普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套参考书

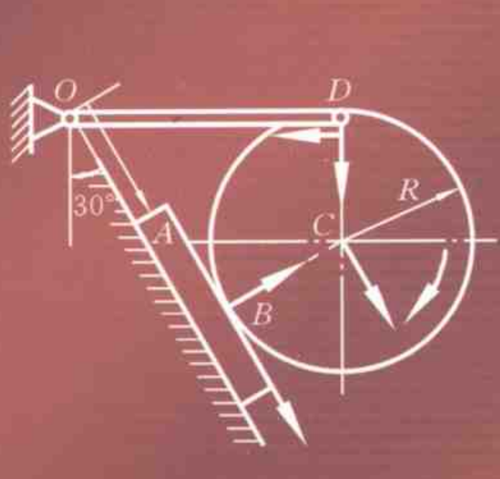
高教版《工程力学（静力学、材料力学、运动学和动力学）》

（北京科技大学、东北大学编）

·运动学和动力学·

工程力学辅导与习题详解 下

赵诒枢　尹长城



华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套参考书

工程力学辅导与习题详解(下)

(运动学和动力学)

高教版《工程力学》(第4版)
(北京科技大学　东北大学合编)

赵诒枢　尹长城

华中科技大学出版社
中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

工程力学辅导与习题详解(下)·运动学和动力学/赵诒枢 尹长城.—武汉:华中科技大学出版社,2009年6月
ISBN 978-7-5609-5453-0

Ⅰ.工… Ⅱ.①赵… ②尹… Ⅲ.工程力学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.TB12

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第094671号

工程力学辅导与习题详解(下)
运动学和动力学　　赵诒枢　尹长城

策划编辑:周芬娜
责任编辑:姚同梅　　封面设计:潘　群
责任校对:汪世红　　责任监印:周治超

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)
武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)87557437

录　排:武汉佳年华科技有限公司
印　刷:通山金地印务有限公司

开本:710mm×1000mm　1/16　印张:9.75　字数:248 000
版次:2009年6月第1版　印次:2009年6月第1次印刷　定价:16.50元
ISBN 978-7-5609-5453-0/TB·116

前　言

北京科技大学和东北大学合编的《工程力学》第4版是普通高等教育"十一五"国家级规划教材，第1版始于1979年，是"文革"结束不久出版的高等工科院校学生必修的三门力学课程教材之一。该书的编者都是当年在教学第一线从事课堂教学、有丰富教学经验的资深教师，如马安禧教授、屈革教授、于绥章教授等。由于该书理论深入浅出、内容丰富、重点突出，并大量选用与工程实际密切结合的例题和习题，所以深受师生欢迎，被众多院校选用为教科书，拥有庞大的读者群。经过30年教学实践，2008年出版了第4版。读者群在不断扩大，备受欢迎。

工程力学是一门与工程实际结合密切的基础学科，是高等工科院校的一门技术基础课。工程力学教学的基本要求是能应用力学原理解决工程实际问题。21世纪计算机的广泛应用极大地提高了解算能力，从而对工程技术人员的力学建模能力和正确分析计算结果的能力要求也相应提高。力学建模能力必须在牢固地掌握了力学基本理论和基本方法的基础上，通过解答习题来逐渐培养和提高。一般在校学生，通常没有足够多的时间去解算大量的各种类型习题。本书中作者结合自己的教学实践，针对学生在解题中经常遇到的疑难和困惑，对每一道题的解答，都着重于解题思路的分析，给出了较详细的解题步骤，并说明了每一步骤的理论依据和使用公式的出处。阅读本书，有助于读者加深对工程力学基本理论和方法的理解，拓宽解题思路，掌握解题技巧，从而提高分析问题和解决问题的能力，特别是提高力学建模的能力。

本书对北京科技大学和东北大学合编的《工程力学》(第4版)中的全部习题作出了详细解答，由赵诒枢(第一篇静力学、第二篇材料力学)和尹长城(第二篇运动学和动力学)解算，全书由赵诒枢教授审阅、校核、修改后定稿。

由于作者水平有限，书中缺点、错误在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

2009年1月

下册目录

第三篇　运动学和动力学

第一章　点的运动 …… (2)
知识要点 …… (2)
习题详解 …… (3)
第二章　刚体的基本运动 …… (12)
知识要点 …… (12)
习题详解 …… (13)
第三章　点的合成运动 …… (20)
知识要点 …… (20)
习题详解 …… (21)
第四章　刚体的平面运动 …… (37)
知识要点 …… (37)
习题详解 …… (37)
第五章　质点的运动微分方程 …… (56)
知识要点 …… (56)
习题详解 …… (56)
第六章　刚体绕定轴的转动微分方程 …… (65)
知识要点 …… (65)
习题详解 …… (65)
第七章　动静法 …… (74)
知识要点 …… (74)
习题详解 …… (74)
第八章　动能定理 …… (89)
知识要点 …… (89)
习题详解 …… (90)
第九章　动量定理和动量矩定理 …… (105)
知识要点 …… (105)
习题详解 …… (107)
第十章　振动 …… (122)
知识要点 …… (122)
习题详解 …… (123)
第十一章　虚位移法 …… (137)
知识要点 …… (137)
习题详解 …… (137)
参考文献 …… (149)

第三篇

运动学和动力学

第一章　点的运动

知识要点

点的运动按轨迹的不同，可分为直线运动和曲线运动。

1. 研究点的运动的基本方法

(1) 矢量法

用一个矢量式表示运动参数的大小和方向，与坐标系无关。矢量形式的运动方程表达简洁，用于理论推导比较方便。

(2) 直角坐标法

是描述点的运动最常用的方法，一般在点的运动轨迹未知的情况下，写出其运动方程，并求得速度和加速度。

(3) 自然坐标法

应用此法描述点的运动，点的运动轨迹必须是已知的。

2. 点的运动方程、速度和加速度

表 1-1　运动方程、速度和加速度

	直线运动	曲线运动		
		矢量法	直角坐标法	自然坐标法
运动方程	$x=f(t)$	$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$	$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ $x=f_1(t)$ $y=f_2(t)$ $z=f_3(t)$	$s=f(t)$
速度	$v=\dfrac{dx}{dt}$	$\boldsymbol{v}=\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$	$\boldsymbol{v}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}$ $v_x=\dfrac{dx}{dt}\quad v_y=\dfrac{dy}{dt}\quad v_z=\dfrac{dz}{dt}$ $v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$	$v=\dfrac{ds}{dt}$
加速度	$a=\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{d^2x}{dt^2}$	$\boldsymbol{a}=\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$	$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$ $a_x=\dfrac{dv_x}{dt}=\dfrac{d^2x}{dt^2}$ $a_y=\dfrac{dv_y}{dt}=\dfrac{d^2y}{dt^2}$ $a_z=\dfrac{dv_z}{dt}=\dfrac{d^2z}{dt^2}$ $a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$	$a_t=\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{d^2s}{dt^2}$ $a_n=\dfrac{v^2}{\rho}$ $a=\sqrt{a_t^2+a_n^2}$

应用上表求解点的运动问题时需要注意以下几点。

① 根据运动特点选择恰当的坐标系。

② 明确坐标系的原点和坐标轴的正向。

③ 列出点的运动方程。

习题详解

1-1　某工厂使用自由落锤砸碎废铁。已知重锤被升高到 9.6 m，然后松开，让锤自由落下砸碎废铁。求重锤刚落到废铁上时的速度和下落所需的时间。

解　重锤作匀变速直线运动，初速度为零，加速度 $g=9.81\ \mathrm{m/s^2}$。重锤刚落到废铁上时，所需的时间由

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

得
$$t=\sqrt{\frac{2s}{g}}=\sqrt{\frac{2\times 9.6}{9.81}}\ \mathrm{s}=1.40\ \mathrm{s}$$

此时，重锤的速度　$v=gt=9.81\times 1.40\ \mathrm{m/s}=13.7\ \mathrm{m/s}$

1-2　某汽车以 36 km/h 的速度行驶，突然刹车，经过 2 s 便停下来。求刹车时的加速度和滑过的距离。

解　在刹车过程中，汽车作匀减速直线运动，初速度 $v_0=36\ \mathrm{km/h}=(36\times 10^3/3600)\ \mathrm{m/s}=10\ \mathrm{m/s}$，末速度为零，则加速度为

$$a=\frac{v-v_0}{t}=\frac{0-10}{2}\ \mathrm{m/s^2}=-5\ \mathrm{m/s^2}$$

汽车滑过的距离　$s=v_0t+\frac{1}{2}at^2=\left[10\times 2+\frac{1}{2}\times(-5)\times 2^2\right]\ \mathrm{m}=10\ \mathrm{m}$

1-3　为测井深，在井口把一石块投入水中。石块初速为零，在 5 s 后听到石块落水时的声音。试计算井口到水面的深度(声速为 340 m/s)。

解　设石块从井口落至水面所需时间为 t_1，则有

$$h=\frac{1}{2}gt_1^2 \qquad ①$$

再设石块落水的声音传至井口所需时间为 t_2，则有

$$h=v_{声}\ t_2 \qquad ②$$

且
$$t_1+t_2=5 \qquad ③$$

由③式，得 $t_2=5-t_1$，代入②式，得

$$h=340(5-t_1) \qquad ④$$

将④式代入①式，得
$$\frac{1}{2}gt_1^2=340(5-t_1)$$

$$\frac{1}{2}\times 9.81t_1^2=340(5-t_1) \qquad ⑤$$

解⑤式，得 $t_1=4.68\ \mathrm{s}$，代回①式，得

$$h=\frac{1}{2}gt_1^2=\frac{1}{2}\times 9.81\times 4.68^2\ \mathrm{m}=107\ \mathrm{m}$$

1-4　一气球用 $2\ \mathrm{m/s^2}$ 的加速度铅直上升，5 s 的时候，从气球上落下一物体。问要经过多少时间这个物体才落到地面？

解　气球 5 s 后的速度为　$v_0=at=2\times 5\ \mathrm{m/s}=10\ \mathrm{m/s}$

上升的高度为　$s_0=\frac{1}{2}at^2=\frac{1}{2}\times 2\times 5^2\ \mathrm{m}=25\ \mathrm{m}$

此时，从气球上落下一物体，此物体将作初速 $v_0=10\ \mathrm{m/s}$ 的向上运动，物体上升至最高点所需的时间为

$$t_1=-\frac{v-v_0}{g}=-\frac{0-10}{9.81}\ \text{s}=1.019\ \text{s}$$

物体在最高点距地面的高度为

$$s=s_0+\frac{1}{2}gt_1^2=\left(25+\frac{1}{2}\times9.81\times1.019^2\right)\ \text{m}=30.09\ \text{m}$$

物体从最高点 s 落至地面所需的时间为

$$t_2=\sqrt{\frac{2s}{g}}=\sqrt{\frac{2\times30.09}{9.81}}\ \text{s}=2.477\ \text{s}$$

物体从脱离气球到落至地面所需时间为

$$t=t_1+t_2=(1.019+2.477)\ \text{s}=3.496\ \text{s}$$

1-5 有长 5 m 的铁链，悬其端点，若从悬点放开铁链，求全链经过悬点下 25 m 所经历的时间。

解 **解法一** 铁链自悬点放开时，是以初速 $v_0=0$ 自由下落。铁链本身长 5 m，因此，全链经过悬点以下的路程不是 25 m，而是(25－5) m＝20 m。因刚松开悬点，铁链除悬点以外，悬点以下各点都没经过 25 m 的路程，所以全链经过的路程不是 25 m，而是 20 m。铁链上端点下降 5 m 所经历的时间

$$t_1=\sqrt{\frac{2s_1}{g}}=\sqrt{\frac{2\times5}{9.81}}\ \text{s}=1.0096\ \text{s}$$

上端点下降 5 m 时的速度

$$v_1=v_0t_1+gt_1=(9.81\times1.0096)\ \text{m/s}=9.904\ \text{m/s}$$

全链落地时，所经历的路程 $s_2=(25-5)$ m＝20 m，由匀加速直线运动公式

$$s_2=v_1t_2+\frac{1}{2}gt_2^2$$

$$25-5=9.904t_2+\frac{1}{2}\times9.81t_2^2$$

解得

$$t_2=1.248\ \text{s}$$

所以，全链经过悬点以下 25 m 所经历的时间为

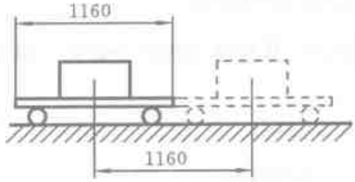
$$t=t_2+t_1=(1.248+1.0096)\ \text{s}=2.258\ \text{s}$$

解法二 利用匀加速直线运动公式，可得全链经过悬点以下 25 m 所经历的时间为

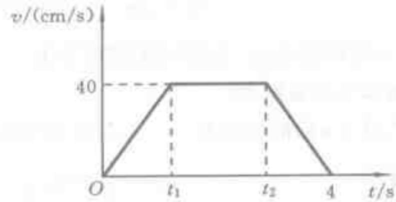
$$t=\sqrt{\frac{2s}{g}}=\sqrt{\frac{2\times25}{9.81}}\ \text{s}=2.258\ \text{s}$$

1-6 间歇式铸工输送器的小车，长 1160 mm(亦即每次运行距离)，如题 1-6 图(a)所示。其运行规律为匀加速—匀速—匀减速。如匀速运动时速度为 $v=40$ cm/s，匀加速和匀减速时加速度数值相等，运行总时间为 4 s，求加速度的数值。

解 **解法一** 图解法。根据小车的运行规律为匀加速—匀速—匀减速，可作小车的 v-t 曲线如题 1-6 图(b)所示。v-t 曲线的几何意义是 v-t 曲线与 t 轴所围的面积，等于这期间的运行距离 s；



(a)



(b)

题 1-6 图

v-t 曲线上任意点的斜率，等于该点的加速度；梯形面积为小车每次运行的距离，如题 1-6 图(b)所示。设匀速段所需的时间为 t，$t=t_2-t_1$，则有

$$s=\frac{1}{2}\times 40(t+4)=116,\quad t=1.8\ \text{s}$$

则匀加速段所需时间为　　$t_1=\frac{4-t}{2}\ \text{s}=\frac{4-1.8}{2}\ \text{s}=1.1\ \text{s}$

匀加速段 v-t 曲线的斜率等于加速度，即

$$a=\frac{v}{t_1}=\frac{40}{1.1}\ \text{cm/s}^2=36.36\ \text{cm/s}^2$$

解法二　解析法。设匀加速(或匀减速)时间为 t_1，则每次运行距离为

$$s=\frac{1}{2}at_1^2+v(4-2t_1)+\frac{1}{2}at_1^2=1160\ \text{mm} \qquad ①$$

式中，v 为小车作匀速运动时的速度，并有

$$v=at_1=400\ \text{mm/s} \qquad ②$$

联立①、②式，得加速度

$$a=364\ \text{mm/s}^2$$

1-7　电车沿直线轨道行驶时，位移与时间的立方成正比，在头半分钟内电车走过 90 m。求在 $t=10$ s 时，电车的速度与加速度。

解　设电车位移 x 与时间 t 的函数关系为

$$x=kt^3\quad (k\ \text{是常数}) \qquad ①$$

则电车的速度　　$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=3kt^2$　　②

电车的加速度　　$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=6kt$　　③

将 $t=30$ s，$x=90$ m 代入①式，得

$$90=k30^3,\quad k=3.333\times 10^{-3}\ \text{m/s}^3$$

$t=10$ s 时，电车的速度为

$$v=3kt^2=3\times 3.333\times 10^{-3}\times 10^2\ \text{m/s}=1\ \text{m/s}$$

$t=10$ s 时，电车的加速度为

$$a=6kt=(6\times 3.333\times 10^{-3}\times 10)\ \text{m/s}^2=0.199\ \text{m/s}^2$$

1-8　半圆形凸轮以等速 $v_0=1$ cm/s 沿水平方向向左运动，而使活塞杆 AB 沿铅垂方向运动，如题 1-8 图所示。当运动开始时，活塞杆 A 端在凸轮的最高点上。如凸轮的半径 $R=8$ cm，求活塞 B 的运动方程和速度。

解　坐标系 x 轴、y 轴方向如题 1-8 图所示，则有

$$x_O^2+y_A^2=R^2 \qquad ①$$

$$x_O=v_0t=1\times t\ (\text{cm})=t\ (\text{cm}) \qquad ②$$

将②式代入①式，得活塞 B 的运动方程

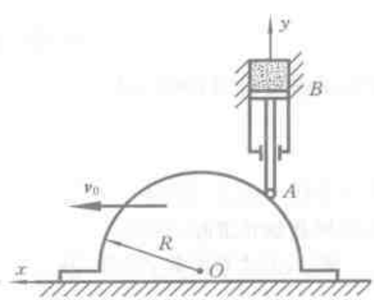
$$y_A=\sqrt{64-t^2}\ (\text{cm}) \qquad ③$$

将①式对时间 t 求导，得

$$x_O\frac{\mathrm{d}x_O}{\mathrm{d}t}+y_A\frac{\mathrm{d}y_A}{\mathrm{d}t}=0$$

即　　$x_Ov_0+y_Av_A=0$　　④

将②、③式代入④式，得活塞 B 的速度



题 1-8 图

$$v_A = \frac{-t}{\sqrt{64-t^2}}\ (\text{cm/s})$$

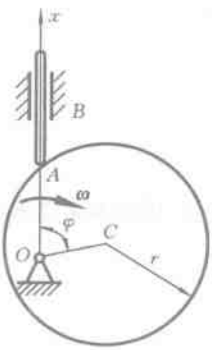
1-9　偏心轮的半径为 r，偏心转轴到轮心的偏心距 $OC=a$，坐标轴 Ox 如题 1-9 图所示。求从动杆 AB 的运动规律。已知 $\varphi=\omega t$，ω 为常数。

解　由题 1-9 图中的几何关系，有

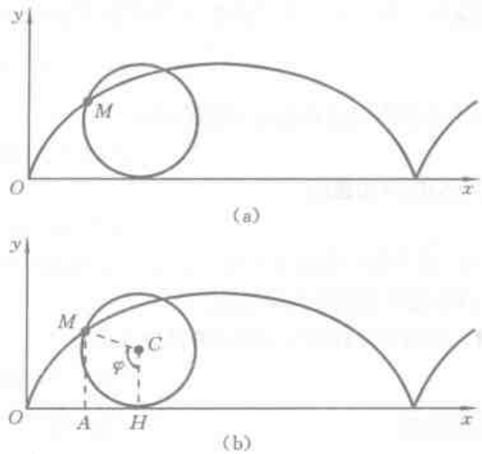
$$x_A = OC\cos\varphi + \sqrt{(AC)^2-(OC\sin\varphi)^2}$$

将$OC=a$，$AC=r$ 代入上式，可得杆 AB 的运动规律

$$x_A = a\cos\varphi + \sqrt{r^2-(a\sin\varphi)^2}$$



题 1-9 图



题 1-10 图

1-10　机车沿直线轨道以等速 $v=20$ m/s 行驶，机车的车轮半径为 $R=1$ m，车轮只滚动不滑动，如题 1-10 图(a)所示。试求轮缘上一点 M 的直角坐标运动方程与初瞬时该点的速度与加速度。取点 M 最初接地时的位置为坐标原点，轨道为 x 轴。

解　在点 M 的运动平面内取直角坐标系 Oxy，如题 1-10 图(b)所示。因车轮只滚不滑，在任意瞬时$OH=\overset{\frown}{MH}$，点 M 的坐标为

$$x = OH - AH = \overset{\frown}{MH} - AH = R\varphi - R\sin\varphi \qquad ①$$

$$y = R + R\cos(180^\circ-\varphi) = R - R\cos\varphi \qquad ②$$

由于轮心 C 作匀速直线运动，初瞬时 MC 与 y 轴重合，故有 $vt=R\varphi$，代入①、②式，得点 M 的运动方程

$$x = vt - R\sin\left(\frac{vt}{R}\right) = (20t - \sin 20t)\ (\text{m}) \qquad ③$$

$$y = R - R\cos\left(\frac{vt}{R}\right) = (1-\cos 20t)\ (\text{m}) \qquad ④$$

将③、④式对时间 t 求导，得

$$v_x = 20 - 20\cos 20t \qquad ⑤$$

$$v_y = 20\sin 20t \qquad ⑥$$

将 $t=0$ 代入⑤、⑥式，得　　$v_x=0$，　$v_y=0$

当点 M 接触轨道时，$v=0$。

将⑤、⑥式对时间 t 求导，得

$$a_x = 400\sin 20t \qquad ⑦$$

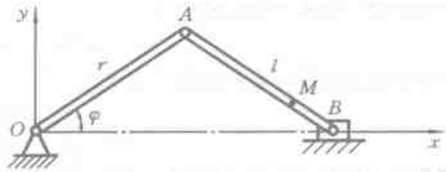
$$a_y = 400\cos 20t \qquad ⑧$$

将 $t=0$ 分别代入⑦、⑧式，得

$$a_x=0,\quad a_y=400\ \text{m/s}^2$$

即当点 M 接触轨道时，$a=400\ \text{m/s}^2$，方向向上。

1-11　曲柄连杆机构 $r=l=60$ cm，$MB=\frac{1}{3}l$，$\varphi=4t$（t 以 s 计），如题 1-11 图所示。求连杆上点 M 的轨迹，并求当 $t=0$ 时，该点的速度与加速度。



题 1-11 图

解　建立直角坐标系 Oxy，动点 M 的坐标为

$$x=r\cos\varphi+\frac{2}{3}l\cos\varphi \qquad ①$$

$$y=r\sin\varphi-\frac{2}{3}l\sin\varphi \qquad ②$$

将 $r=l=60$ cm 分别代入①、②式，得点 M 的运动方程

$$x=100\cos4t \qquad ③$$

$$y=20\sin4t \qquad ④$$

联立③、④式，消去 t，得动点 M 的轨迹方程

$$\frac{x^2}{100^2}+\frac{y^2}{20^2}=1$$

轨迹为椭圆。

将③、④式分别对时间 t 求导，得　$v_x=-400\sin4t$　⑤

$$v_y=80\cos4t \qquad ⑥$$

将 $t=0$ 分别代入⑤、⑥式，得　$v_x=0,\quad v_y=80\ \text{cm/s}$

即当 $t=0$ 时，点 M 的速度为 $v_M=80$ cm/s，方向向上。

将⑤、⑥式分别对时间 t 求导，得　$a_x=-1600\cos4t$　⑦

$$a_y=-320\sin4t \qquad ⑧$$

将 $t=0$ 代入⑦、⑧式，得　$a_x=-1600\ \text{cm/s}^2,\quad a_y=0$

即当 $t=0$ 时，点 M 的加速度 $a_M=-1600\ \text{cm/s}^2$，方向向左。

1-12　飞轮转动时，轮缘上一点按方程式 $s=0.1t^3$ 运动，s 以 m 计，t 以 s 计。设飞轮的半径为 2 m，求当此点的速度 $v=30$ m/s 时，其切向与法向加速度。

解　飞轮轮缘上一点的运动方程为

$$s=0.1t^3 \qquad ①$$

用自然坐标法，将①式对时间 t 求导，得轮缘上一点的速度

$$v=\frac{ds}{dt}=0.3t^2=30 \qquad ②$$

由②式，得　$t=10$ s

将②式对时间 t 求导，得轮缘上一点的切向加速度

$$a_t=\frac{dv}{dt}=0.6\times10\ \text{m/s}^2=6\ \text{m/s}^2$$

轮缘上一点的运动轨迹是圆，其曲率半径为飞轮的半径，法向加速度为

$$a_n=\frac{v^2}{\rho}=\frac{30^2}{2}\ \text{m/s}^2=450\ \text{m/s}^2$$

1-13　飞轮的半径 $R=2$ m，以等加速由静止开始转动。经过 10 s 后，轮缘上各点获得线速度 $v=100$ m/s。求当 $t=15$ s 时，轮缘上一点的速度以及切向和法向加速度。

解　用自然坐标法。飞轮轮缘上一点的运动轨迹是圆，飞轮以等加速由静止开始转动，设轮缘一点的运动方程为

$$s=kt^2\quad（k\ 为待定常数） \qquad ①$$

将①式对时间 t 求导，得轮缘一点的速度

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=2kt \qquad ②$$

将 $t=10$ s，$v=100$ m/s 代入②式得

$$v=2k\times 10\ \mathrm{s}=100\ \mathrm{m/s},\quad k=5\ \mathrm{m/s^2}$$

$t=15$ s 时，轮缘一点的速度为

$$v_1=2kt=2\times 5\times 15\ \mathrm{m/s}=150\ \mathrm{m/s}$$

$t=15$ s 时，轮缘一点的法向加速度为

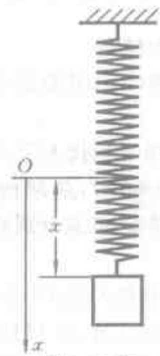
$$a_n=\frac{v_1^2}{\rho}=\frac{150^2}{2}\ \mathrm{m/s^2}=11250\ \mathrm{m/s^2}$$

将②式对时间 t 求导，得轮缘一点的切向加速度

$$a_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=2k=10\ \mathrm{m/s^2}$$

所以当 $t=15$ s 时，轮缘上一点的速度 $v_1=150$ m/s；切向加速度 $a_t=10\ \mathrm{m/s^2}$；法向加速度 $a_n=11250\ \mathrm{m/s^2}$。

1-14　一挂在弹簧下端的重物，在平衡位置点 O 附近上下振动的运动方程式为 $x=2\sin\pi t$ (cm)，其中 t 的单位为 s，如题 1-14 图所示。求重物振动的速度、加速度表达式。并求当 $t=0$、$\frac{1}{2}$ s、1 s 时，物体所在的位置、速度、加速度。



题 1-14 图

解　重物振动的运动方程式为

$$x=2\sin\pi t\ (\mathrm{cm}) \qquad ①$$

将①式对时间 t 求导，得重物振动的速度为

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2\pi\cos\pi t\ (\mathrm{cm/s}) \qquad ②$$

将②式对时间 t 求导，得重物振动的加速度为

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-2\pi^2\sin\pi t\ (\mathrm{cm/s^2}) \qquad ③$$

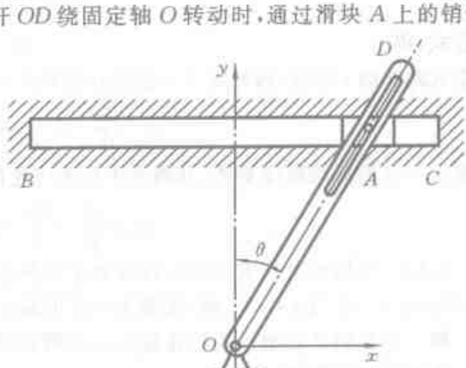
将 $t=0$、$\frac{1}{2}$ s、1 s 分别代入①、②、③式，得

当 $t=0$ 时，$x=0$，$v=2\pi$ cm/s，$a=0$，这时重物在平衡位置，速度达到最大值并向下运动；

当 $t=\frac{1}{2}$ s 时，$x=2$ cm，$v=0$，$a=-2\pi^2\ \mathrm{cm/s^2}$，这时重物在最下端位置，速度为零并开始向上运动；

当 $t=1$ s 时，$x=0$，$v=-2\pi$ cm/s，$a=0$，这时重物又回到平衡位置并向上运动。

1-15　在题 1-15 图所示的摇杆机构中，当摇杆 OD 绕固定轴 O 转动时，通过滑块 A 上的销钉，带动滑块在滑槽 BC 内运动。试写出以 θ 角作为参数来表示的滑块运动方程。若当 $\theta=30°$ 时，摇杆的角速度 $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=3$ rad/s，求此时滑块 A 的速度 v_A。已知点 O 到 BC 的距离为30 cm。



题 1-15 图

解　在题 1-15 图所示的任意瞬时位置，建立摇杆机构的运动方程

$$x=30\tan\theta \qquad ①$$

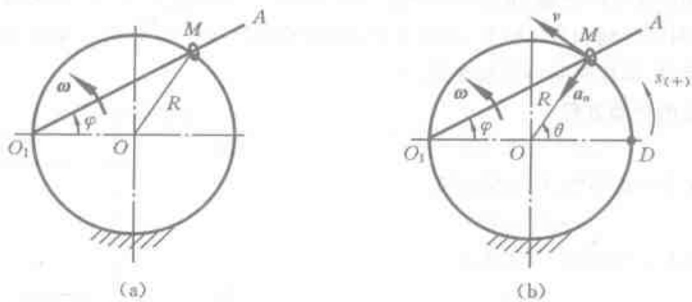
将①式对时间 t 求导，得滑块 A 的速度表达式

$$v_A=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=30\sec^2\theta\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{30}{\cos^2\theta}\times\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \qquad ②$$

将 $\theta=30^\circ$ 和 $\frac{d\theta}{dt}=3\ \text{rad/s}$ 代入②式，得

$$v_A=\frac{30}{\cos^2 30^\circ}\times 3\ \text{cm/s}=120\ \text{cm/s}$$

1-16　细杆 O_1A 绕轴 O_1 以 $\varphi=\omega t$(ω=常数)的规律运动，杆上套有小环 M；小环 M 同时又套在半径为 R 的固定圆圈上，如题 1-16 图(a)所示。求小环 M 的速度与加速度。



题 1-16 图

解　动点 M 的轨迹是以 O 为圆心、以 R 为半径的圆，如题 1-16 图(b)所示。用自然坐标法，取点 D 为弧坐标原点，沿 $\overset{\frown}{DM}$ 方向为弧坐标的正方向，则点 M 的运动方程为

$$s=\overset{\frown}{DM}=R\theta=2R\varphi=2\omega Rt \quad ①$$

将①式对时间 t 求导，得小环 M 的速度

$$v=\frac{ds}{dt}=2\omega R \quad ②$$

将②式对时间 t 求导，得小环 M 的切向加速度 $a_t=0$，小环 M 的法向加速度

$$a_n=\frac{v^2}{\rho}=\frac{(2\omega R)^2}{R}=4\omega^2 R$$

速度 v、法向加速度 a_n 的方向如题1-16图(b)所示。

1-17　已知点的运动方程：$x=50t$，$y=500-t^2$，单位为 m、s。求当 $t=0$ 时，点的切向加速度、法向加速度及轨迹的曲率半径。

解　点的速度分量等于点的运动方程对时间 t 的一阶导数

$$v_x=\frac{dx}{dt}=50,\quad v_y=\frac{dy}{dt}=-2t \quad ①$$

点的加速度分量等于点的速度分量对时间 t 的一阶导数

$$a_x=\frac{dv_x}{dt}=0,\quad a_y=\frac{dv_y}{dt}=-2 \quad ②$$

由①、②式计算速度和加速度，得

$$v^2=v_x^2+v_y^2=50^2+(-2t)^2=2500+4t^2 \quad ③$$

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=\sqrt{(-2)^2}\ \text{m/s}^2=2\ \text{m/s}^2$$

当 $t=0$ 时，速度和加速度分别为

$$v=\sqrt{2500+4t^2}=50\ \text{m/s},\quad a=2\ \text{m/s}^2$$

将③式两边对时间 t 求导，得

$$2v\frac{dv}{dt}=8t \quad ④$$

由④式得 $t=0$ 时，点的切向加速度

$$a_t=\frac{dv}{dt}=0$$

点的法向加速度

$$a_n=\sqrt{a^2-a_t^2}=\sqrt{2^2}\ \mathrm{m/s^2}=2\ \mathrm{m/s^2}$$

点轨迹的曲率半径

$$\rho=\frac{v^2}{a_n}=\frac{50^2}{2}\ \mathrm{m}=1250\ \mathrm{m}$$

1-18　已知点作直线运动，其运动方程：$s=t^3-12t+2$，单位为 m、s。试求：最初 3 s 内的位移；改变运动方向的时刻和所在位置；最初 3 s 内经过的路程；$t=3$ s 时的速度和加速度；点在哪段时间内作加速运动，哪段时间内作减速运动？

解　已知点的运动方程

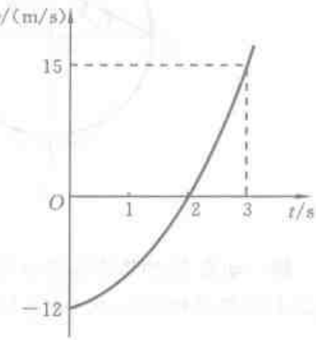
$$s=t^3-12t+2 \qquad ①$$

将①式对时间 t 求一阶导数，得点的速度

$$v=3t^2-12 \qquad ②$$

将②式对时间 t 求一阶导数，得加速度

$$a=6t \qquad ③$$



题 1-18 图

由①式得最初 3 s 内的位移

$$s_{0\sim3}=s_3-s_0=[(3^3-12\times3+2)-(0^3-12\times0+2)]\ \mathrm{m}=-9\ \mathrm{m}$$

点改变运动方向时，速度为零，由②式得

$$3t^2-12=0,\quad t=2\ \mathrm{s}$$

将 $t=2$ s 代入①式，可确定质点的位移

$$s_2=(2^3-12\times2+2)\ \mathrm{m}=-14\ \mathrm{m}$$

最初 3 s 内经过的路程

$$s=|s_{0-2}|+|s_{2-3}|=|s_2-s_0|+|s_3-s_2|=(|-14-2|+|-7+14|)\ \mathrm{m}=23\ \mathrm{m}$$

$t=3$ s 时的速度和加速度分别由②式和③式确定

$$v_3=(3\times3^2-12)\ \mathrm{m/s}=15\ \mathrm{m/s}$$

$$a_3=6\times3\ \mathrm{m/s^2}=18\ \mathrm{m/s^2}$$

由②式可知，点在 0 到 2 s 时间内作减速运动，2 s 以后作加速运动，点运动的 v-t 曲线如题 1-18 图所示。

1-19　题 1-19 图(a)中的减振机构通常用在枪械上以减小反冲力，它由一个连接炮管的活塞和一个充满油的刚性液压缸组成。当炮管以初速度 v_0 产生一个反冲使活塞运动时，油被压进活塞上的小孔，这样炮管与活塞一起按照与其速度成正比例减速，即 $a=-cv$。试：(1) 将 v 表示成时间 t 的函数；(2) 将 x 表示成时间 t 的函数；(3) 将 v 表示成位置坐标 x 的函数，并画出相应曲线。

解　已知

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-cv$$

将上式分离变量后积分

$$\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v}=\int_0^t -c\,\mathrm{d}t$$

将 v 表示成时间 t 的函数

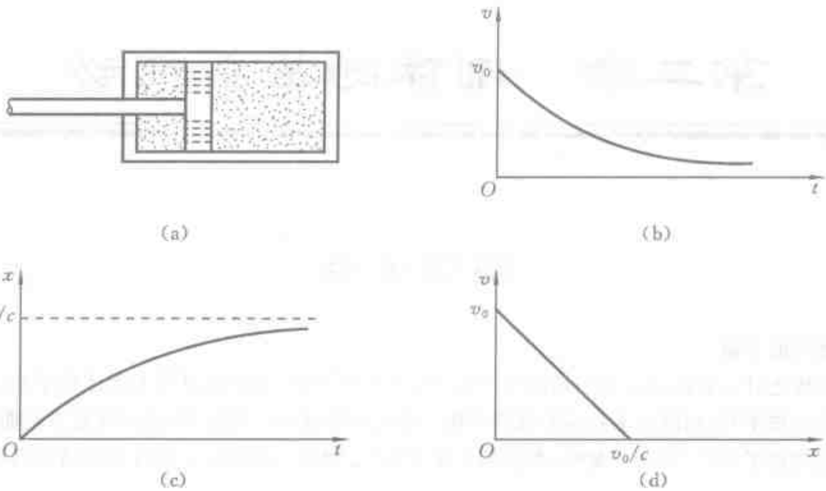
$$v=v_0\mathrm{e}^{-ct} \qquad ①$$

将①式改写成

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v_0\mathrm{e}^{-ct} \qquad ②$$

将②式分离变量并积分

$$\int_0^x\mathrm{d}x=\int_0^t v_0\mathrm{e}^{-ct}\,\mathrm{d}t$$



题 1-19 图

得位移-时间函数表达式为

$$x=\frac{v_0}{c}(1-e^{-ct}) \qquad ③$$

将①式和③式联立，消去 t，得速度-位移函数

$$v=v_0-cx \qquad ④$$

④式也可按如下方法求解

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\times\frac{dx}{dt}=\frac{dv}{dx}v=-cv$$

即

$$dv=-cdx$$

将上式两边积分，即

$$\int_{v_0}^{v}dv=\int_0^x -cdx$$

得

$$v=v_0-cx$$

与①、②、③式相应的曲线如题 1-19 图(b)、(c)、(d)所示。

第二章　刚体的基本运动

知识要点

1. 刚体的平移

① 刚体上任一直线在运动中始终与原来的位置保持平行，这种运动称为刚体的平移。

② 刚体作平移时，刚体上各点的轨迹相同。各点的轨迹可能是直线，也可能是空间曲线。

③ 刚体作平移时，在每一瞬时，各点的速度、加速度相同。刚体的平移可以归结为点的运动来研究。

2. 刚体绕定轴转动

① 刚体运动时，其上或其扩展部分有两点保持不动，这种运动称为刚体绕定轴转动。两固定点之间的连线称为转轴。

② 绕定轴转动的刚体其瞬时位置用转角 φ 表示，刚体的位置随时间 t 的变化规律

$$\varphi=\varphi(t)$$

称为刚体绕定轴转动的转动方程。转角 φ 是代数量。

③ 转角 φ 对时间 t 的导数，称为刚体的角速度

$$\omega=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$

工程上常用转速 n 表示转动快慢。转速 n (r/min 或转/分)与角速度 ω(rad/s)的计算关系式为

$$\omega=\frac{2\pi}{60}\times n=\frac{n\pi}{30}$$

④ 角速度对时间的导数，称为刚体的角加速度

$$\alpha=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}$$

⑤ 匀变速转动公式　　$\omega=\omega_0+\alpha t,\quad \varphi=\varphi_0+\omega_0 t+\frac{1}{2}\alpha t^2$

式中，ω_0、φ_0 分别是刚体在 $t=0$ 时的角速度和转角。

⑥ 定轴转动时刚体上各点的速度和加速度

$$v=r\omega,\quad a_t=r\alpha,\quad a_n=r\omega^2,\quad a=\sqrt{a_t^2+a_n^2}=r\sqrt{\alpha^2+\omega^4}$$

⑦ 定轴轮系的传动比　　$i_{12}=\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{r_2}{r_1}=\frac{z_2}{z_1},\quad i_{13}=i_{12}\times i_{23}$

传动系统的总传动比等于各级传动比的连乘积。

3. 角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$、角加速度矢量 $\boldsymbol{\alpha}$

① 角速度矢量　　$\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{k}$

② 角加速度矢量　　$\boldsymbol{\alpha}=\alpha\boldsymbol{k}$

③ 转动刚体上各点的速度　　$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{r}$

④ 转动刚体上各点的加速度

$$\boldsymbol{a}_t=\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{r},\quad \boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}$$