存在$y\in C$使得$y=y_0+\rho p$．且$y\neq y_0$．这样$y-y_0=\rho p$．因$p\in S$．则$\rho p\in S$，故$y-y_0\in S$．即$y\underset{S}{\geqslant} y_0$，这与$y_0$是C的有效点矛盾．故对每个S中的正向量$p$，$y_0$都是$p$—线性上界向量。

充分性：设对于每一个正向量$p$．$y_0$是$p$—线性上界

向另。如果存在 $y\in C$ $y\geqq y_0$，$y\neq y_0$，则 $y-y_0\in S$，故存在 $S\neq 0$，$S\in S$，即 $S$ 为正向另，使得 $y-y_0=S$，即 $y=y_0+S\in C$。这说明 $y_0$ 不是 $S$—线性上界向另，与前题矛盾，这说明这样的 $y\in C$，$y\geqq y_0$，$y\neq y_0$ 不存在，故 $y_0$ 是 $C$ 的有效点。

现在考虑〔2〕中提出的向另极大化向另（2-1），在〔2〕中提出了 VMP 问题的等价关系：

$$\max_{x\in A} f(x)=\max_{y\in f(x)} y=\max_{y\in f(A)-S} y$$

〔2〕说明上面最后一个等式当 $f$ 关于序（$\geqq$）是凹的，$A$ 是凸的时，象空间 $Y$ 上的最优化问题仍是一个凹问题，但未作证明。下面，我们应用定理1，在对 $f$，$A$ 没有附加限制的情况下证明其等价关系是成立的。第一个等式显然直接等价，现在考虑第二等式，为叙述方便，直接将 $\max\limits_{y\in f(A)} y$ 看成 $f(A)$ 所有有效点集合，$\operatorname{Max}\limits_{y\in f(A)-S} y$ 看成 $f(A)-S$ 所有有效点集合。

定理3，$X$，$Y$ 为任意实模向另空间，$f$ 是 $X$ 到 $Y$ 的映象，$S\subset Y$ 是 $Y$ 上界定偏序 $\geqq$ 的闭凸锥（2.1），$A\subset X$ 为 $X$ 的任意子集，则

$$\max_{y\in f(A)} y=\max_{y\in f(A)-S} y \tag{2.3}$$

证 设 $y_0\in\operatorname{Max}\limits_{y\in f(A)} y$

如果 $y_1\in(f(A)-S)\cap(S+y_0)$．则存在 $y\in f(A)$，$S_1,S_2\in S$，有 $y_1=y-S_1$，$y_1=S_2+y_0$，则 $y-S_1=S_2+y_0$；$y=y_0+S_1+S_2$．由于 $y_0$ 是 $f(A)$ 的有效点，且 $y\in f(A)$，$S_1+S_2\in S$．故必然有 $S_1+S_2=0$．但 $S\cap(-S)=\{0\}$．故必然有 $S_1=S_2=0$，即得 $y_1=y_0$，故 $(f(A)-S)\cap(S+y_0)=\{y_0\}$。由定理1知 $y_0$ 是 $(f(A)-S)$ 的有效点．即 $\max\limits_{y\in f(A)} y\subset\max\limits_{y\in f(A)-S} y$．

现证仅包含关系 $\max\limits_{y\in f(A)-S} y\subset\max\limits_{y\in f(A)} y$

设 $y_0\in\mathrm{Max}\limits_{y\in f(A)-S} y$，可证得 $y_0\in f(A)$．因如果 $y_0\bar{\in} f(A)$．由 $y_0\in f(A)-S$．则存在 $y\in f(A)$，$S\in S$，$S\neq0$．使 $y_0=y-S$，$y=y_0+S$，也即 $y\geqq y_0$．而且 $y\in f(A)\subset f(A)-S$．且 $y\neq y_0$．由有效点的定义，知 $y_0$ 不是 $f(A)-S$ 的有效点，与假设矛盾．故 $y_0\in f(A)$．又因 $y_0$ 是 $f(A)-S$ 的有效点．由定义知凡是 $y\in Y$，$y\neq y_0$ 且 $y\geqq y_0$，都有 $y\bar{\in} f(A)-S$．当然更加有 $y\bar{\in} f(A)$．因此由于 $f(A)\subset f(A)-S$．下面的叙述更加成立：$y_0\in f(A)$，凡是 $y\in Y$，$y\neq y_0$ $y\geqq y_0$ 都有 $y\bar{\in} f(A)$．这就是 $y_0$ 是 $f(A)$ 的有效点的定义，故 $y_0\in\max\limits_{y\in f(A)} y$

即得 $\mathrm{Max}\limits_{y\in f(A)-S} y\subset\max\limits_{y\in f(A)} y$。

定义（参看〔2〕）．$Y$是 Banach 空间，$C\subset Y$，$y_0\in C$．我们说向量$y$在$y_0$点切于$C$，如果存在序列$\{y_k\}\subset C$ $y_k\to y_0$，并存在非负的实数序列$\{t_k\}$ $k\to\infty$有

$$y=\lim_{k\to\infty} t_k(y_k-y_0).$$

$T(C,y_0)$是对于$y_0$所有这样与$C$相切的向量组成的集合叫$C$在$y_0$点切锥，显然$T(C,y_0)$是以零为顶点的非空闭锥。

在〔2〕中定义$y_0$是VMP的真有效点是指$y_0$是$f(A)$的有效点，且满足

$$T(f(A)-S,y_0)\cap S=\{0\}.$$

〔2〕中证明了如果$y_0$是〔3〕中在有限维空间中定义的真有限点，则必然是〔2〕中所定义下的真有效点。下面我们用切锥的概念也说明有效点的特征。从这里可以看出有效点与真可效点的区别。

定理4．$Y$是实 Banach 空间，$C\subset Y$，$S\subset Y$是在$Y$上导出偏序$\geqq$的闭凸锥（2.1）。若$y_0\in C$是$C$的有效点，则有

$$T(C,y_0)\cap \mathrm{Int}\,S=\phi. \qquad (2.4)$$

$\mathrm{Int}\,S$是$S$的内点。

证：设$T(C,y_0)\cap \mathrm{Int}\,S=y$，因$0\bar{\in}\,\mathrm{Int}\,S$，故$y\neq 0$．

由于 $y\in T(C,y_0)$，由切锥的定义知存在一序列 $\{y_k\}\subset C$，$y_k\to y_0$、及非负实数序列 $\{t_k\}$ 使得 $t_k(y_k-y_0)\longrightarrow y$，又因 $y\in \mathrm{Int}\,S$，则存在 $y$ 的一个邻域 $N(y,\varepsilon)\subset \mathrm{Int}\,S\subset S$．由于 $y$ 是序列 $\{t_k(y_k-y_0)\}$ 的极限点，故存在一正整数 $K$，使得当 $k\geqq K$，有 $t_k(y_k-y_0)\in N(y,\varepsilon)$．现在固定 $k_0\geqq K$，有 $t_{k_0}(y_{k_0}-y_0)\in \mathrm{Int}\,S$．于是存在 $s\in \mathrm{Int}\,S$，$s\neq 0$，使得 $t_{k_0}(y_{k_0}-y_0)=s$．由于总可选择 $t_{k_0}\neq 0$，$y_{k_0}\neq y_0$（因为如果找不出这样 $t_{k_0}\neq 0$，$y_{k_0}\neq y_0$，则切向量 $y=0$，这是不可能的因 $0\bar{\in}\,\mathrm{Int}\,S$）．故有 $y_{k_0}-y_0=\dfrac{s}{t_{k_0}}\in S$，即 $y_{k_0}\geqq y_0$，且 $y_{k_0}\neq y_0$，$y_{k_0}\in C$．由定义 $y_0$ 就不是 $C$ 的有效点，与假设矛盾，故有

$$T(C,y_0)\cap \mathrm{Int}\,S=\phi。$$

由定理3知道，若 $y_0$ 是 $f(A)$ 的有效点，也必是 $f(A)-S$ 的有效点。可以由定理4 $T(f(A)-S,y_0)\cap \mathrm{Int}\,S=\phi$．而 $f(A)$ 的真有效点 $y_0$ 是用 $T(f(A)-S,y_0)\cap S=\{0\}$ 来定义的。故通过定理4，就显示了有效点与真有效点的几何特征：凡是有效点，其切锥与序锥 $S$ 只能交于边界，若它们仅仅相交于 $\{0\}$，则此有效点为真有效点。

同时可以看出，定理4显然把〔1〕中基本定理作为特殊情况。

三、标量化

多目标最优化问题的指标向量标量化问题是在实际应用中一

个很重要的问题。它可以将一个多目标问题化为一个通常的非线性规划问题来求解。下面讨论标量化问题。

定义：$Y$是实向量空间，$C\subset Y$，$p$是一非零向量。$C$叫$p$—方向凸集，如果对任意的$y_1, y_2\in C$，及每个$\lambda$，$0\leq\lambda\leq 1$，均存在一个非负实数$\beta\geq 0$，有$\lambda y_1+(1-\lambda)y_2+\beta p\in C$。

一个凸集是任意非零向量$p$—方向凸的，只要取$\beta=0$即可。

设$p\neq 0$，令

$$C(p)=\{y-\beta p \mid y\in C, \beta\geq 0\} \tag{3.1}$$

引理1. 设$C$为$p$—方向凸集，$p\neq 0$，则$C(p)$为凸集。

证：设$y_1-\beta_1 p$，$y_2-\beta_2 p\in C(p)$，$0\leq\lambda\leq 1$

$$\lambda(y_1-\beta_1 p)+(1-\lambda)(y_2-\beta_2 p)=\lambda y_1+(1-\lambda)y_2-(\lambda\beta_1 p+(1-\lambda)\beta_2 p)$$

$$=\lambda y_1+(1-\lambda)y_2+\xi p-(\xi+\lambda\beta_1+(1-\lambda)\beta_2)p$$

因$C$是$p$方向凸的，总存在$\xi\geq 0$使得$\lambda y_1+(1-\lambda)y_2+\xi p\in C$，而且$\xi+\lambda\beta_1+(1-\lambda)\beta_2\geq 0$，故

$$\lambda y_1+(1-\lambda)y_2+\xi p-(\xi+\lambda\beta_1+(1-\lambda)\beta_2)-p\in C(p)$$

定义 $Y$是实Banach空间，$S\subset Y$，为$Y$的任意子集，$S^+$称为$S$的正极锥，如果

$$S^+=\{g\in Y^* \mid g(s)\geq 0, s\in S\} \tag{3.2}$$

$Y^*$ 是 $Y$ 的拓扑共轭空间，故 $S^+$ 是在 $S$ 上取非负值的所有连续线性泛函的集合。

定理5　$Y$ 是实 Banach 空间，$C\subset Y$，$S\subset Y$ 是在 $Y$ 上确定偏序 $\geqq_S$ 的闭凸锥．(2.1)．$y_0\in C$

(1) 如果存在一连续线性泛函 $g\in S^+$，且 $g(s)>0$ $\forall s\in S\setminus\{0\}$ 使得 $g(y_0)=\max\limits_{y\in C} g(y)$，则 $y_0$ 是 $C$ 的有效点。

(2) 若更设对某一固定向号 $p\neq 0$．$p\in S$，$C$ 是 $p$—方向凸集，並设 $S$ 有非空内 P．若 $y_0$ 是 $C$ 的有效点，则存在 $Y$ 上的连续线性泛函 $g$，有 $g(s)\geqslant 0$，$\forall s\in \mathrm{Int}S$．使得 $g(y_0)=\max\limits_{y\in C} g(y)$．

证 (1) 如果 $y_0$ 不是 $C$ 的有效点，则 $C$ 中总存在 $y_1\in C$，$y_1\neq y_0$，有 $y_1\geqq_S y_0$，或者 $y_1-y_0\in S$，故存在 $s\in S$，$s\neq 0$ 有 $y_1=y_0+s$，则 $g(y_1)=g(y_0)+g(s)$ 因 $g(s)>0$，$\forall s\in S\setminus\{0\}$．有 $g(y_1)>g(y_0)$ 与 $g(y_0)=\max\limits_{y\in C} g(y)$ 矛盾，故 $y_0$ 是 $C$ 的有效点。

(2) 设 $y_0$ 为 $C$ 的有效点，由定理3知 $y_0$ 也是 $C-S$ 的有效点．再由定理1及 $0\bar{\in}\mathrm{Int}S$，$y_0\bar{\in}(\mathrm{Int}S+y_0)$。则 $(C-S)\cap(\mathrm{Int}S+y_0)=\Phi$，由于 $C(p)=\{y-\beta p\mid y\in C,\ \beta\geq 0\}$．如果 $p\in S$，故 $C(p)\subset C-S$．所以

$$C(p) \cap (\mathrm{Int}\, S + y_0) = \phi,$$

由引理1，$C(p)$ 是凸集，显然 $\mathrm{Int}\, S + y_0$ 也是凸集，由凸集分离定理（参看〔4〕），存在 $Y$ 上的连续非零线性泛函 $g$ 及实数 $\xi$ 使得

$$g(U) \geqq \xi, \quad \text{当 } U \in \mathrm{Int}\, S + y_0$$

$$g(u) \leqq \xi, \quad \text{当 } u \in C(p)$$

由于 $U = S + y_0$，$s \in \mathrm{Int}\, S$，$y_0 \in C \subset C(p)$ 则

$$\xi \leqq g(u) = g(s) + g(y_0) \leqq g(S) + \xi.$$

故 $g(s) \geqq 0 \quad s \in \mathrm{Int}\, S$.

现在如果存在正实数 $a > 0$，有 $\xi - g(y_0) = a > 0$，则 $g(s) = g(U) - g(y_0) \geqq \xi - g(y_0) = a \quad \forall s \in \mathrm{Int}\, S$。但因为 $S$ 是凸锥，如果 $S_0 \in \mathrm{Int}\, S$，则 $\alpha S_0 \in \mathrm{Int}\, S$，$\forall \alpha > 0$，取 $\alpha < \dfrac{a}{g(S_0)}$，则有 $g(\alpha S_0) = \alpha g(S_0) < a$，这与 $g(s) \geqq a$，$\forall s \in \mathrm{Int}\, S$ 矛盾。故不能假设 $a > 0$，只能有 $a = 0$，则 $\xi - g(y_0) = 0$，即 $g(y_0) = \xi$。因 $g(u) \leqq \xi \ \forall u \in C(p)$，得 $g(u) \leqq g(y_0)$，$\forall u \in C(p)$，更加有 $g(u) \leqq g(y_0) \ \forall u \in C$。故有

$$g(y_0) = \max_{y \in C} g(y).$$

注记：如果 $Y = R_n$，是 $n$ 维欧氏空间，考虑座标序形成的闭凸锥 $S$：

$$S=\{S \mid S=(S_1,\cdots,S_n)^T,\ S_i\geq 0\ \ i=1,2,\cdots n\}.$$

则 $S$ 的正极锥：

$$S^+=\{\eta \mid \eta=(\eta_1,\cdots,\eta_n)^T\ \ \eta_i\geq 0\ i=1,2,\cdots,n\}.$$

我们知道 $n$ 维空间上所有线性泛函组成的空间是 $R^n$ 的代数共轭空间，也是 $n$ 维空间。故 $R_n$ 上每一线性泛函也是 $n$ 维欧氏空间的一个点 $\eta=(\eta_1,\ \eta_n)^T$。所以定理 5 中线性泛函 $g$ 在，$Y=R^n$ 时就是 $g=(\eta_1,\cdots,\eta_n)^T$。而 $g\in S^+$，且 $g(s)>0\ \ s\in S\setminus\{0\}$ 是指 $\eta^T S>0$，即 $\sum_{i=1}^{n}\eta_i S_i>0\ \ \forall s\in S\setminus\{0\}$.

因 $S$ 是凸锥，且其中元素的座标 $S_i\geq 0$，$i=1,2\cdots,n$ 可任意取非负值，则由 $\sum_{i=1}^{n}\eta_i S_i>0\Rightarrow\eta_i>0$，$i=1,2\cdots n$。这样在有限维空间定理 5 就与〔1〕中定理 4.1，定理 4.2 叠合。

利用定理 5 可以证明一个方向凸的集合有效点只能在边界点或孤立点达到。

引理 2、$Y$ 是局部凸拓扑向量空间，在 $Y$ 上任意非零连续线性泛函，在 $0$ 的每一邻域内必可以同时取正值和负值。

证，设 $g$ 是 $Y$ 上任意连续线性泛函，由于 $g\neq 0$ 故必有一点 $y_0\neq 0$，$y_0\in Y$，使 $g(y_0)\neq 0$，令 $g(y_0)=\xi\neq 0$，我们知道，局部凸拓扑向量空间，点的每一邻域都是吸收的（Absorbing）。设 $U(0)$ 为零点的任一邻域，则对任意 $y\in Y$，均存在 $\varepsilon>0$，使得对所有 $0<|\lambda|\leq\varepsilon_0$ 时有 $\lambda y_0\in U(0)$，分

两种情况：

1. $\xi_0>0$，因 $g(\lambda y_0)=\lambda g(y_0)=\lambda\xi_0\begin{cases}>0 & 0<\lambda\leqq\varepsilon_0\\ <0 & -\varepsilon_0\leqq\lambda<0\end{cases}$

2. $\xi_0<0$．因 $g(\lambda y_0)=\lambda g(y_0)=\lambda\xi_0\begin{cases}<0 & 0<\lambda\leqq\varepsilon_0\\ >0 & -\varepsilon_0\leqq\lambda<0\end{cases}$

由 $\lambda y_0\in U(0)$，$0<|\lambda|\leqq\varepsilon_0$，故引理成立。

定理6．$Y$为实Banach空间，$S\subset Y$ 是确定$Y$上偏序$\geqq$的闭凸锥(2.1)，且 $\mathrm{Int}\,S\neq\phi$，设 $p\neq 0$，$p\in S$ $C\subset Y$．$C$是$p$—方向凸集．则

(1) $C$的有效点只能在$C$的边界上或孤立点上达到。

(2) $Y$中开集没有有效点。

证 (1) 设 $y_0\in\mathrm{Int}\,C$，并设 $g$ 为 $Y$ 上任一非零连续线性泛函．因 $y_0$ 为$C$的内点，则存在 $\varepsilon>0$ 及 $y_0$ 的邻域 $N(y_0,\varepsilon)\subset\mathrm{Int}\,S$．并且 $N(y_0,\varepsilon)$ 每一元素均可表成形式 $y=y_0+\bar{y}$，$\|\bar{y}\|\leqq\varepsilon$，即 $\bar{y}\in N(0,\varepsilon)$，由引理2在 $N(0,\varepsilon)$ 中总存在 $\bar{y}_1$，使 $g(\bar{y}_1)>0$，且 $y_0+\bar{y}_1\in N(y_0,\varepsilon)$，但是

$g(y_0+\bar{y}_1)=g(y_0)+g(\bar{y}_1)>g(y_0)$，因此 只要 $y_0\in\mathrm{Int}\,C$，就找不出一个$Y$上非零连续线性泛函 $g$，使 $g(y_0)=\max\limits_{y\in C}g(y)$，则$y_0$ 不能是$C$的有效点，故$C$的有效点只能在$C$的边界点或孤立点达到。

由(1)直接得出(2)。

# 参考文献


(1) J. G. Lin

Maximal vector and Mnlti-Objective Optimization. Jouznal of Optimization Theosy and Application Vol 18. NO1 (1976)

(2) J. Borwein

Pzoper efficient points for maximizatisns with respect to Cones

SIAM Journal On Control and Optimization Vol 15 NO1 (1977)

(3) J.L. Kelley . I. Namioka

Linear Topological Spaces

D. Von Wostrand Company, InC. Princeton, New Jersey (1963).

(4) A. Wilansky

Fuctional Analysis

Blaisdell pubeisking Company New York (1964)