新编 高中数学结构总览指要

孙维刚
周沛耕
范登辰
郭惠宜
编著

●教育科学出版社

高中数学结构总览指要

孙维刚　周沛耕
范登辰　郭惠宜　编著

教育科学出版社

(京)新登字第111号

高中数学结构总览指要

孙维刚　等编著　　责任编辑　刘进

教育科学出版社出版、发行（北京·北太平庄·北三环中路46号）

各地新华书店经销　　北京市东华印刷厂印装

开本：787×1092毫米　1/32　印张：14.375　字数：322千

1993年5月第1版　1993年5月第1次印刷

印数：00,001—10,500册

ISBN 7-5041-1061-2/G·1018　定价：5.10元

目　录

第一部分　基础知识结构

代数部分

三角函数部分

立体几何部分

平面解析几何部分

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第一部分　基础知识结构

Ⅰ．大纲要求概述

一、代数

（一）幂函数、指数函数和对数函数

1．理解集合、子集、交集、并集、补集的概念，了解空集、全集、集合间属于、包含、相等关系的意义，能表示简单的集合。

2．了解映射的概念，理解从映射角度出发的函数、函数定义域和对应法则及值域的概念，掌握互为反函数的函数图象间的关系。

3．理解函数的单调性和奇偶性的概念，能判断一些简单函数的单调性、奇偶性，能利用函数的奇偶性与它的图象的对称性的关系描绘函数的图象。

4．掌握幂函数、指数函数、对数函数的概念及其图象和性质，能解简单的指数方程和对数方程。

（二）三角函数

1．理解弧度的意义，能进行弧度和角度的互化。

2．掌握任意角三角函数的定义、符号、性质、同角三角函数关系式、诱导公式．了解周期函数和最小正周期的意义，会求函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的或经过简单恒等变形可化为上述函数的三角函数的周期．能运用前述三角公式化简三角函数式、求任意角三角函数值及证明较简单的三角恒等式。

3．了解正弦、余弦、正切、余切函数图象的画法，会用“五点法”画正、余弦函数及函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$的简图，并能解决与正弦曲线有关的实际问题。

（三）两角和与差的三角函数

能正确推导并掌握两角和、差、二倍角、半角的正弦、余弦、正切公式，三角函数的和差化积与积化和差公式，万能公式，并能运用它们化简三角函数化、求某些角的三角函数值、证明较简单的三角等式，解决一些简单的实际问题，包括在三角形中的计算问题。

（四）反三角函数和简单三角方程

1．理解反三角函数概念、运用它们的定义、性质解决简单问题，能由反三角函数的图象得到它们的性质。

2．能熟练写出最简单三角方程的解集，并会解简单的三角方程。

（五）不等式

1．掌握不等式的性质及证明、证明不等式的几种常用方法、两（或三）个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数定理，并能运用它们解决一些问题。

2．熟练掌握一元一次不等式（组）、一元二次不等式解法，在此基础上，掌握其他一些简单的不等式的解法。

3．会用不等式 $|a|-|b|\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$ 解决一些简单问题。

（六）数列、极限、数学归纳法

1．理解数列的有关概念，例如项、通项公式等。能由递推公式写出数列的前几项。

2．掌握等差及等比数列的概念、通项公式、前几项和公式，并能运用它们解决问题。

3．了解数列极限的意义，掌握极限的四则运算法则，会求公比绝对值小于1的无穷等比数列所有项的和．

4．了解数学归纳法原理，并能运用它证明一些简单问题．

（七）复数

1．理解复数及模、辐角、相等概念，掌握复数的代数、几何、三角表示及其转换．

2．掌握复数运算法则，并能正确进行复数运算，理解复数运算的几何意义．

3．掌握在复数集中解一元二次方程和两项方程的方法．

（八）排列、组合、二项式定理

1．掌握加法原理和乘法原理，并会应用．

2．理解排列、组合的意义，掌握排列数、组合数计算公式及组合数性质，会解应用问题．

3．掌握二项式定理和二项式系数性质，并能用来计算和论证一些简单问题．

二、立体几何

（一）直线和平面

1．掌握平面基本性质、空间两条直线、直线和平面、平面和平面的位置关系（特别是有关平行和垂直的判定与性质）以及它们所成角与距离的概念，并能运用它们论证和解决有关问题．（对于异面直线距离的计算，一般要求到图中已给公垂线段的程度）

2．会用斜二测画法画水平放置的平面图形，能画上述"1"中各种位置关系的图形，又能根据图形想像它们的位置

关系。

3．掌握反证法。

（二）多面体和旋转体

1．了解多面体和旋转体的概念。

2．理解棱柱、棱锥、棱台、圆柱、圆锥、圆台、球及其有关概念和性质。

3．掌握直棱柱、正棱锥、正棱台和圆柱、圆锥、圆台、球的表面积及体积公式以及球冠面积、球缺体积公式，并能熟练应用，会画它们的直观图。

4．能解决以下问题：与棱柱、棱锥、棱台的对角面有关的问题；与圆柱、圆锥、圆台的轴截面有关的问题；与上述所有图形的和它们底面平行的截面的有关问题；与球的任何截面有关的问题；与已给出截面图形或它的全部顶点的各种截面有关的图形。

三、平面解析几何

（一）直线

1．理解有向线段、直线斜率概念，熟练掌握有向线段定比分点、过两点的直线斜率公式、直线方程的点斜式、斜截式、两点式、截距式和一般式，熟练运用两点间距离公式和线段中点坐标公式，根椐条件写出直线方程。

2．掌握两直线平行与垂直的条件，能根椐两直线方程判定其位置关系，会求两相交直线交点及夹角、平行直线距离．掌握并熟练运用点到直线距离公式。

（二）圆锥曲线

1．掌握直角坐标系下的曲线与方程的关系和轨迹概念，能根椐所给条件，选择适当坐标系写出曲线的方程，画出方

程所表示的曲线。

2．理解充分条件、必要条件、充要条件的意义，并会判定已给两个命题的充要关系。

3．掌握圆锥曲线的标准方程及几何性质，会根椐所给条件画圆锥曲线，了解其实际应用。

4．理解坐标变换意义，掌握利用坐标轴平移化简圆锥曲线的方法。

5．了解用坐标法研究几何问题的思想，初步掌握利用方程研究曲线性质的方法。

（三）参数方程、极坐标

1。理解参数方程概念，熟悉直线、圆、椭圆、抛物线的常用参数方程，了解其中参数的几何意义或物理意义，了解其他一些曲线的参数方程，掌握参数方程与普通方程的互化方法，会根椐条件、根椐给出的参数建立参数方程。

2．理解极坐标概念，会进行点的极坐标与直角坐标的互化，会把极坐标方程化为直角坐标方程。会根椐所给条件建立直线、圆的极坐标方程，会建立一个焦点在极点的椭圆、双曲线、抛物线的极坐标方程和等速螺线的极坐标方程。

Ⅱ. 结构教学指要

代数部分

一、预备知识专题

（一）集合

1. 集合概念及性质

例1 选择（本书选择题所列备选结论中只有一个是正确的，以后不再说明）：

下列结论中不正确的有（　　）个。

（1） 所有的自行车组成集合。

（2） 所有的正方形组成集合。

（3） 抛物线$y=x^2+1$上的点组成集合。

（4） {0、1、2}与{2、0、1}不是同一个集合。

（5） {3、1、1}是一个集合。

（6） 所有的非常小的正数组成一个集合。

（A） 1个。（B）2个。（C）3个。（D）4个。

说明： 集合中的元素具有①任意性，②确定性，它可以是任意确定的事物如点，几何图形，数或其他的事物。但必须是确定的。结论（6）中“非常小的正数”是无一定标准的因而也是不确定的，所以不正确。③无顺序性，④互异性，当集合中的元素是有限个而用列举法给出时，对其中元素而顺序要求而且要不重复，因此（4）（5）也是不正确的，故选（C）

2. 集合的子集、交集、并集、补集及集合的相等

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

例2

（1）集合M中有n个元素，它有多少个子集？多少个真子集？多少个非空真子集？

分析： 子集包括空集ϕ和M本身，所以有$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots\cdots+C_n^n=2^n$个。

空集是任何非空集合的真子集。所以M中 2^n-1 个真子集，有2^n-2个非空真子集。

（2）满足 $\{1, 2) \subseteq M \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$ 的集合M有多少个？

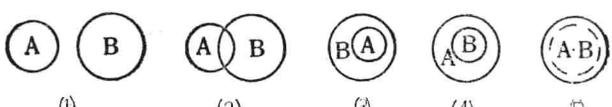
解：满足条件的集合M有$1+C_2^1+C_2^2=4$个。

例3 选择（1） A、B为非空集合。则下面结论中不正确的是（　　）

（A）$A\cap B\subset A$ （B）$A\cup B\supseteq B$

（C）$A\cap B\subseteq B$ （D）$\phi\subseteq A\cap B$

分析： 非空集合A、B间有以下几种可能。如图1-1-1中的(1)-(5)，因此，（A）结论在（3）（4）（5）情况下均不成立，故选择（A）



(1)　(2)　(3)　(4)　(5)

图 1-1-1

说明： 做这类问题时，应把两个集合间各种可能考虑全面，若无“非空”的条件，还要把两个之一或两个全是空集考虑进去。

（2）已知全集I和它的子集A、B、C。且$A=\overline{B}$，B

$=\overline{C}$，则A与C的关系是（　　）

(A) $A\subset C$　(B) $A\supset C$　(C) $A=C$　(D) $A=\overline{C}$

分析一. 由图1-1-2易得结论$A=C$

分析二. 由已知$A=\overline{B}$，于是有$\overline{A}=\overline{\overline{B}}=B$，而已知$B=\overline{C}$，所以$\overline{A}=\overline{C}$，故有$A=C$，所以选择（C）.

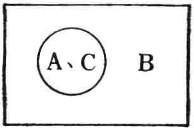


图 1-1-2

（3）已知集合$A=\{x/x\neq 1\}$，$B=\{y/y\neq D\}$，则$A\cup=B$（　　）

（A）不等于1的一切实数

（B）不等于0的一切实数

（C）平面内去掉（1，0）以外的点集

（D）R

分析：A、B集合中元素全是实数，A可写成$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$，$B=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$容易得出$A\cup B=R$. 故选择（D）.

说明：在进行集合运算时，首先应看清元素是什么，在本题中因为用了x，y，若不注意，很容易想象成点的横纵坐标而出现错误.

（4）集合$A=\{x/x\leqslant 8\}$，$a=\sqrt{7}$. 则下列结论中正确的是（　）

(A) $a\subset A$　(B) $a\notin A$

(C) $\{a\}\in A$　(D) $\{a\}\subset A$

解：本题应选择（D）.

说明：应注意元素与集合，集合与集合间关系的表示法：元素与集合间是$\in$、$\notin$，集合与集合间是$\subset$、$\not\subset$或$=$.

例4 设二次方程$x^2-px+15=0$的解集为A,方程$x^2-5x+q=0$的解集是B，若$A\cup B=\{2, 3, 5\}$，$A\cap B=\{3\}$. 求集合A、B。

分析：欲求集合A、B，即求两方程之解. 而求方程之解则必须求p、q. 由$A\cap B=\{3\}$即二方程均有解3，于是p、q可得。

解：把$x=3$代入方程$x^2-px+15=0$，解得$p=8$。

$x^2-8x+15=0$，解得$x=3$ 或 $x=5$。

$\therefore\quad A=\{3, 5\}$

$\because\quad A\cup B=\{2, 3, 5\}$

$\therefore\quad B=\{2, 3\}$。

例5 已知集合$A=\{x|y^2=x+1\}$，$B=\{x|y^2=-2(x-3)\}$，则$A\cap B$为（ ）

(A) $\{x|-1<x<3\}$ (B) $\{x|x\leqslant 3\}$

(C) $\{x|-1\leqslant x\leqslant 3\}$ (D) $\{x|x\geqslant -1\}$

分析：A中元素是满足$y^2=x+1$的x，B中元素是满足$y^2=-2(x-3)$的实数x，$A\cap B$是求两条曲线的x集合的交集.

解法一：作出图象如图 1-1-3 故答案应选择（C）.

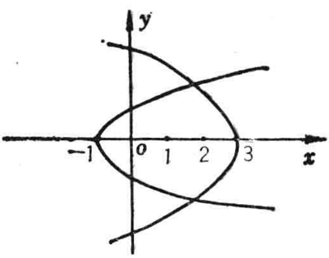


图 1-1-3

解法二：集合A中$x+1=y^2\geqslant 0$，于是$x\geqslant -1$；集合B中$-2(x-3)=y^2\geqslant 0$，所以,$x\leqslant 3$。

即$A\cap B=\{x|-1\leqslant x\leqslant 3\}$。

说明：此处因为有两个方程，很容易求二曲线的交点从而出现错误。这仍是要看清元素的问题。

例6 已知集合$A=\{x|x=2n,\ n\in N\}$，$B=\{x|x=3n,\ n\in N\}$，$C=\{x|x=4n-2,\ n\in N\}$．求$(A\cup C)\cap B=$ ____________．（填空）

解：$A\cup C=\{x|x=2n,\ n\in N\}$．

$(A\cup C)\cap B=\{x|x=6n,\ n\in N\}$．

例6 设全集$I=\{x|x<10,\ x\in N\}$，$A\subset I$，$B\subset I$．$A\cap B=\{2\}$，$\overline{A}\cap B=\{4,\ 6,\ 8\}$．$\overline{B}\cap\overline{A}=\{1,\ 9\}$，则$A=$ ____，$B=$ ____________．

分析：由$\overline{A}\cap B=\{4,\ 6,\ 8\}$可知$\{4,\ 6,\ 8\}\subset B$，但$\{4,\ 6,\ 8\}\not\subset A$。

由$\overline{A}\cap\overline{B}=\{1,\ 9\}$，可知$\overline{A\cup B}=\{1,\ 9\}$。

由$A\cap B=\{2\}$，知$2\in A$，且$2\in B$。

$\therefore\ B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$，

$A=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$。

说明：正确地理解交、并、解集的符号的意义是解决此类问题的关键．如$A\cap\overline{B}=\{x|x\in A$，但$x\notin B\}$，$\overline{A}\cup\overline{B}=\{x|x\notin A$，或$x\notin B\}=\overline{A\cap B}=\{x|x\notin$，$A\cap B\}$。

例7 已知集合$A=\{x|x=2k+1,\ k\in Z\}$，集合$B=\{y|y=4n\pm1,\ n\in Z\}$，试确定$A$与$B$的关系。

解：对A中每一个元素x，当$k=2n$时，$x=2\cdot2n+1=4n+1\in B$，$(n\in Z)$。

当$k=2n-1$时，$x=2\cdot(2n-1)+1$，即$x=4n-1\in B$，$(n\in Z)$。

$\because$ 对整数k，或$k=2n(n\in Z)$，或$k=2n-1$。只有这两种情况，说明对任意$x\in A$有$x\in B$。

设任意$y\in B$，有$y=4n+1=2\cdot(2n)+1$。或$y=4n-1=2\cdot(2n-1)+1$。其中$2n\in Z$，$(2n-1)\in Z$。即对B中任意

元素y，有$y=2k+1(k\in Z)\in A$

综上所述有：$A\subseteq B$且$B\subseteq A$，$\therefore A=B$.

说明：判断两个集合间关系，应严格按照定义，如把题中条件改为$B=\{y|y=4n+1\}$，$(n\in Z)$则有：在A中，当$k=2n$时，$x=4n+1$；当$k=2n-1$时，有$x=4n-1$.

此说明，B中所有元素$4n+1\in A$，但A中至少有$4n-1\notin B$. $\therefore A\supset B$.

例8 集合$A=\{(x,\ y)|x^2+y^2=1\}$，集合$B=\{(x,\ y)|x+y-a=0\}$，若$A\cap B=\phi$. 则a的取值范围是什么？

分析：集合A是以原点为圆心，1为半径的圆，集合B则是直线. $A\cap B=\phi$说明圆与直线无公共点即相离. 由此不难得出解题方法.

解：由已知有原点O到直线$x+y-a=0$的距离大于1，即$\frac{|a|}{\sqrt{2}}>1$.

$\therefore\ a<-\sqrt{2}$或$a>\sqrt{2}$.

（二）命题及逻辑关系

例9 在下列各题中. A是B的什么条件（充分不必要，必要不充分，充要，什么也不是）

	A	B
（1）	$x^2-1=0$	$x=1$
（2）	$\alpha\neq\frac{\pi}{6}$	$\sin\alpha\neq\frac{1}{2}$
（3）	$\lvert x-2\rvert+\lvert y+3\rvert=0$	$y=-3$
（4）	$M\cup N=M\cap N$	$M=N$
（5）	$\log_2(3x-2)>5$	$3x-2>2^5$
（6）	$\log_4(x^2-1)<2$	$x^2-1<16$

分析：若由 $A\Rightarrow B$，则 A 是 B 的充分条件，同时 B 是 A 的必要条件；

反之，若 $A\Leftarrow B$。则 B 是 A 的充分条件，A 是 B 的必要条件。

若 $A\begin{smallmatrix}\Rightarrow\\ \not\Leftarrow\end{smallmatrix}B$ 则 A 是 B 的充分不必要 条件，而 B 是 A 的 必要不充分条件；

反之，若 $A\begin{smallmatrix}\not\Rightarrow\\ \Leftarrow\end{smallmatrix}B$，则 A 是 B 的必要 不充分 条件，而 B 是 A 的充分不必要条件。

可见，若判断 A 是 B 的什么条件，只须看 $A\overset{?}{\Rightarrow}B$，$A\overset{?}{\Leftarrow}B$？

以本题（4）、（5）、（6）为 例。（4）中由 $M=N$ 可推出 $M\cup N=M\cap N$，但由 $M\cup N=M\cap N$ 也可推出 $M=N$，故 A 是 B 的充要条件。

（5）中，由 $\log_2(3x-2)>5\Rightarrow 3x-2>2^5$；反之，由 $3x-2>2^5$ 可以保证 $3x-2>0$，$\therefore$ 可以 取对 数，得 $\log_2(3x-2)>5$。$\therefore A$ 是 B 的充要条件。

（6）中 由 $\log_4(x^2-1)<2\Rightarrow x^2-1<4^2$，但 由 $x^2-1<4^2$ 不能推出 $\log_4(x^2-1)<2$，因为 $x^2-1<4^2$ 保证不了 $x^2-1>0$，$\therefore A$ 是 B 的充分不必要条件。

仿此不难得出（1）中，A 是 B 的必要不充分条件。

（2）A 是 B 的必要不充分条件。

（3）A 是 B 的充分不必要条件。

说明：在判断 A 是否是 B 的充分条件时，为分析方便，往往利用原命题与它的逆否命题等价的原理，把推 $A\overset{?}{\Rightarrow}B$ 转化为 $\overline{A}\overset{?}{\Leftarrow}\overline{B}$。如上题（2）中若判断 $\alpha\neq\dfrac{\pi}{6}$ 是否可以推出 $\sin\alpha\neq\dfrac{1}{2}$，可以转化为它的逆否命题，即 $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$ 是否

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com