

中央电视台远程教育信息网 景山远程教育网

全国联网教材

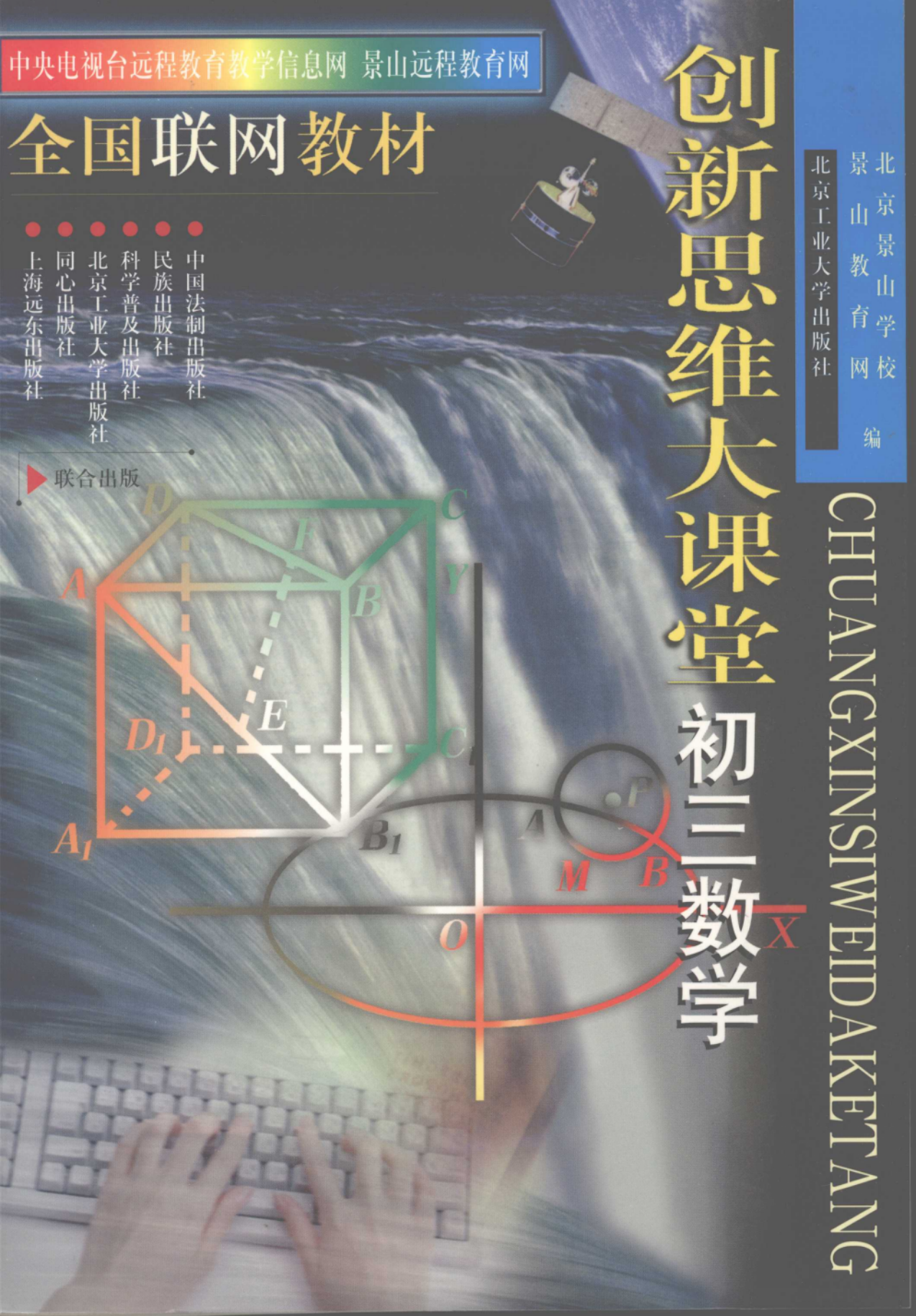
● 中国法制出版社
● 民族出版社
● 科学普及出版社
● 北京工业大学出版社
● 同心出版社
● 上海远东出版社

联合出版

创新思维大课堂 初二数学

北京景山学校
景山教育网
北京工业大学出版社 编

CHUANGXINSIWEIDAKETANG



初一: 语文 数学 英语 政治

初二: 语文 数学 英语 物理
政治

初三: 语文 数学 英语 物理
化学 政治

高一: 语文 数学 英语 物理
化学 政治
数学 (试验教材)
物理 (试验教材)
化学 (试验教材)

高二: 语文 数学 英语 物理
化学 政治

高三: 语文 英语 物理 化学
政治

● 本书以创新为主线, 引进新思想、新方法, 并通过日常教学培养学生的创新思维、创新能力, 调动学生的潜能, 以全面落实素质教育的要求。

● 本书各单元设有“教法建议”“学海导航”“智能显示”“同步题库”等栏目, 并在各栏目下设有各自的子栏目。

▲ “教法建议”栏目下设有: “抛砖引玉”“指点迷津”, 以导引教法, 透视疑难。

▲ “学海导航”栏目下设有: “学法指要”“思维体操”, 以启迪学法, 开启心智。

▲ “智能显示”栏目下设有: “动脑动手”“创新园地”, 以建立信心, 扩展思路。

◆责任编辑: 吕小红 刘津瑜 ◆封面设计: 刘家峰

DIANNAOZHIZUO : DIANXIANMIANGONGZUOSHI



ISBN 7-5639-0918-4/G · 501

定价: 22.00 元

中央电视台远程教育教学信息网、景山远程教育网
全国联网教材

创新思维大课堂

初三数学

北京景山学校 编
景山教育网

陈新昌 赵炳启 李 平 编写

北京工业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

创新思维大课堂. 初三数学/北京景山学校, 景山教育网
编. —北京: 北京工业大学出版社, 2000. 8

ISBN 7-5639-0918-4

I. 创… II. 北… III. 数学课-初中-教学参考资料
IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 37294 号

创新思维大课堂

初三数学

北京景山学校 编
景山教育网

*

北京工业大学出版社出版发行

各地新华书店经销

北京密云红光印刷厂印刷

*

2000 年 8 月第 1 版 2000 年 8 月第 1 次印刷

787mm×1092mm 16 开本 19.25 印张 474 千字

印数: 1~10000 册

ISBN7-5639-0918-4/G·501

定价: 22.00 元

《创新思维大课堂》丛书编委会

顾	问	顾明远	吴明育
编委会主任		范禄燕	
副	主	任	韩建群
编	委	(按姓氏笔画)	
		齐 颖	全永范 米裕民
		祝立明	颜 实 瞿惠民
策	划	郝 勇	乐嘉文

前言

北京景山远程教育网络技术有限公司系泰德集团和北京景山学校于1993年合作创办的高新技术企业,专事教学、教法、教材、教案等教学资源 and 教学实践的计算机与网络技术的研究、开发与应用。1997年始率先建立“景山远程教育网站”,开创远程教育事业。

为推动中国教育改革及远程教育事业,北京景山远程教育网络技术有限公司结合景山远程教育网的教学资源,组织全国众多名校名师,历经年余编写出本套丛书——全国联网教材《创新思维大课堂》。

一、适应范围

《创新思维大课堂》丛书适应21世纪教学改革形势,以最新教材为依据,含有初、高中语文、数学、英语、物理、化学、政治,分年级分科按单元编写,并含有两省一市高中一年级的数学、物理、化学试验教材内容,可供学生学习、教师备课、家长辅导参考。

二、主旨构思

本丛书以创新思维为主线,引进新思想、新方法,通过日常教学活动促进学生动脑动手的实践能力,培养学生的创新思维、创新能力,调动学生的潜能。

三、栏目设计

各单元设有“教法建议”、“学海导航”、“智能显示”、“同步题库”四大栏目,并在各栏目下设有各自共同的子栏目(依据各科特点略有调整)。

在“教法建议”栏目下设有“抛砖引玉”、“指点迷津”,以导引教法,透视疑难;在“学海导航”栏目下设有“学法指要”、“思维体操”,以启迪学法,开启心智;在“智能显示”栏目下设有“动手动脑”、“创新园地”,以建立信心,扩展思路。通过如上栏目,启发学生探索、实践,提高自主学习、独立思考的能力。

四、名师撰稿

网上资源撰稿人均是来自北京、天津、重庆、辽宁、河北、河南、安徽、福

建、四川、浙江等地区的名教师，它们拥有贯彻素质教育的理论和方法，并有多年的教学经验和创新意识。

五、联合出版

本丛书共计 35 册，由六家出版社联合出版发行。他们是中国法制出版社、民族出版社、科学普及出版社、北京工业大学出版社、同心出版社和上海远东出版社。

由于汇稿时间仓促，疏漏之处在所难免，欢迎指正。今后将不断修改并补充新教材新内容。

编 者

2000 年 7 月

目 录

代 数 部 分

第十二章 一元二次方程	1
第一单元 一元二次方程解法及应用	1
一、教法建议	1
二、学海导航	2
三、智能显示	11
四、同步题库(一)	12
五、同步题库(二)	16
第二单元 可化为一元二次方程的分式方程和无理方程	36
一、教法建议	36
二、学海导航	37
三、智能显示	44
四、同步题库	46
第三单元 二元二次方程组	58
一、教法建议	58
二、学海导航	59
三、智能显示	65
四、同步题库	66
第十三章 函数及其图象	79
第一单元 直角坐标系、函数及图象	79
一、教法建议	79
二、学海导航	80
三、智能显示	86
四、同步题库	88
第二单元 一次函数	98
一、教法建议	98
二、学海导航	99
三、智能显示	103
四、同步题库	104
第三单元 二次函数	115
一、教法建议	115
二、学海导航	116
三、智能显示	122
四、同步题库	123
第四单元 反比例函数	141

一、教法建议	141
二、学海导航	141
三、智能显示	146
四、同步题库	147
第十四章 统计初步	156
一、教法建议	156
二、学海导航	157
三、智能显示	161
四、同步题库	163

几 何 部 分

第六章 解直角三角形	171
第一单元 锐角三角函数	171
一、教法建议	171
二、学海导航	172
三、智能显示	179
四、同步题库	180
第二单元 解直角三角形	189
一、教法建议	189
二、学海导航	190
三、智能显示	196
四、同步题库	197
第七章 圆	208
第一单元 圆的有关性质	208
一、教法建议	208
二、学海导航	209
三、智能显示	216
四、同步题库	217
第二单元 直线和圆的位置关系	229
一、教法建议	229
二、学海导航	230
三、智能显示	237
四、同步题库	238
第三单元 圆和圆的位置关系	253
一、教法建议	253
二、学海导航	254
三、智能显示	262
四、同步题库	263
第四单元 正多边形的有关计算	283

一、教法建议	283
二、学海导航	284
三、智能显示	289
四、同步题库	291

代数部分

第十二章 一元二次方程

第一单元 一元二次方程解法及应用

一、教法建议

抛砖引玉

本单元向同学们讲述了一元二次方程的概念、解法、根的判别式、根与系数关系,以及一元二次方程的应用.我们在教学中,应引导学生从实际生活中遇到的具体问题入手(如本章引言中提出的一个实际问题及本单元开始提出的剪铁片问题),自然地过渡到所学新内容——一元二次方程,使学生感到熟悉、自然、亲切,激发他们解决实际问题的兴趣,使他们容易接受新知识、掌握新知识.在具体教学中,结合具体实例,老师适时点拨,使教学从一个高潮推向另一个高潮,知识不断深化,学生加深记忆,强化概念,收到较好的教学效果.

指点迷津

一元二次方程的概念是从实际生活中引入的,对这一概念必须有明确的了解,才能为下一步学习一元二次方程的解法、应用求根公式铺平道路.开平方法、配方法、求根公式法、因式分解法是解一元二次方程的常用方法,如何因题而异,正确选用不同方法求解,要根据一元二次方程的特点,例如 $(x-a)^2=b(b\geq 0)$ 采用开平方法为宜,又如 $x^2+x-6=0$ 采用因式分解法比较方便.通常说,只要把一元二次方程整理成标准形式,都可利用求根公式求解.求根公式是解一元二次方程的“万能公式”,因此对求根式必须理解、熟记,才能更好地应用.

配方法是解一元二次方程的方法之一,从具体求解过程中可发现,用它解一元二次方程并不简便,但是,配方法应用广泛,又涉及面广.因而,对这一重要的数学思维方法——配方法,一定要熟练掌握,对于如何配方,这一过程也要知其所以然.对于研究根与系数关系[如 $x_1^2+x_2^2$

$=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-2x_1x_2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]$, 导出求根公式等功不可没, 在以后的继续学习中, 还会经常用到它, 所以对配方法的学习要引起足够的重视, 并要强化.

一元二次方程的判别式是研究一元二次方程根的情况的, 对其理解、掌握是研究一元二次方程根的情况的关键, 在学习中要进一步加强, 强化实例训练, 突出分类思维训练, 为今后进一步学习解析几何等知识打下基础.

精通的目的全在应用. 一元二次方程的应用, 涉及工业、农业、军事、建筑、体育等诸方面, 将这些实际问题转化为数学问题, 再列出一元二次方程进行解决. 列方程, 关键在于找“相等”关系, 只要弄清题意, 找出“相等”关系, 这一类问题将迎刃而解.

二、学习指导

思维基础

基础知识、基本技能是提高数学素养的关键, 务必扎实. 现提供数例练习, 以固“双基”之本.

1. 只含有____个未知数, 并且未知数的最高次数是____的整式方程叫做一元二次方程, 它的一般形式是_____.

2. 一元二次方程的二次项系数 a 是____实数.

3. 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0 (a \neq 0, b^2-4ac \geq 0)$ 的两个根 $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a}, x_2 =$ _____.

4. 一元二次方程的解法有____、____、____、____等, 简捷求解的关键是观察方程的特征, 选用最佳方法.

5. 应用配方法解一元二次方程 $ax^2+bx+c=0 (b^2-4ac \geq 0)$ 时, 第一步是把方程的常数项移到等号的右边, 得 $ax^2+bx=-c$; 第二步是把方程两边同除以 a , 得 $x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$; 紧接着配方得_____.

6. 对于实系数的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0 (a \neq 0), \Delta=b^2-4ac$ 称为此方程根的判别式, 它有如下性质:

(1) $\Delta > 0 \Leftrightarrow$ 二次方程有两个____实数根;

(2) $\Delta = 0 \Leftrightarrow$ 二次方程有两个____实数根;

(3) $\Delta < 0 \Leftrightarrow$ 二次方程____实数根.

这些性质在解题中主要的应用如下:

(1) 不解方程判断____的情况;

(2) 求方程中的参数值、范围或相互关系;

(3) 判定二次三项式在实数范围内____解因式.

7. (1) 若一元二次方程 $ax^2+bx+c=0 (a \neq 0)$ 的两个根为 x_1, x_2 , 则 $x_1+x_2=$ ____, $x_1 \cdot x_2=$ _____.

(2) 若 x_1, x_2 是方程 $x^2+px+q=0$ 的两根, 则 $p=$ ____, $q=$ ____, 以实数 x_1, x_2 为根的一

元二次方程(二次项系数为1)是_____.

8. 根与系数关系的主要应用是:

- (1)求作_____方程;
- (2)求含有根有关代数式的值;
- (3)确定字母系数_____以及字母系数之间关系;
- (4)验根,求根或确定_____符号;
- (5)解特殊方程式_____.

9. 注意把根与系数关系和根的判别式配合使用.

学法指要

例1 解方程: $x^2-3x+2=0$.

【思考】1. 解一元二次方程常用方法有哪几种? 2. 因式分解法可用来解一元二次方程.

【思路分析1】此方程左边是二次三项式,它使我们联想到二次三项式的因式分解——十字相乘法,可在这条道路上探索,找到解题思路.

解:

$$\begin{array}{r} 1 \quad \quad \quad -1 \\ \quad \quad \quad \nearrow \quad \searrow \\ 1 \quad \quad \quad -2 \\ \hline -1 \quad \quad -2 = -3 \end{array}$$

$\therefore$ 原方程可化为

$$(x-1)(x-2)=0$$

$$\therefore x_1=1, x_2=2.$$

【思考】1. 本例系数有何特征? 2. 可从本例发现 $a+b+c=0$,你可直接说出答案. 为什么?

【思路分析2】此方程是一元二次方程的标准形式,因之知 $a=1, b=-3, c=2$,由此可知应用求根公式是信手拈来之易,请读者解之.

观察本例,可发现它的结构符合二次三项式及一元二次方程的标准形式,使我们把陌生的一元二次方程与十字相乘法、求根公式这些熟知的问题牵连在一起,化陌生为熟悉,点燃了思维的火花,打开思路的新局面,顺利找到思路,“化陌生为熟悉”这种重要的数学思维方法,是解决新问题的常用方法,当你遇到新问题时,不妨用此法一试,它确实可助你一臂之力!

一道新问题解决以后,除分享胜利喜悦外,还要静心回忆一下,通过问题解决,我们学习了什么? 如本例,我们学习了用因式分解法、求根公式法解一元二次方程,又学习了“转化”思想,继续探索还会有什么新的发现、新的收获吗?这也是我们获取知识、提高教学素养的重要途径. 如本例,经过探索、观察可发现, $a+b+c=1+(-3)+2=0$,它的根是 $x_1=1, x_2=2$. 是不是 $a+b+c=0$,方程必有一个根是1,另一个根是常数项呢? 再选几例进行探索.

解方程:1. $x^2+5x-6=0$;

2. $2x^2-3x+1=0$;

3. $1\,999x^2-2\,000x+1=0$.

1 的方程解为 $x_1=1, x_2=-6$;

2 的方程解为 $x_1=1, x_2=\frac{1}{2}$;

3 的方程解为 $x_1=1, x_2=\frac{1}{1999}$.

由上可以发现, 当 $a+b+c=0 \Rightarrow x_1=1, x_2=\frac{c}{a}$, 这一重要发现给我们解此类方程提供十分简捷的方法——观察法. 下面提供几例, 供读者练习. 解方程:

1. $x^2-14x+13=0$;

2. $1949x^2-1999x+50=0$;

3. $x^2-(4+\sqrt{2})x+3+\sqrt{2}=0$;

4. $x^2-2000x+1999=0$;

5. 设 a, b, c 是不相等的实数, 且方程 $(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0$,

求证: $2b=a+c$.

例 2 已知 α, β 是方程 $x^2+(m-2)x+1=0$ 的两个根, 求 $(1+m\alpha+\alpha^2)(1+m\beta+\beta^2)$ 的值.

【思考】 1. 请叙述一元二次方程根与系数关系. 2. 如何将待求式转化为两数和 $(\alpha+\beta)$ 及两数积 $(\alpha\beta)$ 形式, 是解决本例关键, 应如何转化? 3. 配方法你知道吗? 请叙述.

【思路分析 1】 由 α, β 是方程 $x^2-(m-2)x+1=0$ 的两个根, 首先容易想起根与系数关系, 即

$$\alpha+\beta=m-2, \alpha\beta=1.$$

进而设法把 $(1+m\alpha+\alpha^2)(1+m\beta+\beta^2)$ 转化为“ $\alpha+\beta, \alpha\beta$ ”的形式, 便可求出它的值.

解: $(1+m\alpha+\alpha^2)(1+m\beta+\beta^2)$

$$=1+m\beta+\beta^2+m\alpha+m^2\alpha\beta+m\alpha\beta^2+\alpha^2+m\alpha^2\beta+\alpha^2\beta^2$$

$$=1+m(\alpha+\beta)+\alpha^2+\beta^2+m\alpha\beta(\alpha+\beta)+m^2\alpha\beta+\alpha^2\beta^2$$

$$=1+m(\alpha+\beta)+(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+m\alpha\beta(\alpha+\beta)+\alpha\beta m^2+(\alpha\beta)^2$$

$$=1+m(2-m)+(2-m)^2-2\times 1+m\cdot 1(2-m)+m^2\cdot 1+1^2$$

$$=1+2m-m^2+m^2-4m+4-2+2m-m^2+m^2+1$$

$$=4.$$

【思考】 1. 你发现要求结论的特征与原方程之间的结构有何异同点? 如何能变异为同? 2. 方程的解的意义是什么? 对本例求解有何帮助? 3. 一元二次方程的根与系数的关系你知道吗?

【思路分析 2】 由思路分析 1 易于想出

$$\alpha+\beta=2-m, \alpha\beta=1.$$

此时再联想方程的根的定义和根与系数配伍, 便可找到十分简捷的两种思路.

解: $\because \alpha, \beta$ 为方程 $x^2+(m-2)x+1=0$ 的两根, 由方程根的定义知:

$$\alpha^2+(m-2)\alpha+1=0, \beta^2+(m-2)\beta+1=0.$$

$\therefore$

$$(1+m\alpha+\alpha^2)(1+m\beta+\beta^2)$$

$$=[\alpha^2+(m-2)\alpha+1+2\alpha][\beta^2+(m-2)\beta+1+2\beta]$$

$$=(0+2\alpha)(0+2\beta)$$

$$=2\alpha\cdot 2\beta=4\alpha\beta=4\times 1=4.$$

又解: 由上边法可仿之得

$$\alpha^2+(m-2)\alpha+1=0, \beta^2+(m-2)\beta+1=0.$$

$$\begin{aligned}\therefore \quad & \alpha^2 + m\alpha + 1 = 2\alpha, \beta^2 + m\beta + 1 = 2\beta. \\ \therefore \quad & (1 + m\alpha + \alpha^2)(1 + m\beta + \beta^2) = 2\alpha \cdot 2\beta = 4\alpha\beta = 4.\end{aligned}$$

【思路分析 3】 根据题意, 易于得出:

$$\alpha + \beta = 2 - m, \alpha\beta = 1.$$

即

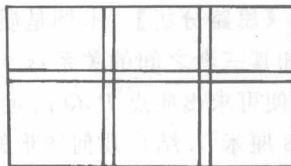
$$\alpha + \beta + m = 2, 1 = \alpha\beta.$$

人们在求解过程中, 通常易于把代数式中的“ $\alpha\beta$ ”换成“1”进行运算. 对于逆向思维, 把“1”换成“ $\alpha\beta$ ”, 往往感到别扭, 其实不然, 逆向思维, 能得到意想不到的最佳效果, 你瞧:

$$\begin{aligned}& (1 + m\alpha + \alpha^2)(1 + m\beta + \beta^2) \\ &= (\alpha\beta + m\alpha + \alpha^2)(\alpha\beta + m\beta + \beta^2) \\ &= \alpha(\alpha + \beta + m)\beta(\alpha + \beta + m) \\ &= 4\alpha\beta = 4.\end{aligned}$$

由上观之, 思路分析 1 基础, 易想, 笨拙. 思路分析 2 基础, 视野拓宽, 又可发现“新大陆”, 使思路分析 1 走出了“沼泽”, 进入柳暗花明又一村的境地, 找到两种巧妙、简捷思路. 思路分析 3, 应用根与系数式又结合逆向思维, 打破常规思维的桎梏, 把“1”转换为“ $\alpha\beta$ ”, 解题出现新的契机, 抓住契机, 找到新颖思路. 四种解法的由来都源于基础, 只有学好课本知识, 扎实基础, 才能找到思路, 找到好的思路.

例 3 如图, 在宽为 20m, 长为 32m 的矩形耕地上, 修筑同样宽的三条道路(两条纵向, 一条横向, 横向与纵向互相垂直), 把耕地分成大小相等的六块作试验田, 要使试验地面积为 570m², 问道路应为多宽?



图代 12-1-1

【思考】 1. 总面积 = 各部分面积之和, 根据这一相等关系, 你能找出它们之间关系吗? 能设出未知数, 并列方程吗? 2. 在计算各部分面积时, 必须不重不漏, 你考虑一下, 如何避免重复, 又如何查出遗漏? 3. 根据题意, 怎样进行取舍, 正确选择答案?

【思路分析 1】 从图形观察可知: 试验田的面积 = 总面积 - 两条纵道路面积 - 一条横道路的面积 + 两个纵、横道路重叠部分面积. 两个纵、横道路重叠部分面积常被遗掉, 以致思路受阻, 这对找相等关系、布列方程解应用题极大不利, 提醒同学们务必缜密思考, 要不重不漏.

解: 设道路宽为 x m, 依题意, 根据相等关系可得:

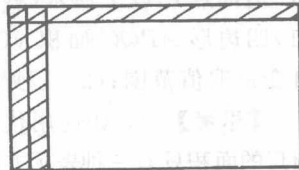
$$32 \times 20 - 32x - 2 \times 20x + 2x^2 = 570.$$

$$\therefore \quad x^2 - 36x + 35 = 0.$$

$$\therefore \quad x_1 = 1, x_2 = 35 (\text{不合题意}).$$

故道路宽为 1m.

【思考】 1. 什么叫整体思维方法? 本例可采取整体思维方法吗? 如何对本例进行整体思维? 2. 将中间道路均平移到边上(如图), 这样进行思路分析, 有什么好处? 这种思维方法是整体思维方法吗? 类似问题都可这样思考吗?



图代 12-1-2

【思路分析 2】 本例道路在中间, 若把道路平移到田地边上, 使试验田变为一个长方形(如图), 这时实验田长为 $(32 - 2x)$ m

(设道路宽为 x m), 宽为 $(20-x)$ m. 相等关系清晰可见, 即

试验田面积 = 长 $\times$ 宽.

解: 依题意, 有 $570 = (32-2x)(20-x)$,

$$\therefore x^2 - 36x + 35 = 0.$$

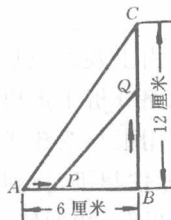
$$\therefore x_1 = 1, x_2 = 35 (\text{舍}).$$

故道路宽为 1 m.

思路分析 1 易于打通, 但出错又不易发现, 思路分析 2 可避免思路分析 1 的弱点, 通过平移变换, 进行整体思维, 即整体处理问题, 既直观又方便, 今后我们遇此类问题要记住: “道路(水渠)在中间, 平移到田边, 整体又直观, 思路在眼前!” 通过学习, 必须善于总结规律, 驾驭规律, 扎扎实实, 思路自然如泉涌.

思维体操

例 1 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 90^\circ$, 点 P 从点 A 开始沿 AB 边向点 B 以 1 厘米/秒的速度移动, 点 Q 从点 B 开始沿 BC 边向点 C 以 2 厘米/秒的速度移动, 如果 P, Q 分别从 A, B 同时出发, 几秒钟后 $\triangle PBQ$ 的面积等于 8 厘米²?



图代 12-1-3

【思路分析】 本例是质点运动问题. 它涉及速度、时间、距离, 因之, 必须知其三者之间的关系: $s = vt$, $v = s/t$, $t = s/v$ (s 为距离, v 为速度, t 为时间), 抓住这三者的关系, 便可求出质点 P, Q 所走的距离分别为: t 厘米和 $2t$ 厘米 (设同时出发 t 秒钟后 $\triangle PBQ$ 面积为 8 厘米²). 结合几何图形知道: $AP = t$ 厘米, $PB = (6-t)$ 厘米, $BQ = 2t$ 厘米. 因为直角三角形的面积 = $\frac{1}{2} PB \cdot BQ$.

$$\text{解: 依题意有 } \frac{1}{2} (6-t) \cdot 2t = 80.$$

解得

$$t_1 = 2, t_2 = 4.$$

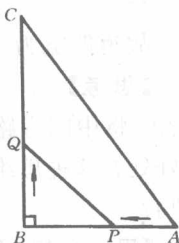
故 2 秒或 4 秒后 $\triangle PBQ$ 的面积等于 8 厘米².

至此, 问题圆满解决. 借助数列出代数式, 应用形找出相等关系, 布列出方程, 将实际问题转化为一元二次方程问题, 解一元二次方程, 便水到渠成, 对质点沿两直角边运动问题, 通常沿着上述思路进行探索, 都可帮你找到思路, 请同学们沿着以下思路思考: 1. 应用速度、时间、距离之间关系列代数式; 2. 应用几何图形 (直观) 的性质找出相等关系式; 3. 根据相等关系式布列出方程; 4. 转化为一元二次方程求解. “数形结合”法找到质点沿几何图形边运动规律, 熟悉规律, 按规律办事便可一路顺风. 请同学看以下诸例:

【扩散 1】 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 90^\circ$, $AB = 15$ 厘米, $BC = 26$ 厘米, 点 P 从点 A 开始沿 AB 边向点 B 以 1 厘米/秒的速度移动, 点 Q 从点 B 开始沿 BC 边向点 C 以 2 厘米/秒速度移动, 若 P, Q 分别从 A, B 同时出发, 试求: (1) 四边形 $APQC$ 面积 y (厘米²) 与 P, Q 运动时间 x (秒) 的函数关系式及自变量取值范围; (2) 几秒钟后四边形 $APQC$ 的面积等于 180 厘米²?

【思考】 1. 如何用代数式表示直角三角形各边关系? 2. 同一个几何图形的面积只有一种表示方法吗? 3. 如何根据几何图形的特征找相等关系?

【思路分析】 (1) 按例题总结规律知:



图代 12-1-4

$PA=x$ 厘米, $PB=(15-x)$ 厘米, $BQ=2x$ 厘米.

$$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle PBQ} + S_{APQC},$$

$$\therefore \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} PB \cdot QB + y,$$

$$\text{即 } \frac{1}{2} \times 15 \times 26 = \frac{1}{2} (15-x) \cdot 2x + y.$$

$$\therefore y = x^2 - 15x + 195 (0 < x < 13).$$

(2) 设 t 秒后四边形 $APQC$ 的面积为 180 厘米², 于是结合(1), 得

$$t^2 - 15t + 195 = 180.$$

$$\therefore t^2 - 15t + 15 = 0.$$

$$\therefore t = \frac{15 \pm \sqrt{165}}{2}.$$

$$\therefore t = \frac{15 + \sqrt{165}}{2} > 13 (0 < t < 13), \text{ 应舍去,}$$

$\therefore$ 当 $t = \frac{15 - \sqrt{165}}{2}$ 秒时四边形 $APQC$ 的面积为 180 厘米².

【扩散 2】 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 90^\circ$, $AB=6$ 厘米, $BC=3$ 厘米, 点 P 从点 A 开始沿 AB 边向点 B 以 1 厘米/秒速度移动, 点 Q 从点 B 开始沿 BC 边向点 C 以 2 厘米/秒的速度移动, 如果 P, Q 分别从 A, B 同时出发, 几秒钟后 P, Q 间距离等于 $4\sqrt{2}$ 厘米?

【思考】 1. 布列方程解应用题必须抓住相等关系, 对于数形结合问题如何找出相等关系? 2. 请叙述勾股定理.

【思路分析】 设 t 秒钟后 P, Q 间距离等于 $4\sqrt{2}$ 厘米, 依题意, 结合图形, 得 $AP=t, PB=6-t, BQ=2t$.

在 $Rt\triangle PBQ$ 中, 由勾股定理, 得

$$PB^2 + BQ^2 = PQ^2,$$

即

$$(6-t)^2 + (2t)^2 = (4\sqrt{2})^2.$$

整理, 得

$$5t^2 - 12t + 2 = 0.$$

解得

$$t_1 = \frac{2}{5}, t_2 = 2.$$

当 $t=2$ 时, $2t=4 > 3=BC$, 应舍去, 故 $\frac{2}{5}$ 秒后 P, Q 间距离为 $4\sqrt{2}$ 厘米.

【扩散 3】 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $BC=8$ 厘米, $\sin B = \frac{3}{5}$, 点 P 从点 B 出发沿 BC 向点 C 以 2 厘米/秒的速度移动, 点 Q 从点 C 出发沿 CA 边向点 A 以 1 厘米/秒的速度移动, 如果 P, Q 分别从 B, C 同时出发, 第几秒时 $PQ \parallel AB$?

【思考】 1. 什么叫做三角函数? 请说直角三角形的边角关系? 2. 对应线段成比例, 两直线平行吗? 3. 两直线平行, 所

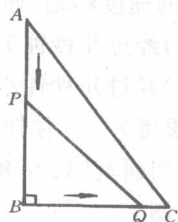


图 12-1-5

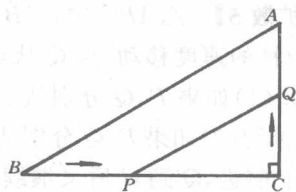


图 12-1-6