怎样学好数学

三角

上海教育出版社

怎样学好数学

三角

怎样学好数学

三　角

复旦附中　徐继文

上海教育出版社

怎样学好数学

三　角

复旦附中　徐继文

上海教育出版社出版发行

（上海永福路123号）

各地新华书店经销　上海市崇明印刷一印刷

开本 787×1092　1/32　印张 7.25　字数 157,000

1990年8月第1版　1990年8月第1次印刷

印数 1—4,300本

ISBN 7-5320-1573-4/G·1528　　定价：2.00元

写在前面

数学是现代科学的基础学科之一，数学水平的高低将会直接或间接地影响我国科学技术的发展。为了帮助青年学生在中学阶段系统而又牢固地掌握基础的基础，加深对中学数学基本概念、公式的理解，熟练基本运算技能，锻炼积极思维，培养分析问题和解决问题的能力，我们编写了这套《怎样学好数学》的小丛书，供中学生、自学青年参考、学习之用。

这套小丛书是以中学现行数学课本为依据而编写的，合共十册：初中代数、几何各两册；高中代数两册；三角、立体几何、解析几何各一册；数学学习与思考一册。在内容编排上力求配合教材，在知识方面适当地作了拓广。它的特点是，每册书的每章内容大致从五个栏目去展开的：(1) 知识拓广（基础知识），(2) 疑难辨析，(3) 解题方法，(4) 错在哪里，(5) 练习和思考。具体体现如下：

在知识拓广部分：介绍一些数学知识产生的背景；围绕教材的重点、难点，有针对性地讲清基本概念，从不同的角度定义某一概念，以及扩展和这一内容有关的知识，使学生比较深入地理解和掌握基础知识。

在疑难辨析部分：对教材中的难点或学生容易混淆的概念，讲清知识的内在联系和本质的区别，同时作一定的对比、分析，使学生养成严密地剖析思维的良好习惯。

在解题方法部分：介绍几种典型例题的解题思路，指导学生的解题途径，有的采取一题多解，开扩学生的解题思路和

判断解法优劣的能力，有的采取小综合题，提高学生运用知识的能力和培养分析的习惯。至于在证题方法中，除了指导学生掌握定理本身的内容外，还引导学生掌握证明过程中所用到的方法。

在错在哪里部分：中学生目前在学习数学中，常常由于审题不周密，或者概念不清楚，或者推理无依据，或者讨论不全面，或者计算不准确，或者作图不认真而导致这样和那样的错误，故在分析和订正里引导学生认真剖析错误所在，找出造成错误的原因，然后订正错误，总结教训，有利于学生从反面加深对基础知识的理解和基本技能的掌握，从而提高分析问题和解决问题的能力。

在练习和思考部分：安排一定数量的练习题和思考题，引导学生独立思考，复习和巩固已学的知识，进一步提高运算能力、逻辑思维能力和空间想象能力。

这套小丛书由本市上海中学、复旦附中、华东师大一附中、华东师大二附中、五十一中学、七一中学、杨浦区教育学院部分数学教师协同编写。由于我们水平有限，又缺乏编写经验，缺点、错误一定存在，希望多加批评指正。

唐秀颖

一九八五年八月

目　录

第一章 任意角的三角函数

基础知识

1. 角的概念的推广

在平面几何中角的概念是个静止的几何图形，即由一点引出的两条射线所组成的图形叫做角. 在三角学中把角看成是由一条射线从原来的位置开始，绕它的端点旋转到某个位置而形成的. 这一概念的发展是一个从静到动的飞跃，它把角的范围和应用扩展到一个更广阔的领域里去. 按平面几何中角的定义，不论采用什么度量制，角的量数只能是个不大于周角的量数的正数；而把角视为一个旋转量时，由于射线从始边位置出发绕端点旋转，不但可以按逆时针或顺时针两个不同的方向转到一周内的任何位置，而且转一周回复到始边位置后，还可以继续再转，超过一周、二周以至任意周. 这样，角的量数就可以是任意的实数. 这种任意角的概念更能适应生产实践的需要.

角的概念推广后，有几点是值得我们注意的：

(1) 在平面几何中，两个角是否相等可以通过叠合图形的办法来考察，移图叠合后，只要它们的两边能完全重合，这两个角就相等（或其和为360°）. 角的概念推广后就不能这样了，因为角是由射线旋转而成的，两个角是否相等不仅决定于它们的两边是否能够重合，还决定于它们由始边旋转到终边的旋转量（包括旋转的方向和量数）是否相等. 相同的始边

和终边可以对应着无数个量数不同的角。

(2) 角的概念推广后，以直角坐标系的原点为顶点，以 x 轴的正半轴为始边，对于每一个实数都有一个以此实数为量数的角与它对应；反之，对于每一个确定的角，都有一个作为它的量数的那个实数与它对应。因此角的集合与实数集合之间可以建立起一一对应关系。

(3) 根据角的正负值的规定可知：对已知的角 α 加一个正角 β，就相当于将角 α 的终边按逆时针方向再旋转一个 β 角；对角 α 加一个负角 β，就相当于将角 α 的终边按顺时针方向旋转一个量数等于 $|\beta|$ 的角。

2. 角的弧度制

我们已经有了一个度量角的角度制，为什么还要引进角的弧度制呢？我们知道，度量单位的选择决定于实践的需要，用度为单位来度量角的大小，在日常生活和一般生产实践中已经为人们所习惯，但并非在一切领域中角度制都是最适宜的，例如炮兵常采用一种叫做密位的单位$\left(\text{一密位等于周角的}\frac{1}{6000}\right)$来度量角更为方便。而在科学理论的研究中却是采用弧度制来度量角较为方便。为了认识这个问题，我们不妨从弧长的计算来看：

在半径为 r 的圆中圆周长是 $2\pi r$。根据“在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弧也相等”这一定理可知

1° 的圆心角所对的弧长为 $\dfrac{2\pi r}{360}$。

设圆心角 α 的度数为 $n(n\geqslant0)$，它所对的弧长为 l，则

$$l=\frac{2\pi r}{360}\cdot n,$$

即 $$l=\frac{n\pi r}{180}.$$

这就是在角度制中计算弧长的公式. 由此公式可得

$$n=\frac{180}{\pi}\cdot\frac{l}{r}.$$

在此式中, $\frac{180}{\pi}$ 是个常数,因此角 α 的度数 n 是比值 $\frac{l}{r}$ 的函数, 比值 $\frac{l}{r}$ 确定了,圆心角 α 也随之确定; 比值 $\frac{l}{r}$ 变,圆心角 α 也变. 例如 $\frac{l}{r}=1$, 角 α 的度数就等于 $\frac{180}{\pi}$; $\frac{l}{r}=2$, 角 α 的度数就等于 $\frac{180}{\pi}\times 2$; $\frac{l}{r}=3.5$, 角 α 的度数就等于 $\frac{180}{\pi}\times 3.5$. 一般地说, 只要知道 $\frac{l}{r}$ 等于几, 角 α 就等于几个 $\frac{180}{\pi}$ 度的角. 因此, 如果我们取 $\frac{180}{\pi}$ 度的角作为一种新的度量角的单位,把它叫做弧度(或弪),则角 α 的量数就纯粹由 $\frac{l}{r}$ 来确定, $\frac{l}{r}$ 等于几, 角 α 的量数也就等于几弧度. 特别地当 $\frac{l}{r}=1$ 时, 角 α 的量数就是一弧度, 这就是课本上关于弧度的定义:"等于半径长的圆弧所对的圆心角叫做一弧度的角".

显然, 在弧度制里圆心角的弧度数 $\alpha(\alpha\geqslant 0)$ 与弧长 l、半径 r 之间的关系能简单地表示为

$$\alpha=\frac{l}{r},$$

从而弧长公式也简化为 $l=r\alpha$*.

由于弧度制简化了圆心角、弧长和半径之间的关系,就使

* 这里 $\alpha\geqslant 0$. 如果 $\alpha<0$, 则弧长公式应是 $l=r|\alpha|$.

得数学中的许多公式都可以取得比较简单的形式，从而方便了理论研究。这就是弧度制优越性之所在，也是我们要引进和学习弧度制的基本原因。读者必须逐步习惯使用这种度量角的制度，除了要熟悉弧度的定义和掌握角度制与弧度制的换算方法外，还要记住30°、45°、60°、90°、180°、270°、360°等一些常用角的弧度数。

3．终边相同的角的集合

在直角坐标系内，以原点为顶点，以x轴的正半轴为始边，与角α终边相同的角可以用一个通式来表示，当α的量数是度数时，即$k\cdot 360°+\alpha(k\in Z)$；当$\alpha$的量数是弧度数时，即$2k\pi+\alpha(k\in Z)$。由这个通式能得到与角$\alpha$终边相同的任何一个角，而不能得到终边在其他位置的任何一个角。因此，与角α的终边相同的角的集合，即$\{\beta|\beta=k\cdot 360°+\alpha,\ k\in Z\}$或$\{\beta|\beta=2k\pi+\alpha,\ k\in Z\}$。

这里有两点值得我们注意：

(i) 终边相同的角的通式的形式不是唯一的。因为对应于同一终边有无数个角，我们任取其中的一个为基础都能写出终边与它相同的一切角的通式，例如与$-120°$角的终边相同的角的通式可以写成：

$$k\cdot 360°-120°(k\in Z),$$

也可写成
$$k\cdot 360°+240°(k\in Z),$$
$$k\cdot 360°+600°(k\in Z),$$
$$k\cdot 360°-480°(k\in Z),\text{等等。}$$

显然，以上这些通式仅相差360°的整数倍，因此它们所表示的集合是同一集合。习惯上常取0°～360°间的角(在弧度制中即取0～2π间的角)或绝对值最小的角为基础来写通式，因为这样从通式中比较容易看出角的终边在哪个象

限。

(ii) 有时几个终边不同的角的通式可以合并写成一个通式。

例 写出终边在 x 轴上的角的集合。

解 当角的终边在 x 轴的正半轴上时，角的通式为：

$$k\cdot 360°\ (k\in Z)，\text{即}\ 2k\cdot 180°\ (k\in Z)，\quad ①$$

当角的终边在 x 轴的负半轴上时，角的通式为：

$$k\cdot 360°+180°\ (k\in Z)，$$

即

$$(2k+1)\cdot 180°\ (k\in Z)，\quad ②$$

① 式表示 $180°$ 的任意偶数倍，② 式表示 $180°$ 的任意奇数倍，因而这两个通式可合并成一个通式，

即

$$n\cdot 180°\ (n\in Z)，$$

∴ 终边在 x 轴上的角的集合为

$$\{\alpha\,|\,\alpha=n\cdot 180°，n\in Z\}.$$

思考：怎样用一个通式写出终边在 y 轴上的角的集合？

4. 任意角的三角函数

三角函数概念的发生与发展，经历了一个很长的时期。从历史上看，三角学是伴随着测量与天文学的研究而产生的，为了测量就要解三角形，而每一个三角形都可以分为两个直角三角形，所以如何解三角形的问题就更本质地变为如何解直角三角形的问题。虽然远在公元前人们就知道了直角三角形中角与角和边与边之间的关系，即 $A+B=90°$ 和 $a^2+b^2=c^2$，但由此还解决不了解直角三角形的问题。例如已知直角三角形的一个锐角和任意一条边的长度，或已知任意两条边的长度，都能唯一地确定这个三角形，但是如果不通过作图和度量，纯粹用计算的方法是无法求出其他元素的值的。为了

解决这一问题，促使人们考虑，必须建立直角三角形中边与角之间的联系。人们从相似三角形的原理发现，不论直角三角形的大小如何，它的任意一个锐角都可由任意两边的比值来确定。因此，如果把各个不同锐角的直角三角形的某两边之比的比值预先算出来，就可以利用它来解直角三角形了。在古希腊时代的天文学家托勒密（约公元85—165年）的著作中，就已出现了在固定的圆中，从0°到180°每隔半度的圆心角所对的弦长表。以今天的观点来看，也就是从0°到90°每隔四分之一度的正弦表。这一弦长表的产生，对解三角形来说犹如“绝处逢生”，开拓了一条广阔的新路。同时它也孕育了锐角三角函数的概念。其后，经历了一个较长的历史时期，经过许多人的勤奋研究，制作了大量的三角函数表，先后引进了六个三角函数的概念，并使用文字符号来表示这些三角函数，建立起有关它们的一些公式，从而使三角学逐步发展成为一个独立的科目。

18世纪的伟大数学家欧拉首先提出了用圆中某些线段与半径之比来定义三角函数，这不但为我们今天所采用的三角函数的坐标定义奠定了基础，而且使三角学从只是研究三角形的解法中解脱出来，为三角函数的理论研究和应用开拓了广阔的天地。

在三角函数的定义中，自变量与函数间的对应关系，原是通过几何方法建立起来的。但随着近代分析数学的发展，三角学的解析理论也得到发展，现在已完全可以不依赖于几何意义的陈述，而用解析的方法来直接定义三角函数。这远远超出了中学课程的范围，这里就不去说它了。

对于三角函数的坐标定义应明确以下几点：

(i) 根据相似三角形的性质可以知道，被定义为任意角

α 的三角函数的六个比 $\frac{y}{r}$，$\frac{x}{r}$，$\frac{y}{x}$，$\frac{x}{y}$，$\frac{r}{y}$，$\frac{r}{x}$ 的比值仅与角 α 的取值有关，而与角 α 的终边上所取的 P 点的位置无关. 对于每个确定的 α 值，这六个比都各有唯一的值(除分母为 0 的情况外)与之对应，所以按照函数的一般概念，这六个比都可以视为角 α 的函数.

(ii) 根据三角函数的坐标定义，直接可以得出各三角函数中角 α 的可取值集合(亦即各三角函数的定义域)，对此要给予充分的注意，结合定义把它们记住.

在 $\sin\alpha=\frac{y}{r}$ 中，$\because$ $r\neq 0$，$\therefore$ 不论角 α 的终边在什么位置，$\frac{y}{r}$ 总有唯一的值与之对应，$\therefore$ α 的可取值集合即为实数集 R.

同理，在 $\cos\alpha=\frac{x}{r}$ 中，$\alpha\in R$.

在 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}$ 中，当 α 的终边在纵轴上时，$x=0$，$\frac{y}{x}$ 失去意义；而当 α 的终边在纵轴以外的任意位置时，$x\neq 0$，$\frac{y}{x}$ 总有唯一的值与之对应，$\therefore$ α 的可取值集合为

$$\left\{\alpha \mid \alpha\in R,\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z\right\}.$$

同理，在 $\sec\alpha=\frac{r}{x}$ 中，α 的可取值集合亦为

$$\left\{\alpha \mid \alpha\in R,\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z\right\}.$$

而在 $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}$ 与 $\csc\alpha=\frac{r}{y}$ 中，α 的可取值集合为

$$\{\alpha \mid \alpha\in R,\ \alpha\neq k\pi,\ k\in Z\}.$$

(iii) 三角函数原是以角为自变量的函数，但是在实际应

用中，我们所考虑的往往不是角的本身，而是角的量值. 实际上，由于角集与实数集之间的一一对应关系，我们可以把角作为中间变量，而把三角函数视为以实数为自变量的函数，即：实数$\longrightarrow$角$\longrightarrow$三角函数值.

这里要注意的是：当把三角函数视为以实数为自变量的函数时，总是约定以角的弧度数作为自变量的值.

显然，这样建立起来的以数值为自变量的三角函数，仍然是以几何理论为基础的，函数与自变量之间的对应规律，仍需按几何方法来建立. 因此，平时在应用中为了方便起见，我们可以仍然保持几何术语，例如把"数 x 的正弦"说成是"角 x 的正弦"等.

把三角函数视为以实数为自变量的函数，就更切合函数是从一个非空数集到另一个非空数集上的映射这一概念，从而使三角函数具有更广泛的意义，而有利于应用. 例如在物理学中，以三角函数表示振动或表示交流电的电流时，自变量都是时间的量值.

5. 同角三角函数的关系

根据三角函数的定义推出的同角三角函数的八个关系式，是对三角函数式进行恒等变形的常用公式，除了必须熟记外，还应注意以下几点：

(i) 要灵活掌握公式，善于变形，做到一式多用. 例如由商数关系 $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ 可得

$$\sin\alpha=\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\alpha \text{ 和 } \cos\alpha=\frac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

但是公式变形后，角 α 的可取值范围也可能发生变化，例如在 $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ 中，α 的可取值范围是