高中数学专题复习

主　编　翟连林

副主编　叶龄逸　王学功

北京理工大学出版社

高中数学专题复习

主　编　翟连林

副主编　叶龄逸　王学功

北京理工大学出版社

（京）新登字149号

内 容 简 介

本书集知识归纳、方法总结、能力培养于一体。

本书的编写以突出重点、抓住关键、解决难点、培养能力为宗旨，在认真总结多年高中数学总复习经验及对历届高考试题全面分析的基础上，把高中数学内容精心分成22个专题进行论述和归纳，并附有三套综合测试题。

本书是高中毕业班学生进行数学总复习的好教材，也是高一、二年级学生配合教学学好数学的好辅导书。

高中数学专题复习

主编 翟连林　副主编 叶龄逸 王学功

*

北京理工大学出版社出版

（北京海淀区白石桥路7号）

北京市平谷华光印刷厂印刷

*

新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经销

开本：787×1092毫米　1/32　10.1875印张　228千字

1993年1月第1版　　1993年1月第1次印刷

印数：1-10000册　　定价：5.50元

ISBN7-81013-673-9/G·164

目　录

第1讲　集合论初步

河南省郑州市19中学　刘德存
河南省郑州外语学校　李素寅

现行高中教材，对集合这一最原始最基本的概念，讲了它的特征、分类、表示法及集合间的基本关系，这些知识是集合的主要内涵。由于集合的外延对象涉及范围很广，渗透到代数、三角和几何的各个领域，甚至高考的压轴题也以集合形式出现，这就造成了“集合无所不包，防不胜防”的错觉，增加了学习的难度。其实，只要弄清题中集合元素的意义及读懂集合的语言，即掌握了它的内涵，有关集合的题目是不难解决的，本讲将通过例题，阐述集合和数学各部分内容的联系及解题的一般思路和方法，为灵活运用集合知识解题奠定基础。

一、集合的概念

例1　（1）用适当的符号表示下列各式：

0____$\varnothing$；0____$\{0\}$；$\{0\}$____$\varnothing$；$\{0\}\cap\{\varnothing\}$____$\varnothing$；$\{\varnothing\}$____$\{\{0\},\varnothing\}$；$\varnothing$____$\{\varnothing\}$。

（2）下列的关系表示法正确吗？

① $\varnothing\subset\{a\}$；　　② $a\subset\{a\}$；

③ $\{a\}\subseteq\{a\}$；　　④ $\{a\}\in\{a,b\}$；

⑤ $a\in\{a,b,c\}$；　　⑥ $\varnothing\in\{a,b\}$。

【答】（1）$\notin$；$\in$；$\supset$；$=$；$\in$；$\in$。

（2）①③⑤正确；②④⑥不正确。

说明：本题是练概念和符号的，元素和集合之间的关系只有“$\in$”与“$\notin$”两种，集与集的关系有“$\subseteq$、$\supseteq$、$\subset$、$\supset$、$=$、$\nsubseteq$、$\nsupseteq$、$\not\subset$、$\not\supset$、$\neq$”等十种，不能把空集写成$\{\varnothing\}$，$\{0\}$或{空集}；$\{\varnothing\}$表示只含有一个元素$\varnothing$的单元素，故有$\varnothing\in\{\varnothing\}$。

例2 在坐标平面内，求满足$x^2+2y^2\leqslant 4$的整点的集合（整点：坐标均为整数的点）。

分析：所给集合是点$(x,\ y)$的坐标x，y满足$x^2+2y^2\leqslant 4$的椭圆及其内部，而所求整点集$M=\{(x,\ y)\ |x^2+2y^2\leqslant 4,\ x, y\in Z\}$是已知集合的子集。如图1-1，符合条件的点有11个。

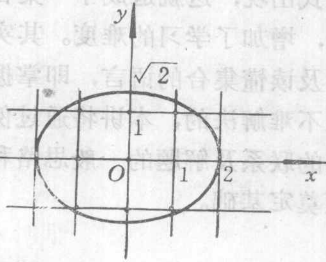


图 1-1

【解】 所求集合为$\{(1,\ -1),\ (1,\ 1),\ (2,\ 0),\ (0,\ 1),\ (0,\ -1),\ (-1,\ 1),\ (-1,\ -1),\ (1,\ 0),(-1,\ 0),\ (0,\ 0),\ (-2,\ 0)\}$。

说明：对元素个数比较少的有限点集，最好用列举法，可画草图以助思考。本题关键是弄清椭圆的范围，即x, y的取值范围。

例3 设全集$I=\{(x,\ y)\ |x,\ y\in R\}$，子集

$$M=\left\{(x,\ y)\ \middle|\ \frac{y-1}{x-2}=2\right\},\ N=\{(x,y)\,|\,y=2x-3\},$$

则$\overline{M}\cap N=$ ______。

分析：集合M表示除点$(2,\ 1)$外的直线$y=2x-3$，故$\overline{M}=\overline{N}\cup\{(2,\ 1)\}$，而点$(2,\ 1)$在$N$所表示直线$y=2x-$

3上，故$\overline{M}\cap N=\{(2,1)\}$。

例4 集合$A=\{(x,y)\mid y>|x|\}$，$B=\{(x,y)\mid y^2<4x\}$，用图形表示$A\cap B$。

【解】 作出$y=|x|$及$y^2=4x$的图象如图1-2，图中阴影部分即为$A\cap B$。

例5 已知$M_1=\{m\mid m=x^2-y^2, x, y\in Z\}$，$M_2=\{m\mid m=2k+1$或$m=4k, k\in Z\}$。问$M_1$与$M_2$的关系怎样？

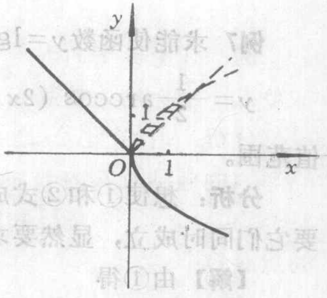


图 1-2

分析：M_1的元素$m=(x+y)(x-y)$，m随x，y的奇偶性改变着奇偶；而M_2的元素m也只有奇偶两种情况，这表明可用证集合相等的方法试证，$M_1=M_2\Longleftrightarrow M_1\subseteq M_2$且$M_2\subseteq M_1$。

【解】 设$m\in M_1$，则存在x，y使得$m=(x+y)(x-y)$。当x，y为一奇一偶时$\Rightarrow m$为奇数，即$m=2k+1$ $(k\in Z)$；当x，y同奇偶时$\Rightarrow m$为4的倍数，即$m=4k$ $(k\in Z)$，所以$m\in M_2$，即$M_1\subseteq M_2$　　①

又设$m'\in M_2$，则$m'=2k+1$或$m'=4k$ $(k\in Z)$，当

$$m'=\begin{cases}2k+1=(k+1)^2-k^2\\4k=(k+1)^2-(k-1)^2\end{cases}$$时$\Rightarrow m'\in M_1$，

即$M_2\subseteq M_1$　　②

由①、②知$M_1=M_2$，即两集合是相等关系。

例6 设$a\in R$，集合$A=\{1,-5,a^2-2a+1\}$，$B=\{-1,4,a^2+4a-2,2-a\}$，且$A\cap B=\{-5,4\}$，求B。

【解】∵ $A\cap B=\{-5,4\}$，∴ $a^2-2a+1=4$，解得 $a=3$ 或 $a=-1$。当 $a=3$ 时，B 中元素 $2-a=-1$，与集合中元素的互异性矛盾，故 $a=-1$，$B=\{-1,4,-5,3\}$。

二、集合的运算及应用

例7 求能使函数 $y=\lg(3-\mathrm{ctg}^2x)$ ①及

$y=\frac{1}{2}\arccos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ ②同时成立的 x 的取值范围。

分析：想使①和②式成立，须分别求出它们的定义域，要它们同时成立，显然要求两定义域的交集。

【解】由①得

$$\begin{cases}x\neq k\pi\\3-\mathrm{ctg}^2x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\neq k\pi\\-\sqrt{3}<\mathrm{ctg}x<\sqrt{3},\end{cases}$$

故①成立时 x 的范围是 $k\pi+\frac{\pi}{6}<x<k\pi+\frac{5}{6}\pi\ (k\in Z)$；

由②得 $-1\leqslant 2x-3\leqslant 1\Rightarrow 1\leqslant x\leqslant 2$。

所以，所求的 x 取值范围是

$$\left\{x\,\middle|\,k\pi+\frac{\pi}{6}<x<k\pi+\frac{5}{6}\pi\right\}\cap\left\{x\,\middle|\,1\leqslant x\leqslant 2\right\}$$

$=\{x|1\leqslant x\leqslant 2\}$.

例8 集合 $A=\{x|2<\log_x 47<3,\ x\in N\}$，

$B=\left\{x\,\middle|\,\left|1-\frac{x}{3}\right|\leqslant\frac{2}{3},\ x\in N\right\}$，

则 $A\cup B=$ ________，$A\cap B=$ ________。

【解】集合 A 的元满足 $\log_x x^2<\log_x 47<\log_x x^3$ ($x\in N$,

$x\neq1$)，则 $x^2<47\leqslant x^3$，∴ x的值只有4，5和6三个，即$A=\{4, 5,6\}$；用解不等式的方法可解得$B=\{x|1\leqslant x\leqslant5, x\in N\}$. 故 $A\cap B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，$A\cup B=\{4, 5\}$.

说明：求集合所含元素或元素的个数，仍然是对已知集合进行转化变形，弄清元素的"身份"，用普通的数学知识和方法求解。

例9 集合$A\subseteq B$是$A\cap C\subseteq B\cap C$的（　　）

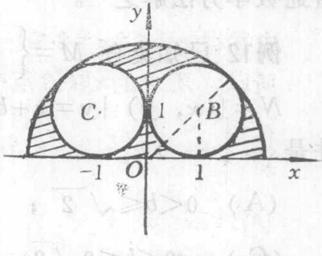
（A）充分不必要条件；　（B）必要不充分条件；

（C）充要条件；　　　（D）既不充分又不必要条件。

分析：条件和结论中，A、B、C的关系很明确，可以分别检验"充分"和"必要"是否成立即可。画图易判别$A\subseteq B\Rightarrow A\cap C\subseteq B\cap C$成立；取$A=\{7, 8\}$，$B=\{5, 9\}$，$C=\{5, 6\}$，则$A\cap C=\varnothing\subseteq B\cap C$，但$A\not\subseteq B$，所以$A\cap C\subseteq B\cap C$，不能推出$A\subseteq B$，故选（A）.

例10 设全集$I=\{(x, y)|x, y\in R\}$，试写出图1-3中x轴，半$\odot O$，$\odot B$和$\odot C$所围成的阴影区域的集合表示法。

【解】 记半$\odot O$与x轴，$\odot B$和$\odot C$所围成的区域分别为A，B和C. ∵ $|OB|=\sqrt{2}$，则$A=\{(x, y)|x^2+y^2\leqslant(\sqrt{2}+1)^2, x\in R, y\in R^+\}$，$B=\{(x, y)|(x-1^2)+(y-1)^2\leqslant1, x, y\in R\}$，$C=\{(x, y)|(x+1)^2+(y-1)^2\leqslant1, x, y\in R\}$，故阴影部分所表示的集合$M=\overline{B\cup C}\cap A$.



1-3

例11 已知$A=\{x|x^2+(p+2)x+1=0, x\in R\}$，若$A\cap R^+=\varnothing$，求$p$的取值范围。

【解】∵ $A\cap R^{+}=\varnothing$，A为一元二次方程的解集，

∴ A有下列三种情况：

（1）$A=\varnothing$，即$\Delta=(p+2)^2-4<0\Longleftrightarrow-4<p<0$；

（2）A为单元集且元素为非正数，即 $\Delta=0\Rightarrow p=0$ 或 $p=-4$。这时 $A=\left\{-\dfrac{p+2}{2}\right\}$，为满足$A\cap R^{+}=\varnothing$，则只能是 $p=0$；

（3）A为两元素集且两元素都是非正数，应有

$$\begin{cases}\Delta>0\\ p+2>0\end{cases}\Rightarrow p>0.$$

综上讨论得$p>-4$。

说明：在认清A的实质后，由$A\cap R^{+}=\varnothing$知方程有两相等非正根，或两相异非正根或无实根三种情况。因为此三种情况都使$A\cap R^{+}=\varnothing$成立，所以要求三解集的并集，解题的关键仍是"认清元素的实质及集合间关系，按符号的意义，用普通数学方法解之"。

例12 已知集合 $M=\left\{(x,y)\,\middle|\,y=\sqrt{9-x^2},\ y\neq0\right\}$，$N=\{(x,y)\mid y=x+b\}$，且$M\cap N\neq\varnothing$，则$b$满足的条件是（　）

（A）$0<b\leqslant\sqrt{2}$；　　（B）$-3\sqrt{2}\leqslant b\leqslant3\sqrt{2}$；

（C）$-3<b\leqslant3\sqrt{2}$；　　（D）$-3\leqslant b\leqslant3\sqrt{2}$。

【解】由已知，集合M是以原点为圆心，3为半径的圆在x轴上方的半圆且不包括端点。集合N是倾角为45°的平行线族。当$M\cap N\neq\varnothing$时，如图1-4，易知应选（C）。

说明：（1）此题若为 $M=\{(x, y)|y^2=9-x^2\}$，其他条件不变，应选(B)；

(2) 若题中不要求 $y\neq 0$，应选(D)；

(3) 若把原题中的 $y\neq 0$ 去掉，把 $M\cap N\neq\varnothing$ 改为 $M\cap N=\varnothing$，答案应为 $b<-3$ 或 $b>3\sqrt{2}$；

(4) 此题若改为求 b 的最值，所用集合知识也是这些。

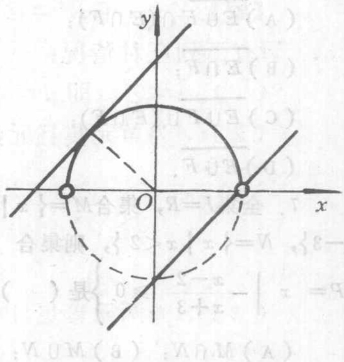


图 1-4

通观以上各例可知，解题所用的集合知识并不多也不复杂，只要理解掌握了集合的概念，性质、语言（各种符号的意义）就够了。但是，集合中元素涉及面广，解题过程中所用方程各异，这就要特别注意"横向思维"——注意和数学各部分内容的联系。

练 习 题

1．用描述法表示大于3小于11的偶数集．

2．设 $A=\{x \mid x\leqslant 8, x\in N\}$，$B=\{y \mid y^2-7y-8=0, y\in N\}$，$C=\{x \mid x\neq x, x\in N\}$．求 $A\cup B$；$A\cap B$；$A\cap\overline{B}$；$A\cup C$；$A\cap\overline{C}$．

3．如果 $A\subseteq C$，$B\subseteq C$，则 $A\cup B\subseteq C$．

4．若 $A\cap B=I$，$A=\{1, 2, 3\}$，求 I 和 B．

5．M，N 是两个集合，则 $M\cup N=M$ 且 $M\cap N=M$ 的充要条件是（　　）

（A）$M\supset N$；（B）$M\subset N$；（C）$M=N$；（D）$N=\varnothing$．

6．图1-5中阴影区域是集合（　　）

(A) $\overline{E\cup F}\cap(E\cap F)$;

(B) $\overline{E\cap F}$;

(C) $\overline{E\cup F}\cup(E\cap F)$;

(D) $\overline{E\cup F}$.

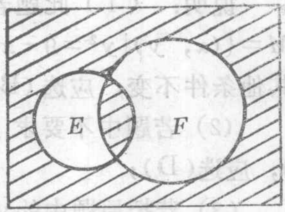


图 1-5

7．全集$I=R$，集合$M=\{x\mid x\geqslant-3\}$，$N=\{x\mid x<2\}$，则集合$P=\left\{x\ \middle|\ \dfrac{x-2}{x+3}\geqslant0\right\}$是(　　)

(A) $M\cap N$；(B) $M\cup N$；(C) $\overline{M}\cap\overline{N}$；(D) $\overline{M}\cup\overline{N}$.

8．已知$M=\{x\mid x=4n,\ n\in Z\}$，$N=\{x\mid x=6n,\ n\in Z\}$，则$M\cap N$为(　　)

(A) $\{x\mid x=2n,\ n\in Z\}$；　　(B) $\{x\mid x=24n,\ n\in Z\}$；

(C) $\{x\mid x=12n,\ n\in Z\}$；　　(D) $\{x\mid x\in Z\}$.

9．2、x、y、n、18五个数组成等比数列时，x为元素的集合是(　　)

(A) $\{2\sqrt{3},\ -2\sqrt{3}\}$；　　(B) $\{2\sqrt{3}i,\ -2\sqrt{3}i\}$；

(C) $\{2\sqrt{3},\ -2\sqrt{3}\}\cup\{2\sqrt{3}i,\ -2\sqrt{3}i\}$；

(D) 以上都不对。

10．设复数$y=x+yi$（x、$y\in R$），作出满足$2\leqslant|y|<4$，$0<|x|\leqslant2$的点所在的区域。

11．用集合表示图1-6（甲）和图1-6（乙）中的阴影区域．

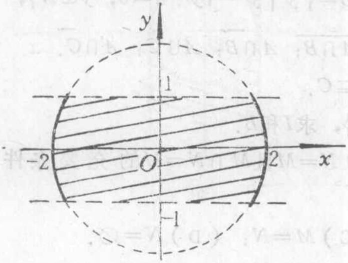


图　1-6(甲)

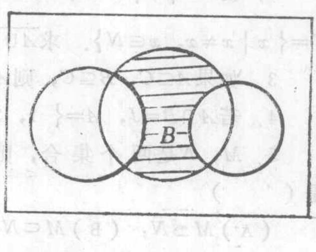


图　1-6(乙)

12. $M=\left\{x \,\middle|\, \dfrac{3x^2-x-4}{x^2+1}<2\right\}$, $N=\left\{x \,\middle|\, \dfrac{4}{x+1}<1\right\}$,

求$M\cap N$；$M\cup N$；$\overline{M}\cap N$；$M\cap\overline{N}$.

13. 设$A=\{x\,|\,x^2+px-3=0,\ x\in R\}$，$B=\{x\,|\,x^2-4x-p+1=0,\ x\in R\}$，$A\cap B=\{3\}$. 求$p$的值及集合$A$和$B$.

14. $M=\left\{(x,\ y)\,\middle|\,\dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{y}{x-2}=-1\right\}$，$N=\left\{(x,\ y)\,\middle|\,\begin{cases}x=1+\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases},\ 参数\ \theta\neq k\pi,\ k\in Z\right\}$. 证明$M=N$.

15. 已知集合A、B各含有15个元素，$A\cap B$含有5个元素，试求同时满足下面两个条件的集合C的个数.（1）$C\subset A\cup B$且C中含有4个元素；（2）$C\cap A\neq\phi$.

答案或提示

1. $\{x\,|\,x=2n,\ 3<x<11,\ n\in Z\}$.

2. A；B；$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$；$A$；$A$.

3. 提示：分$A\cup B=\varnothing$和$A\cup B\neq\varnothing$证之。若$A\cup B=\varnothing$，则命题显然成立；若$A\cup B\neq\varnothing$，设$x\in A\cup B\Rightarrow x\in A$或$x\in B\Rightarrow x\in C$.

4. $I=B=\{1,\ 2,\ 3\}$.

5. C.　6. C.　7. D.

8. C.　9. C.　10. 见图1-7.

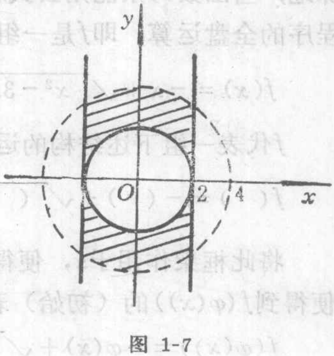


图 1-7

11. $\{(x,\ y)\,|\,|y|<1,\ x,\ y\in R\}\cap\{(x,\ y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 4,\ x,\ y\in R\}$；$\overline{A}\cap\overline{C}\cap B$.

12. 提示：解不等式，得 $M=\{x\,|-2<x<3\}$，$N=\{x\,|x>3$或

$x<-1\}$. 答案为$\{x|-2<x<-1\}$; $\{x|x\neq 3\}$; $\{x|x>3$或$x\leqslant -2\}$; $\{x|-1\leqslant x<3\}$.

13. $p=-2$; $A=\{3, -1\}$; $B=\{3, 1\}$.

14. 提示：图象都是去掉（0, 0）和（2, 0）两点的圆。

15. $A\cup B$中有$15\times 2-5$个元，即各自有10个不同元。∴ 满足(1)的C有C_{25}^4个，其中不满足(2)的有C_{10}^4个。故结论为$C_{25}^4-C_{10}^4$个.

第2讲 函数的概念、性质和图象

河北省保定市第一中学 杨忠良

一、函数的概念

在函数符号$y=f(x)$中，f代表x与y之间的对应法则，特殊地，当函数关系能用公式表出时，f代表解析式中具一定程序的全盘运算，即f是一组运算的框架。例如，对于

$$f(x)=-x+\sqrt{x^2-3x+2} \qquad \left(x<\frac{1}{2}\right) \qquad ①$$

f代表一组下述结构的运算框架：

$$f(\ \ )=-(\ \ )+\sqrt{(\ \ )^2-3(\ \ )+2}\left((\ \ )<\frac{1}{2}\right).$$

将此框架作用于x，便得到$f(x)$；将此框架作用于$\varphi(x)$便得到$f(\varphi(x))$的（初始）表达式：

$$f(\varphi(x))=-\varphi(x)+\sqrt{\varphi^2(x)-3\varphi(x)+2} \qquad \left(\varphi(x)<\frac{1}{2}\right) \qquad ②$$

比较①、②可知，在$f(x)$的表达式中，凡是x的位置上统统换之以$\varphi(x)$，便得$f(\varphi(x))$初始形式。同样，将$f(\varphi(x))$表达式中的$\varphi(x)$统统以x代之，又得$f(x)$的解析式。这种替换，可形象地称之为"同位替换"。从等量替换到同位替换，是从具体到抽象的飞跃。研究函数的性质，或从同位替换入手，或通过同位替换引向深入。

二、函数的性质

函数由定义域、值域和对应法则三要素组成。

1. 定义域和值域

易见，进行$f(x)\to f(\varphi(x))$这一替换，内层函数$\varphi(x)$的值域须不超出$f(x)$的定义域，因而，同位替换应包括两方面：

（1）数学式子中的替换；（2）取值范围的替换。

于是，由（1）导出公式，由（2）导出定义域，进而由双方联合推出函数解析式。应当注意的是，函数的值域建立在定义域之上，求值域不可忽略这一基础。

例1 （1）已知$f(x)$的定义域为$(-\infty,1]$，求函数$f[\log_2(x^2-1)]$的定义域。（2）已知$f(\sin x-1)=\cos^2x+2$，求$f(\lg x)$的解析式。

【解】（1）$\because$ 对于$f(x)$有$x\leqslant 1$，

$\therefore$ 对于$f[\log_2(x^2-1)]$有

$$\begin{cases} x^2-1>0 \\ \log_2(x^2-1)\leqslant 1 \end{cases} \Longleftrightarrow 0<x^2-1\leqslant 2 \Longleftrightarrow$$

$$-\sqrt{3}\leqslant x<-1\text{或}1<x\leqslant\sqrt{3}.$$

即所求函数的定义域为 $[-\sqrt{3}, -1) \cup (1, \sqrt{3}]$.

（2）$f(\sin x-1)=3-\sin^2 x$.

令 $t=\sin x-1$，则 $-2\leqslant t\leqslant 0$，$\sin x=t+1$. 代入上式，

得 $f(t)=3-(t+1)^2=-t^2-2t+2$, $t\in[-2, 0]$.

$\therefore$ $f(\lg x)=-\lg^2 x-2\lg x+2, \lg x\in[-2, 0]$,

即 $f(\lg x)=-\lg^2 x-2\lg x+2, x\in[\frac{1}{100}, 1]$.

说明：（1）已知 $f(x)$ 的定义域为 $[a, b]$，求 $f(\varphi(x))$ 的定义域的一般思路：①求 $\varphi(x)$ 的定义域 A；②求不等式 $a\leqslant\varphi(x)\leqslant b$ 的解集 B。由①、②得 $f(\varphi(x))$ 的定义域 $A\cap B$.

（2）换元是同位替换的有形体现，对此，仍要注意考虑式子和范围两方面，缺一不可。

例2 （1）已知函数 $f(x)=\frac{1+x}{1-x}$，求 $f(f(x))$ 的值域；

（2）求 $f(x)=2x+2\sqrt{1-x^2}-1$ $(x\geqslant 0)$ 的值域.

【解】（1）$\because$ $f(x)=\frac{1+x}{1-x}$ $(x\neq 1)$，

$\therefore$ $f(f(x))=\frac{1+f(x)}{1-f(x)}$ $(x\neq 1$ 且 $f(x)\neq 1)$.

由 $f(x)\neq 1$，得 $x\neq 0$，故

$f(f(x))=-\frac{1}{x}(x\neq 0, 1)$.

由此得 $f(f(x))$ 的值域为 $(-\infty, -1)\cup(-1, 0)\cup(0, +\infty)$.

（2）在这里 $0\leqslant x\leqslant 1$，据此令 $x=\sin\theta$ $\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，

则 $y=2\sin\theta-1+2\sqrt{1-\sin^2\theta}=2\sin\theta+2\cos\theta-1$

$$=2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-1.$$

$\because\quad 0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$,

$\therefore\quad \dfrac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqslant 1$,

$\therefore\quad 1\leqslant y\leqslant 2\sqrt{2}-1$. 即所求函数的值域为$[1,\ 2\sqrt{2}-1]$。

2． **奇偶性**

（1）奇偶性定义的推论：由定义知，若$f(x)$具奇偶性，则对定义域X内任何x，$-x$必属于X。由此可知$f(x)$的定义域X必关于原点对称，此为$f(x)$具奇偶性的必要条件。

例3 设$f(x)=\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin x+\cos x}$，

（1）当$|x|<\dfrac{\pi}{2}$时，判断 $f(x)$的奇偶性；

（2）当$x\in R$时，判断$f(x)$的奇偶性。

【解】（1）在$x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$上，

$$f(x)=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

$\because\quad \left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$是关于原点的对称区间且

$\operatorname{tg}\left(-\dfrac{x}{2}\right)=-\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$，