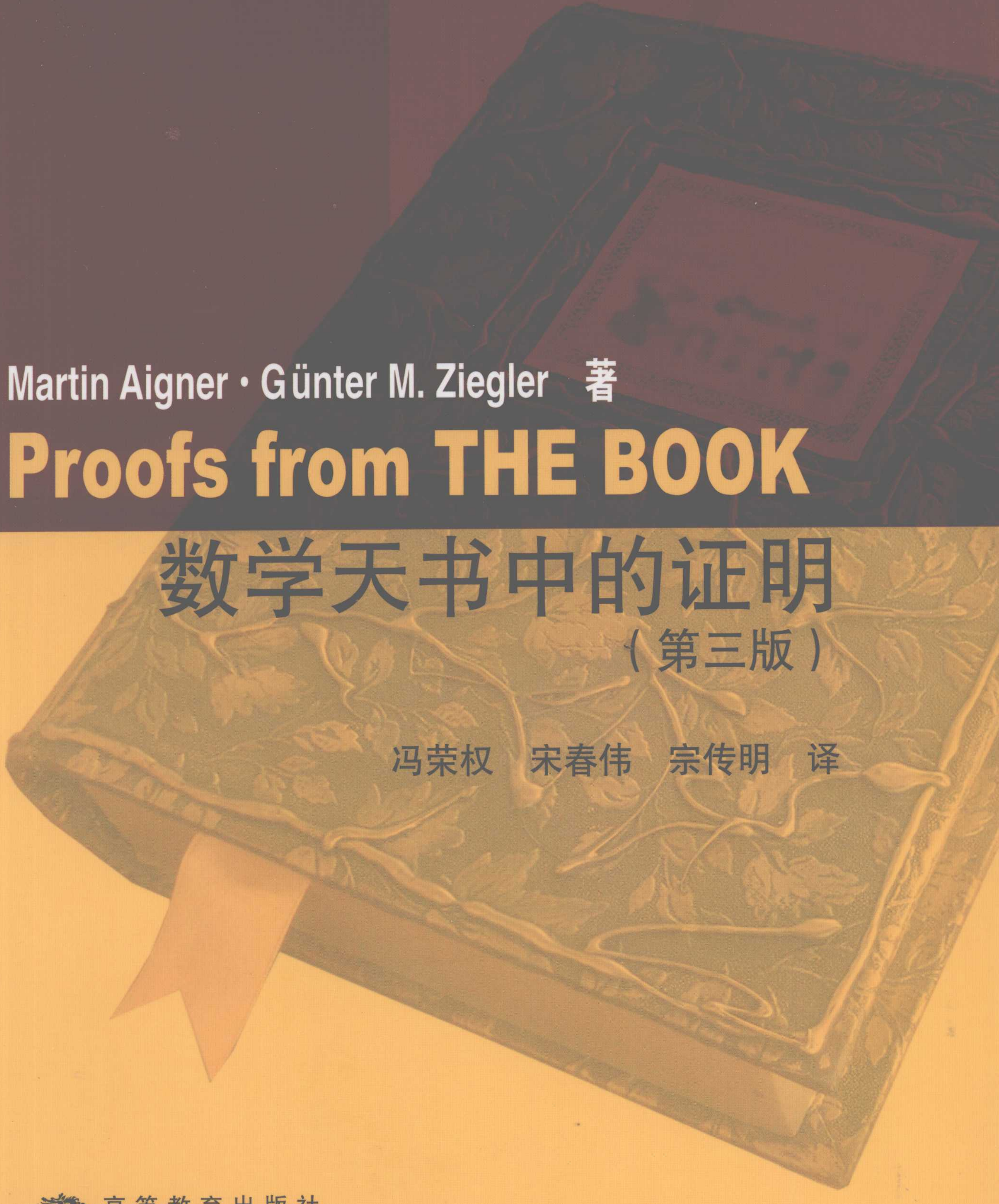


Martin Aigner · Günter M. Ziegler 著

Proofs from THE BOOK

数学天书中的证明

（第三版）

冯荣权　宋春伟　宗传明　译

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

Martin Aigner
Günter M. Ziegler 著

Proofs from THE BOOK

数学天书中的证明

(第三版)

附图 250 幅
含 Karl H. Hofmann 提供的插图

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

图字：01-2008-2746 号

Translation from the English language edition:
Proofs from THE BOOK by Martin Aigner and Günter M. Ziegler

图书在版编目 (CIP) 数据

数学天书中的证明：第3版 / (德) 艾格纳 (Aigner, M.), (德) 齐格勒 (Ziegler, G.M.) 著；冯荣权, 宋春伟, 宗传明译. —北京：高等教育出版社, 2009.5
书名原文：Proofs from THE BOOK
ISBN 978-7-04-026209-4

Ⅰ. 数… Ⅱ. ①艾… ②齐… ③冯… ④宋… ⑤宗… Ⅲ. 数学－普及读物 Ⅳ. O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 038637 号

策划编辑	王丽萍	**责任编辑**	李　鹏	**封面设计**	张　楠
版式设计	范晓红	**责任校对**	殷　然	**责任印制**	韩　刚

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	400-810-0598
邮政编码	100120	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	中原出版传媒投资控股集团 北京汇林印务有限公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	850×1168　1/16	**版　　次**	2009 年 5 月第 1 版
印　　张	17.5	**印　　次**	2009 年 5 月第 1 次印刷
字　　数	320 000	**定　　价**	34.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　26209-00

译者序

作为一门历史悠久的学问, 数学有她自身的文化和美学, 就像文学和艺术一样. 一方面, 数学家们在努力开拓新领域、解决老问题; 另一方面, 他们也在不断地从不同的角度反复学习、理解和欣赏前辈们的工作. 的确, 数学中有许多不仅值得反复推敲理解, 更值得细心品味和欣赏的杰作. 有些定理的证明不仅想法奇特、构思精巧, 作为一个整体更是天衣无缝. 难怪, 西方有些虔诚的数学家将这类杰作比喻为上帝的创造. 这也就是我们所说的数学天书中的证明.

本书介绍了 35 个著名数学问题的极富创造性和独具匠心的证明. 这不是一本教科书, 也不是一本专著, 而是一本开阔数学视野和提高数学修养的著作. 出于可读性的考虑, 本书侧重于研究生水平并且局限于数论、几何、分析、组合与图论五个数学领域. 但我确信, 每一个数学工作者都会喜欢这本书, 并且从中学到许多东西.

2002 年, 斯普林格出版社的高级编辑 Lindemann 博士来华访问时告诉我, 本书是斯普林格出版社近十年来最畅销的数学著作之一. 2005 年, 该出版社的 Heinze 博士来华访问时告诉我这本书已被翻译成 8 种文字出版, 同时他也希望我能促成这本著作中文版的出版. 高等教育出版社的王丽萍编辑对本书的出版给予了大力支持, 李鹏编辑细心核对了译稿并提出了许多改进意见. 冯荣权教授和宋春伟博士承担了翻译工作, 我负责统筹和校对. 陆珞和张姗姗对翻译工作给予了帮助.

宗传明

北京大学, 2008 年 9 月

中文版序言

本书的英文原著于 1998 年出版, 随即受到数学界的广泛好评, 并被陆续翻译成了十余种不同的文字, 其中包括法文、德文、意大利文、日文、西班牙文和俄文等.

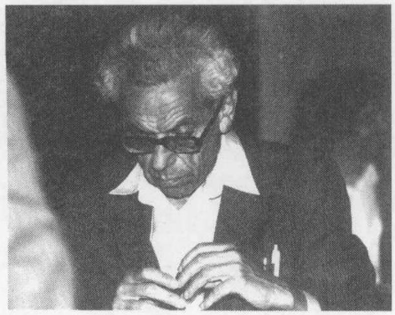
中国曾经对世界文明作出过重要贡献. 中国的数学正处在一个迅速发展、人才辈出的时期. 我们很高兴本书中文版的问世, 并殷切希望她对中国数学的发展起到积极的作用. 中文版是在原著第三版的基础上翻译的. 我们诚挚地感谢宗传明教授、冯荣权教授和宋春伟博士为翻译这本书所做的各项努力.

Martin Aigner, Günter M. Ziegler

柏林, 2008 年 8 月

第一版序言

Paul Erdős 喜欢谈论数学天书 (《The Book》), 上帝在其中保存着数学定理的完美证明. 他这是根据 G. H. Hardy 的说法: 丑的数学是不会有永久地位的. Paul Erdős 也讲过, 作为数学家, 你可以不相信上帝, 但你应该相信数学天书. 几年前, 我们建议他勾画一下数学天书的轮廓. 他立即动手, 充满热情地一页一页提了很多建议. 本书原计划作为 Paul Erdős 的 85 岁生日献礼于 1998 年 3 月出版. 由于他于 1996 年夏天不幸去世, 他没有被列为我们的合作者. 而本书却是作为对他的纪念.



Paul Erdős

"The Book"

我们没有数学天书中的证明的定义或标准. 这里我们所呈现给大家的是一些具有高超的思想、聪明的观察和出色的洞察力的例子. 但愿读者与我们一样对它们富有热情并喜欢它们, 尽管我们的表述并不完美. 本书内容的选取, 在很大程度上受到 Paul Erdős 的影响. 其中许多章节是他建议的, 许多证明是他给出的或者源于他富有洞察力的问题或猜想. 所以, 这本书很大程度上反映了 Erdős 关于什么是数学天书中的证明的观点.

限制我们选题的一个因素是可读性: 本书中的所有章节应该能被具有大学数学水平的读者所理解. 一点线性代数、数学分析和数论以及一些离散数学的初等概念和思维方式就足够理解和欣赏本书的全部内容.

我们对那些为本书的出版提供过帮助和支持的人表示衷心的感谢 (其中包括初稿讨论班上的学生): Benno Artmann, Stephan Brandt, Stefan Felsner, Eli Goodman, Torsten Heldmann 和 Hans Mielke. 此外, Margrit Barrett, Christian Bressler, Ewgenij Gawrilow, Michael Joswig, Elke Pose, 和 Jörg Rambau 对本书的出版提供了技术支持, Tom Trotter 通读了初稿, Karl H. Hofmann 提供了一些优美的插图, 在此一并致谢. 当然, 我们要特别感谢已故的伟人 Paul Erdős 本人.

Martin Aigner, Günter M. Ziegler

柏林, 1998 年 3 月

第二版序言

本书的第一版受到了读者广泛的欢迎. 我们也收到了许多读者来信, 其中有的给出中肯的评论, 有的指出一些错误和缺陷, 有的则对另外的证明和新的讨论题目提出了很好的建议. (显然, 当我们希望展现完美证明时, 我们的表述并不完美).

本书的再版给我们提供了改善的机会: 新版增加了三章, 并对有的章节做了实质性的修改和给出新的证明, 同时还有一些小的改动. 这些改进不少是基于读者的建议. 另外, 我们删掉了第一版中关于 "十三球问题" 的一章, 因为该问题的完整证明需要很多细节, 很难做到简洁优美.

在此我们非常感谢那些来信的读者, 他们的来信对我们很有帮助, 他们中有 Stephan Brandt, Christian Elsholtz, Jürgen Elstrodt, Daniel Grieser, Roger Heath-Brown, Lee L. Keener, Christian Lebœuf, Hanfried Lenz, Nicolas Puech, John Scholes, Bernulf Weißbach 以及许多其他读者. 同样, 我们再次对Springer Heidelberg的 Ruth Allewelt 和 Karl-Friedrich Koch 以及柏林的 Christoph Eyrich 和 Torsten Heldmann 提供的帮助和支持表示衷心的感谢. Karl H. Hofmann 提供了一些高质量的新插图, 在此一并致谢.

Martin Aigner, Günter M. Ziegler

柏林, 2000 年 9 月

第三版序言

准备这本书的第一版时，我们绝没想到出版后会有如此的成功. 自出版以来，这本书已被翻译成许多种语言出版. 这期间我们收到了许多读者的热情来信，其中有许多非常好的关于修改和增加新内容的建议 —— 这使我们忙了好几年.

第三版增加了两章 (分别关于 Euler 的分拆恒等式和洗牌)，关于 Euler 系列的三个证明成了独立的一章. 当然，还有许多其他改进，如 Calkinwilf-Newman 关于 "有理计数" 的处理. 目前也就是这些.

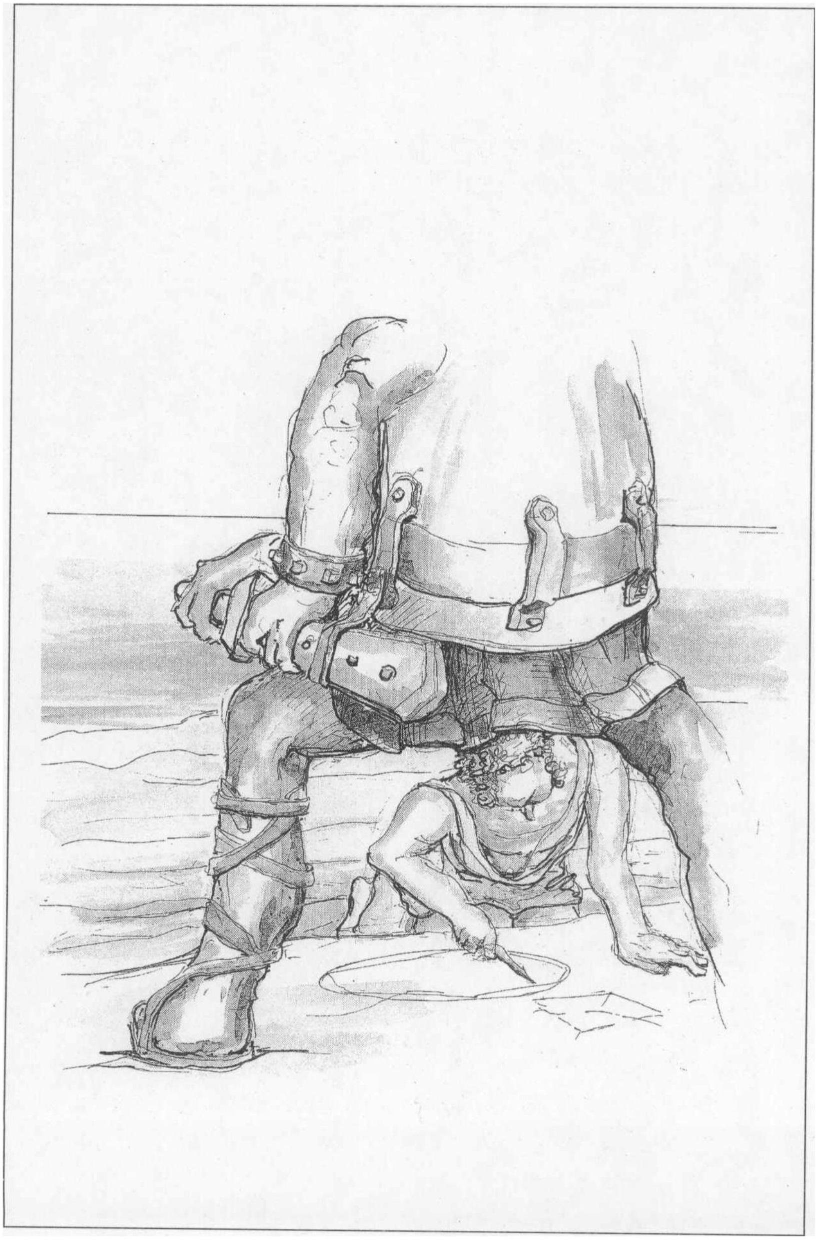
我们对过去五年中支持这一项目的每个人，和对新版作出贡献的每个人表示衷心的感谢. 他们包括 David Bevan, Anders Björner, Dietrich Braess, John Cosgrave, Hubert Kalf, Günter Pickert, Alistair Sinclair 和 Herb Wilf.

Martin Aigner, Günter M. Ziegler

柏林, 2003 年 7 月

目录

数　　论



"无理性和 π"

素数无限的六种证明 第 1 章

让我们从最古老的天书证明开始. 通常人们将其归功于 Euclid (Elements IX, 20). 它告诉我们素数构成的数列永不终止.

■ **Euclid 的证明.** 对任何素数的有限集 $\{p_1, \cdots, p_r\}$, 考察 $n = p_1p_2\cdots p_r + 1$. 取 n 的素因子 p. 这个 p 不可能是任何一个 p_i: 否则 p 既是 n 的因子又是积 $p_1p_2\cdots p_r$ 的因子, 所以也是两者之差 $n - p_1p_2\cdots p_r = 1$ 的因子, 矛盾. 从而任何有限集 $\{p_1, \cdots, p_r\}$ 不可能包含所有的素数. □

在往下继续之前我们引入一些符号. 令 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$ 为自然数集, $\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$ 为整数集, $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, \cdots\}$ 表示素数集.

下面我们介绍其他几种 (从一个长得多的单子上选出的) 不同的证明, 希望读者会像我们一样喜爱它们. 尽管它们来源于各异的观点, 其基本思想是相同的: 自然数没有上界, 而每个 $\geqslant 2$ 的自然数都有素因子. 这两个事实放在一起将导致 $\mathbb{P}$ 是无限的. 下一个证明归功于 Christian Goldbach (在 1730 年致 Leonhard Euler 的信里), 第三个证明显然是通俗的, 第四个是 Euler 自己给出的, 第五个由 Harry Fürstenberg 提出, 而最后一个是 Paul Erdős 的.

$$\begin{aligned} F_0 &= 3 \\ F_1 &= 5 \\ F_2 &= 17 \\ F_3 &= 257 \\ F_4 &= 65537 \\ F_5 &= 641 \cdot 6700417 \end{aligned}$$

前几个 Fermat 数

■ **证明之二.** 让我们先看看 *Fermat* 数 $F_n = 2^{2^n} + 1$, 这里 $n = 0, 1, 2, \cdots$. 下面证明任意两个 Fermat 数互素; 从而必有无穷多个素数. 为此我们只需验证递推关系

$$\prod_{k=0}^{n-1} F_k = F_n - 2 \qquad (n \geqslant 1). \tag{1}$$

事实上, 设 m 是 F_k 和 F_n $(k < n)$ 的公因子, 则 m 整除 2, 于是 $m = 1$ 或者 2. 但由于 Fermat 数都是奇数, $m = 2$ 是不可能的.

现在我们用归纳法证明递归关系 (1): 当 $n = 1$ 时, 我们有 $F_0 = 3$ 及 $F_1 - 2 = 3$. 由归纳假设即得

$$\prod_{k=0}^{n} F_k = \Big(\prod_{k=0}^{n-1} F_k\Big) F_n = (F_n - 2)F_n$$
$$= (2^{2^n} - 1)(2^{2^n} + 1) = 2^{2^{n+1}} - 1 = F_{n+1} - 2.$$

证毕. □

■ **证明之三.** 假设 $\mathbb{P}$ 有限且令 p 为最大的素数. 我们考虑*Mersenne* 数 $2^p - 1$, 并证明 $2^p - 1$ 的任意素因子 q 皆大于 p, 由此导出素数无限. 令 q 为整除 $2^p - 1$ 的一个素数, 则有 $2^p \equiv 1 \pmod q$. 因为 p 为素数, 前一公式说明在域 $\mathbb{Z}_q$ 的乘法群 $\mathbb{Z}_q \backslash \{0\}$ 中元素 2 的阶就是 p. 而该乘法群有 $q-1$ 个元素. 由 Lagrange 定理, 我们得到 $p \mid (q-1)$ 并由此可以导出 $p < q$. □

Lagrange 定理

若 G 是一个有限 (乘法) 群且 U 是它的一个子群, 则必有 $|U|$ 整除 $|G|$.

■ **证明.** 考虑二元关系

$$a \sim b :\Longleftrightarrow ba^{-1} \in U.$$

从群的定义易见 $\sim$ 是一个等价关系. 包含元素 a 的等价类即陪集

$$Ua = \{xa : x \in U\}.$$

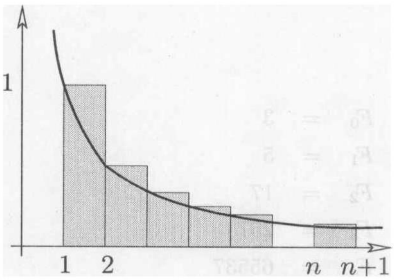
显然 $|Ua| = |U|$, 所以 G 可以被划分为阶数均为 $|U|$ 的若干陪集, 从而可以导出 $|U|$ 整除 $|G|$. □

在 U 是循环子群 $\{a, a^2, \cdots, a^m\}$ 的特殊情况, 可见 m (使 $a^m = 1$ 的最小正整数, 称为元素 a 的阶) 一定整除 $|G|$ 的阶数.

下面是一个用到初等微积分的证明.

■ **证明之四.** 令 $\pi(x) := \#\{p \leqslant x : p \in \mathbb{P}\}$ 表示不超过实数 x 的素数个数. 将 $\mathbb{P} = \{p_1, p_2, p_3, \cdots\}$ 排为升序. 我们考虑由 $\log x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ 定义的自然对数 $\log x$.

现在将曲线 $f(t) = \frac{1}{t}$ 之下的面积与稍高的阶梯函数之下的面积进行比较. 对 $n \leqslant x < n+1$ 我们有



在函数 $f(t) = \frac{1}{t}$ 上面的阶梯

$$\log x \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$$
$$\leqslant \sum \frac{1}{m},$$

这里 $\sum$ 表示对所有的仅含 $p \leqslant x$ 的素因子的 $m \in \mathbb{N}$ 求和. 因为每个被求和的 m 可以唯一地表为 $\prod_{p \leqslant x} p^{k_p}$ 的形式, 最后一个和式等于

$$\prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \leqslant x}} \Big(\sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{p^k}\Big).$$

由于上面的内和是公比为 $\frac{1}{p}$ 的几何级数, 所以

$$\log x \leqslant \prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \leqslant x}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \leqslant x}} \frac{p}{p-1} = \prod_{k=1}^{\pi(x)} \frac{p_k}{p_k - 1}.$$

显然, $p_k \geqslant k+1$, 因而

$$\frac{p_k}{p_k - 1} = 1 + \frac{1}{p_k - 1} \leqslant 1 + \frac{1}{k} = \frac{k+1}{k},$$

所以

$$\log x \leqslant \prod_{k=1}^{\pi(x)} \frac{k+1}{k} = \pi(x)+1.$$

众所周知 $\log x$ 无界, 所以 $\pi(x)$ 也无界, 从而素数有无穷多个. □

■ **证明之五.** 在用了分析之后现在轮到用拓扑了! 我们考虑整数集 $\mathbb{Z}$ 上的一种奇特的拓扑. 对 $a, b \in \mathbb{Z}, b > 0$, 令

$$N_{a,b} = \{a + nb : n \in \mathbb{Z}\}.$$

每个集合 $N_{a,b}$ 都是正负无界的算术级数. 我们称集合 $O \subseteq \mathbb{Z}$ 为开集, 如果 O 是空集, 或者对任意的 $a \in O$ 存在 $b > 0$ 使得 $N_{a,b} \subseteq O$. 显然, 开集的并总是开集. 另外, 如果 O_1 和 O_2 是两个开集, 对任意的 $a \in O_1 \cap O_2$, $N_{a,b_1} \subseteq O_1$ 以及 $N_{a,b_2} \subseteq O_2$, 都有 $a \in N_{a,b_1 b_2} \subseteq O_1 \cap O_2$. 所以开集的有限交是开的. 从而我们定义的开集族的确导出了 $\mathbb{Z}$ 上的一个拓扑.

这里我们注意两个事实:

(A) 每个非空的开集都是无界的.

(B) 每个 $N_{a,b}$ 都是既开又闭的.

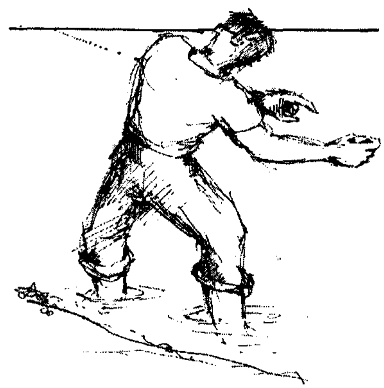
第一点是显然的. 至于第二点, 我们观察

$$N_{a,b} = \mathbb{Z} \setminus \bigcup_{i=1}^{b-1} N_{a+i,b}.$$

这说明 $N_{a,b}$ 是开集的补, 因而是闭集.

素数在哪里呢? —— 下面就来了. 每个整数 $n \neq 1, -1$ 都有某个素因子 p, 所以我们有 $n \in N_{0,p}$ 以及

$$\mathbb{Z} \setminus \{1, -1\} = \bigcup_{p \in \mathbb{P}} N_{0,p}.$$



"掷扁石, 到无穷远"

如果 $\mathbb{P}$ 是有限的, 那么 $\bigcup_{p\in\mathbb{P}} N_{0,p}$ 将是有限个闭集的并 (根据 (B)), 所以是闭的. 进而可以导出 $\{1, -1\}$ 是一个开集, 这与 (A) 矛盾. □

■ **证明之六.** 我们的最后一个证明更迈进了一大步. 它不仅证明了素数无穷多, 还证明了无穷级数 $\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p}$ 发散. Euler 首次证明了这个重要的结果 (那个证明也很有趣), 我们将要介绍的是由 Erdős 给出的着实漂亮的证明.

令 $p_1, p_2, p_3, \cdots$ 表示升序排列的素数, 并假设 $\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p}$ 收敛. 那么一定存在自然数 k 使得 $\sum_{i\geqslant k+1} \frac{1}{p_i} < \frac{1}{2}$. 这时, 我们称 $p_1, \cdots, p_k$

为小素数, 称 $p_{k+1}, p_{k+2}, \cdots$ 为大素数. 这样对任意的自然数 N 都有

$$\sum_{i \geqslant k+1} \frac{N}{p_i} \ < \ \frac{N}{2}. \tag{2}$$

令 N_b 表示满足 $n \leqslant N$ 且至少被一个大素数整除的正整数 n 的个数, N_s 表示满足 $n \leqslant N$ 且因子都是小素数的正整数的个数. 我们将证明存在某个 N 使得

$$N_b + N_s \ < \ N,$$

从而导出矛盾. 根据定义 $N_b + N_s$ 应该是等于 N 的.

为估计 N_b, 我们注意到 $\lfloor \frac{N}{p_i} \rfloor$ 计数了满足 $n \leqslant N$ 的 p_i 的倍数. 于是由 (2) 得到

$$N_b \ \leqslant \ \sum_{i \geqslant k+1} \left\lfloor \frac{N}{p_i} \right\rfloor \ < \ \frac{N}{2}. \tag{3}$$

现在再看 N_s. 把每个只有小素数因子的 $n \leqslant N$ 写成 $n = a_n b_n^2$ 的形式, 这里 a_n 是没有平方因子的部分. 每个 a_n 也就是一些互异的小素数的乘积, 所以一共恰好有 2^k 个可供选择的没有平方因子的部分. 另一方面, 由于 $b_n \leqslant \sqrt{n} \leqslant \sqrt{N}$, 至多有 $\sqrt{N}$ 个不同的平方部分, 所以

$$N_s \ \leqslant \ 2^k \sqrt{N}.$$

因为 (3) 对任意的 N 都成立, 只需找到一个满足 $2^k\sqrt{N} \ \leqslant \ \frac{N}{2}$ 亦即 $2^{k+1} \leqslant \sqrt{N}$ 的 N 就行了. 那么令 $N = 2^{2k+2}$ 即可. □

参考文献

[1] B. Artmann: *Euclid – The Creation of Mathematics,* Springer-Verlag, New York 1999.

[2] P. Erdős: *Über die Reihe* $\sum \frac{1}{p}$, Mathematica, Zutphen B **7** (1938), 1-2.

[3] L. Euler: *Introductio in Analysin Infinitorum,* Tomus Primus, Lausanne 1748; Opera Omnia, Ser. 1, Vol. 8.

[4] H. Fürstenberg: *On the infinitude of primes,* Amer. Math. Monthly **62** (1955), 353.

Bertrand 假设

第 2 章

我们已经看到素数列 $2,3,5,7,\cdots$ 是无限的. 其实, 素数列的间隙也无上限. 令 $N := 2\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot p$ 表示所有小于 $k+2$ 的素数之积, 容易证明下面的 k 个数

$$N+2, N+3, N+4, \cdots, N+k, N+(k+1)$$

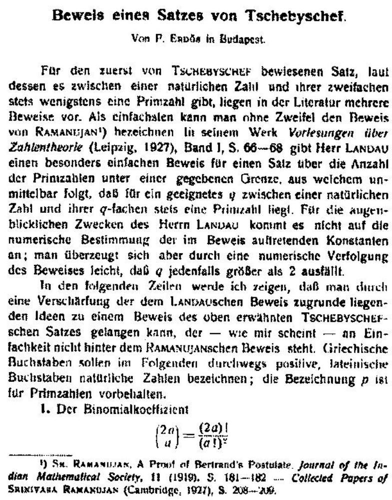
中没有素数. 因为满足 $2 \leqslant i \leqslant k+1$ 的 i 一定有小于 $k+2$ 的素因子. 该素因子必定整除 N, 所以也整除 $N+i$. 例如, 取 $k=10$, 可以找到下面的 10 个相继整数

$$2312, 2313, 2314, \cdots, 2321,$$

其中没有素数.

但是素数序列的间隙还是有上界的. 一个著名的上界是这样描述的: "到下一个素数的距离不可能大于我们出发的这个数." 这就是 Bertrand 假设. Joseph Bertrand 提出了这个猜想并且验证了 $n < 3\,000\,000$ 的情形. 1850 年, Pafnuty Chebyshev 第一个对所有的 n 做出证明. 印度天才Ramanujan则给了一个简化得多的证明. 下面属于Paul Erdős 的天书证明取自 1932 年Erdős 发表的第一篇文章, 那时他 19 岁.

Joseph Bertrand



Beweis eines Satzes von Tschebyschef.

Von P. ERDÖS in Budapest.

Für den zuerst von TSCHEBYSCHEF bewiesenen Satz, laut dessen es zwischen einer natürlichen Zahl und ihrer zweifachen stets wenigstens eine Primzahl gibt, liegen in der Literatur mehrere Beweise vor. Als einfachsten kann man ohne Zweifel den Beweis von RAMANUJAN[1]) bezeichnen. In seinem Werk *Vorlesungen über Zahlentheorie* (Leipzig, 1927), Band I, S. 66—68 gibt Herr LANDAU einen besonders einfachen Beweis für einen Satz über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grenze, aus welchem unmittelbar folgt, daß für ein geeignetes q zwischen einer natürlichen Zahl und ihrer q-fachen stets eine Primzahl liegt. Für die augenblicklichen Zwecken des Herrn LANDAU kommt es nicht auf die numerische Bestimmung der im Beweis auftretenden Konstanten an; man überzeugt sich aber durch eine numerische Verfolgung des Beweises leicht, daß q jedenfalls größer als 2 ausfällt.

In den folgenden Zeilen werde ich zeigen, daß man durch eine Verschärfung der dem LANDAUschen Beweis zugrunde liegenden Ideen zu einem Beweis des oben erwähnten TSCHEBYSCHEFschen Satzes gelangen kann, der — wie mir scheint — an Einfachkeit nicht hinter dem RAMANUJANschen Beweis steht. Griechische Buchstaben sollen im Folgenden durchwegs positive, lateinische Buchstaben natürliche Zahlen bezeichnen; die Bezeichnung p ist für Primzahlen vorbehalten.

I. Der Binomialkoeffizient

$$\binom{2a}{a} = \frac{(2a)!}{(a!)^2}$$

[1]) SR. RAMANUJAN, A Proof of Bertrand's Postulate. *Journal of the Indian Mathematical Society*, 11 (1919). S. 181—182 — *Collected Papers of Srinivasa Ramanujan* (Cambridge, 1927), S. 208—209.

Bertrand 假设.

对每个 $n \geqslant 1$, 存在素数 p 满足 $n < p \leqslant 2n$.

■ **证明.** 我们足够仔细地估计 $\binom{2n}{n}$ 的大小, 将说明如果它没有满足 $n < p \leqslant 2n$ 的素因子, 它就会 "太小" 了. 以下分五步论证.

(1) 先对 $n < 4000$ 证明Bertrand假设. 这不必验证 4000 种情形: 只要 (这称作 "Landau技巧") 证实

$$2, 3, 5, 7, 13, 23, 43, 83, 163, 317, 631, 1259, 2503, 4001$$