高等数学

GAODENGSHUXUE

（一）

主编　刘庆元

山东友谊出版社

高等数学

（一）

主　编：刘庆元

副主编：邱汝杰　李　玲

山 东 友 谊 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 1/刘庆元编著. —济南：山东友谊出版社，2008.12

ISBN 978-7-80737-493-0

Ⅰ. 高… Ⅱ. 刘… Ⅲ. 高等数学-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 028911 号

主　　管：山东出版集团
集团网址：www.sdpress.com.cn
出版发行：山东友谊出版社
地　　址：济南市胜利大街 39 号　邮政编码：250001
电　　话：总编室（0531）82098756　82098142
　　　　　发行部（0531）82098035（传真）
印　　刷：济南钢铁集团总公司商贸公司印刷厂
版　　次：2008 年 12 月第 1 版
印　　次：2008 年 12 月第 1 次印刷
规　　格：185mm×260mm
印　　张：11
字　　数：63 千字
定　　价：50.00 元

前　言

马克思和恩格斯非常重视微积分的创建，恩格斯曾有这样的赞誉：“在一切理论成就中，未必再有什么像十七世纪下半叶微积分的发明那样看作人类精神的最高胜利了。”

在变量数学中，决定性的一步是 17 世纪后半叶由牛顿和莱布尼兹创始的微分法和积分法。微积分的诞生，与其说是全部数学史上的一个伟大的创举，不如说是整个人类历史的一个伟大的创举。微积分在数学发展史上可以认为是一个伟大的成就，由于微积分的创立不仅解决了当时的一些重要的科学问题，而且由此产生了数学的一些重要分支，如微分方程、无穷级数、微分几何、变分法、复变函数等。这个伟大的成就当然首先应该归功于牛顿(Newton)和莱布尼茨(Leibniz)，但是在他们创立微积分之前，微积分问题至少被 17 世纪十几个大数学家和几十个小数学家探索过，得出了一些有价值的结论，且具有很大启发性。牛顿和莱布尼茨是在前人的基础上将微积分发展到了高峰。

17 世纪遇到了哪些问题呢？主要有四类问题：第一类是速度和加速度问题。17 世纪遇到的速度和加速度问题大都是变量问题，即变速与变加速。这与 17 世纪以前所遇到的大量常速问题所不同，如何求速度与加速度成为当时科学家们所关心的问题。第二类是切线问题。17 世纪光学是一门重要的学科，例如透镜如何设计，这涉及切线与法线。切线问题在 17 世纪以前虽也解决过，但只限于圆锥曲线，而切线的定义是只与曲线接触一点的直线，这种情况不能适应 17 世纪所遇到的复杂的曲线的切线问题，另外物体运动时在它轨迹上的运动方向也涉及切线。第三类是最大值和最小值问题。炮弹的最大射程如何求，行星运行时离开太阳的最远和最近距离如何求，都是 17 世纪迫切要解决的。第四类是求曲线的长、曲线围成的面积和曲面围成的体积、物体的重心、引力等。这些问题在 17 世纪之前个别地解决过，但必须有较好的技巧，且方法缺乏一般性。

尝试解决这四类问题在牛顿、莱布尼茨之前已经有过不少经验，罗贝瓦尔(Roberval)从炮弹的水平速度与垂直速度构成矩形的对角线出发，认为这条对角线就是炮弹的轨迹切线。牛顿的老师巴罗(Barrow)，也给出了求切线的方法。17 世纪开普勒(Kepler)证明了所有内接于球的、具有正方形底的正平行四面体中立方体的容积最大。当越来越接近最大体积时，相应尺寸的变化对体积的变化越来越小(就是我们现在所说的极值处的导数为 0)。费马(Fermat)在 1629 年已经找到与现在求最大值和最小值的方法实质相同的方法。

卡瓦列利(Cavalieri)在他老师伽利略(Galileo)和开普勒的影响下，并在他老师的敦促下，考查了微积分，并且获得n为正整数时的积分公式(1639年) $\int_0^\alpha x^n dx = \frac{1}{n+1}a^{n+1}$

1634年罗贝瓦尔求出了旋轮线 x=R(t-sint)，y=R(1-cost) 一个拱下的面积。他还求出了正弦曲线一个拱下的面积及它绕底旋转的体积。一些图形的重心也计算出来了。格利哥利(Gregory)在1647年算出了 $\int_\infty^x \frac{dx}{x} = k\ln y[y=\frac{1}{x}]$

以上都是一些具体的结果，在原则性的问题上，如微积分的主要特征——积分与微分互逆，也早为人们所遇到。托里折利(Torricelli)通过特殊的例子看到了变化率问题本质上是面积问题的反问题。费马同样也在特殊的例子中知道了面积与导数的关系。格利哥利1668年证明了切线问题是面积问题的逆问题。巴罗也看到了这种关系，但他们不是没有看到其普遍意义或一般性，就是没引起重视和看到其重要性。17世纪的前三分之二的时间内，微积分的工作被困扰在一些细节问题里，作用不大的细微末节的推理使数学家们精疲力竭了。

在微积分的大量知识已经积累起来的时代里，牛顿和莱布尼茨认识到了微分与积分这种互逆关系的重要性及普遍性，建立起成熟的方法，并且提出了前面叙述的几个主要问题之间的内在联系，从而创立了微积分。

但是，不论牛顿还是莱布尼茨，在创立微积分时都并未弄清楚微积分的逻辑基础。他们在论证自己的结论时，前后说法矛盾。因而不能不引起人们对微积分的批评和指责，这些人中最有名的要算主教贝克莱(Berkeley)和尼文太(Nieuwentijdt)。贝克莱是主教，他更多地从宗教的偏见出发批评微积分，他说牛顿的微积分中的无穷小是“已死量的幽灵”，微积分中的“原则、推理与论断不比宗教的教义说得更为清晰”，但他的指责并非无理。辩论进行了相当长的一段时期。到19世纪20年代，即1821年，数学家柯西(Cauchy)在他的《分析教程》以及此后的《无穷小计算讲义》中给出了微积分中一系列基本概念的严格定义，从而澄清了历史上微积分的逻辑基础。但是，在柯西时代，实数理论尚未完备，因而柯西的极限定义尚有不足之处，现在的极限定义是数学家魏尔斯特拉斯(Weierstrass)加工完成的。

牛顿称微积分为“流数术”(fluxious),这个名称逐渐被淘汰。莱布尼兹使用了“差的计算”(calculus differentialis)与“和的计算” (calculus summatorius)。后来，“差的计算”变成了专门的术语“微分学” (differential calculus),约翰·贝努利主张把“和的计算”改为“求整计算” (calculus integralis),后来成为专门术语“积分学” (integral calculus)，这就是西方

微分学和积分学的来源，两者结合起来叫微积分。在英文中简称calculus。

莱布尼兹第一次明确地表达了求和和微分之间的关系，这就是牛顿莱布尼兹公式。1686年，莱布尼兹发表了《深奥的几何与不可分量及无限的分析》，这是第一篇积分学论文。这篇论文中，他初步论述了求积(积分)问题与切线(微分)问题的互逆关系，还引入了积分概念及其符号。

以前，微分和积分作为两种数学运算、两类数学问题，是分别加以研究的。只有莱布尼兹和牛顿将积分和微分真正沟通起来，明确地找到了两者内在的直接联系：微分和积分是互逆的两种运算。而这是微积分建立的关键所在。只有确立了这一基本关系，才能在此基础上构建系统的微积分学。并从对各种函数的微分和求积公式中，总结出共同的算法程序，使微积分方法普遍化，发展成用符号表示的微积分运算法则。

因此，微积分“是牛顿和莱布尼兹大体上完成的，但不是由他们发明的”。

然而关于微积分创立的优先权，在数学史上曾掀起了一场激烈的争论。后来人们公认牛顿和莱布尼兹是各自独立地创建微积分的。

微积分的伟大意义：第一，提供了定量处理与运动、变化等有关的多种现实问题的强有力方法；第二，解析几何与微积分的建立，标志着数学由初等数学(常量数学)时期向变量数学时期的重要转变以极限方法为主要特征的微积分方法蕴含着十分基本和重要的数学思想；第三微积分的建立，使得数学的基本格局发生了变化，在这之前，数学主要有代数(包括算术)与几何两大领域，而微积分的建立，形成了代数、几何与分析三足鼎立的局面；第四微积分的建立，开辟了全新的、广阔的数学领域，其后数学分析大厦逐步建立。

目 录

第一章　函数　极限　连续

第二章 导数与微分

第三章　导数的应用

第四章 不定积分

第五章 定积分及其应用

第六章 微积分简史

第一章　函数　极限　连续

§1.1　函数概念

一、函数的定义

世间一切事物总是在不停顿地运动变化着，在同一变化过程中，常常有几个变量依照一定规律变化，它们相互联系、相互依赖构成了整个变化过程。我们只研究相互联系的两个变量的变化过程，先举几个例子。

例 1　假设某商品单价 0.5 元，则商品销售量 x 与总收入 y 之间的关系是 $y = 0.5x$

如果每件商品的成本是 A 元，则销售 100 件商品的利润 P 是

$$P = 100(0.5 - A)(\text{元})$$

例 2　由平面几何知，半径为 r 的圆的面积 S 由如下公式计算 $S = \pi r^2$

这个公式表示了圆面积 S 和半径 r 之间的依存关系。

对以上两例，我们作如下分析：

第一，销售量 x 确定之后，总收入 y 由关系式 $y = 0.5x$ 完全确定。成本 A 知道后，销售 100 件商品的利润 P 可由关系式 $P = 100(0.5 - A)$ 求出。半径 r 的值给定后，圆面积 S 的值由公式 $S = \pi r^2$ 也完全确定。这就说明，同一个变化过程中，相互联系的两个变量，当其中一个变量给定某一值之后，按照它们之间的依赖关系，另一个变量就有确定的值与之对应。通常我们就是这样来理解这种变量之间的依赖关系的。

第二，“一个变量给定某一值”的意思是什么呢？是不是随便乱给定呢？当然不是的，这要根据各个问题本身的实际需要和可能而定。例如，商品的销售数量 x 只能取非负值，即 $x \geq 0$；每件商品的成本 A 只能取尽可能小的正值，可表示为 $0 < A < a$；圆半径 r 只能取正值，即 $r > 0$。这就说明，这个变量“给定某一值”是有一定范围的，这

个范围由问题本身的实际意义来确定。

具有这两个共同特点的例子我们还可以举出很多，它们遍及各个学科领域。我们从这些问题的共性出发，研究两个变量之间的依赖关系，由此概括出下面的定义：

设有两个变量 x 和 y，如果当变量 x 在其变化范围内任意取定一个确定数值后，变量 y 按照一定的对应法则都有确定的数值和它对应，则变量 y 叫做变量 x 的函数，记作 $y=f(x)$，其中 x 叫做自变量，y 叫做因变量。

为了能加深对函数定义的理解，下面几点是需要注意的：

1、确定函数的两个要素

确定函数的两个要素是两变量之间的对应法则和自变量的取值范围。

这里有两层意思。一层是两变量的对应法则和自变量取值范围确定之后，这个函数就完全确定；另一层是如果两个函数，它们的两个要素不同或两个要素中有一个不同，那么，这两个函数就不同。例如

$$y=x+1 \text{ 和 } y=\frac{x^2-1}{x-1}$$

表示两个不同的函数，因为前者自变量的取值范围是$-\infty<x<+\infty$，而后者自变量的取值范围是$-\infty<x<1$及$1<x<+\infty$。

自变量的取值范围又称为定义域。由于自变量 x 取定义域中每一个值，函数 y 都有确定值与之对应，所以定义域就是使函数有定义的数的集合。定义域中每一个值所对应的函数值构成的集合称为函数的值域。

2、定义域的求法

在实际问题中，定义域要由实际问题的意义确定。如例 1 所叙述的利润和成本的关系 $P=100(0.5-A)$ 中，成本 A 应取小于 0.5 的正值，否则利润为负值或者无利润。

在数学中，有时不考虑函数的实际意义，只研究用算式表达的函数。这时我们规定：函数的定义域是使函数表达式有意义时自变量所取的实数值的全体。

例 3　求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{1-x^2}$　　(2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(3) $y=\lg(x-1)+\sqrt{3-x}$

解：(1) 因为函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 只有当$1-x^2\geqslant 0$时才有意义，这时 $x^2\leqslant 1$，即$-1\leqslant x\leqslant 1$，所以函数的定义域为闭区间$[-1,1]$。

(2) 因为函数 $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 只有当 $1-x^2>0$ 时才有意义(这是因为作为分母的 $\sqrt{1-x^2}$ 不能取零值)，这时 $x^2<1$，即 $-1<x<1$，所以函数的定义域为开区间 $(-1,1)$。

(3) 对于函数 $y=\lg(x-1)+\sqrt{3-x}$ 来说，只有两个函数 $\lg(x-1)$ 和 $\sqrt{3-x}$ 同时有意义，同时成立它才有意义。这就要求 $x-1>0$ 和 $3-x\geqslant 0$，使这两个不等式同时成立的实数应满足 $1<x\leqslant 3$，所以函数的定义域为区间 $(1,3]$。

3、函数的记号和函数值

函数的定义中把变量 y 是变量 x 的函数这一事实记作 $y=f(x)$。这里记号"f"表示变量 y 和变量 x 之间的对应法则，"$f(x)$"是一个整体记号，不可误认为是 f 与 x 相乘。

在同一个问题中，若遇到几个函数，为了避免混淆，可用不同的记号，例如

$y=g(x)$， $y=F(x)$， $y=\varphi(x)$ 等等

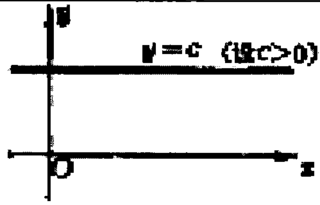
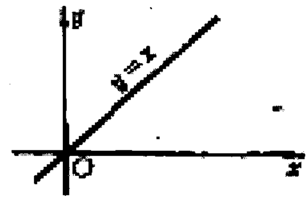
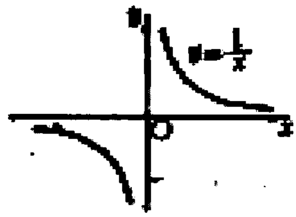
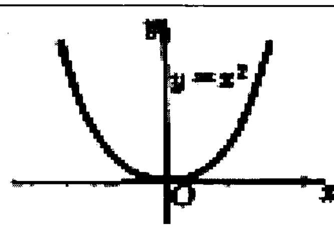
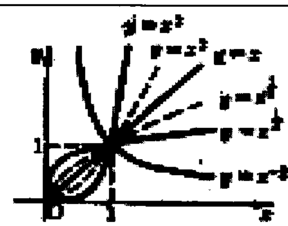
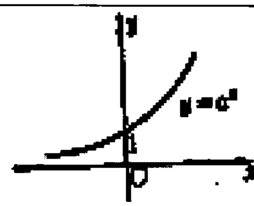
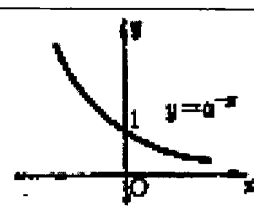
自变量 x 取定某个值 a 时，函数 y 有确定的值与之对应，这个值就是函数值，记作 $f(a)$，或记作 $y|_{x=a}$，例如求函数 $y=x^2-2x+3$ 当为 $x=2$ 时的值时，只要把式中 x 用 2 代替并计算得 $y|_{x=2}=2^2-2\times 2+3=3$

当自变量在定义域中任取一个确定值时，函数都只有一个确定值和它对应，这种函数称为单值函数，否则就称为多值函数。例如，在直角坐标系中，半径为 r 、圆心在原点的圆的方程 $x^2+y^2=r^2$，当 $x=\pm r$ 时，y 只有一个确定值和它们对应，而当 $-r<x<r$ 时，y 有两个确定值和它对应。所以 y 是 x 的多值函数。由于对多值函数的研究总是分解成单值函数进行的，所以今后如无特别说明，我们研究的函数都是单值函数。

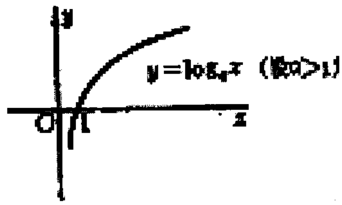
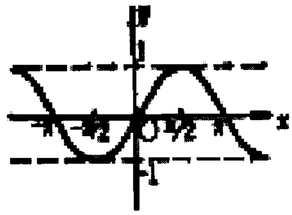
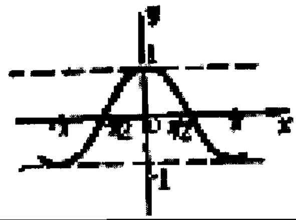
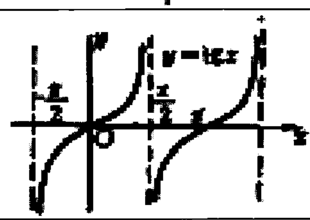
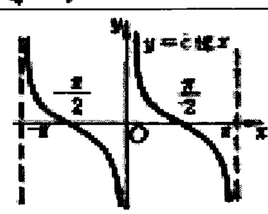
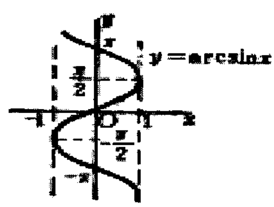
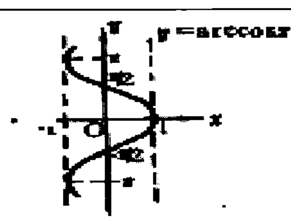
4、函数的表示方法

函数的表示方法常用的有三种：解析法、列表法、图示法。这三种方法各有其优缺点，在实际应用时，常把三种方法结合起来使用，特别在经济管理和统计预测中经常是这样做的。为了便于应用，现将幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数的表示公式、图形及其主要性质列表如下：

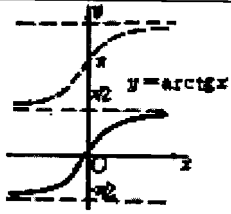
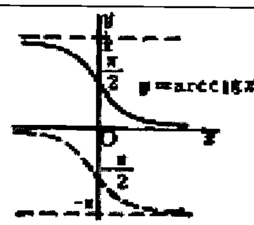
表 1-1

函数	表达式	图　　形	定义域及主要性质
常用函数	$y=C$		$-\infty < x +\infty$ 图形平行于 x 轴
幂函数	$y=x$		$-\infty < x +\infty$ 图形通过原点
	$y=\dfrac{1}{x}$		$-\infty < x +\infty$ 及 $0< x +\infty$ 图形关于原点对称
	$y=x^2$		$-\infty < x +\infty$ 图形关于 y 轴对称
	$y=x^a$ a 为实数		定义域由 a 的取值而定，但不论 a 取值如何，幂函数 $y=x^a$ 在（0，$+\infty$）内总有定义。 图形通过点（1，1）
指数函数	$y=a^x$ a 是常数且 $a>0$，$a\neq1$		$-\infty < x +\infty$ a^x 随 x 增大而急速增大， a^{-x} 随 x 增大而急速减少并趋于零 图形通过点(0，1)
	$y=a^{-x}$ a 是常数且 $a>0$，$a\neq1$		

续　表

函数	表达式	图　形	定义域及主要性质
对数函数	$y=\log_a x$ a 是常数且 $a>0$，$a\neq1$		$-\infty < x +\infty$ $\log_a x$ 随 x 增大缓慢趋于正无穷大随 x 趋于零而急速趋于负无穷大 图形通过点(1，0)
三	$y=\sin x$		$-\infty < x +\infty$ 函数 $y=\sin x$ 以 $2x$ 为周期，$\lvert\sin x\rvert\leqslant1$， 图形关于原点对称
角	$y=\cos x$		$-\infty < x +\infty$ 函数 $y=\cos x$ 以 $2x$ 为周期，$\lvert\cos x\rvert\leqslant1$， 图形关于 y 轴对称
函	$y=tgx$		$x\neq 2k+1\dfrac{z}{2}$，$k=0$，±1，±2，… 函数 $y=tgx$ 以 x 为周期 图形关于原点对称
数	$y=ctgx$		$x\neq kx$，$k=0$，±1，±2，… 函数 $y=ctgx$ 以 x 为周期 图形关于原点对称
反三角函数	$y=Arc\sin x$		$-1\leqslant x\leqslant1$ 空值 $-\dfrac{x}{2}\leqslant\arcsin x\leqslant\dfrac{x}{2}$ 图形关于原点对称
	$y=Arc\cos x$		$-\infty < x +\infty$ 主值 $0\leqslant\arccos x\leqslant x$

续　表

函数	表达式	图　　形	定义域及主要性质
反三角函数	$y = Arctgx$		$-\infty < x +\infty$ 主值 $-\frac{x}{2} < arctgx < \frac{x}{2}$ 图形关于原点对称
	$y = Arcctgx$		$-\infty < x +\infty$ 主值 $0 < arcctgx < x$

通常把幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数叫做基本初等函数。

5、分段函数

在实际应用中，我们还经常遇到将定义域分成若干部分、各部分用不同的式子表示的函数，这类函数称为分段函数。

例 4　函数

$$y = f(x) = \begin{cases} x+1 & x<0 \\ 0 & x=0 \\ x-1 & x>0 \end{cases}$$

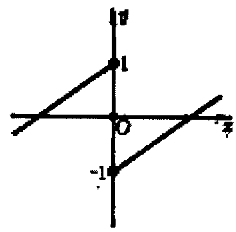


图 1-1

是用三个式子表示的一个分段函数，这个函数定义域是 $(-\infty,+\infty)$，不要误认为是三个函数。当 $x<0$ 时，对应法则由 $y=x+1$ 表示；当 $x=0$ 时，对应法则由 $y=0$ 表示；当 $x>0$ 时，对应法则由 $y=x-1$ 表示。它的图象如图所示。

例 5　设企业对某商品规定了价格差：购买量在 10 千克以下(包括 10 千克)，每千克价 10 元；购买量小于等于 100 千克其中超过 10 千克部分，每千克价 9 元；购买量大于 100 千克部分，每千克价 8 元。试作出购买量为 x 千克的费用函数。

解　设购买 x 千克的费用函数为 $C(x)$，由题设关于价格规定知：

当 $0 \leqslant x \leqslant 10$ 时，$C(x)=10x$(元)

当 $10< x \leqslant 100$ 时，$C(x)=100+9(x-10)$(元)

当 $x>100$ 时，$C(x)=100+810+8(x-100)$(元)

这里要注意的是，当 $x>100$ 时，其中有 10 千克费用为 $10\times 10=100$(元)，有 90

千克费用为$9\times90=810$(元)。综合起来得到用分段函数表示的费用函数为：

$$C(x)=\begin{cases}10x & 0\le x\le10 & 0\leqslant x\leqslant10\\100+9(x-10) & 10<x\le100 & 10<x\leqslant100\\100+810+8(x-100) & x>100 & x>100\end{cases}$$

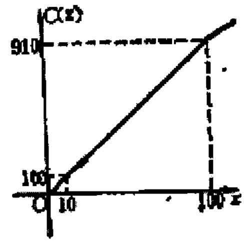


图 1-2

这个函数的图形如图 1-2 所示。

二、函数的几种特性

这里讨论的是常见的函数的几种特性，在对基本初等函数的性态研究时也都遇见过，它们是：奇偶性、单调性、周期性、有界性。

1、函数的奇偶性

设有函数$y=f(x)$，在对称于原点的区间$(-a,a)$内有定义，对于它的定义域内任一值 x，如果$f(-x)=-f(x)$，则$f(x)$叫做奇函数；

如果$f(-x)=f(x)$，则$f(x)$叫做偶函数。

例如，函数$y=x^3$，$y=\sin x$等都是奇函数，函数$y=x^2$，$y=\cos x$等都是偶函数。

奇、偶函数的特点：奇函数的图形关于原点对称。这是因为$f(-x)=-f(x)$，所以如果点$P(x,f(x))$在函数$y=f(x)$的图形上，则关于原点对称的点$P'(-x,-f(x))$也在该图形上。如图 1-3 所示。

偶函数的图形关于 y 轴对称。这是因为$f(-x)=f(x)$，所以如果点$Q(x,f(x))$在$y=f(x)$的图形上，则关于 y 轴对称的点$Q'(-x,f(x))$也在该图形上。如图 1-4 所示。

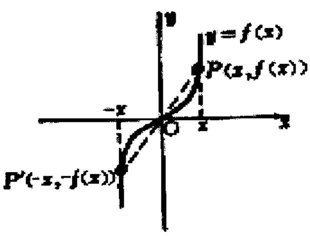


图 1-3

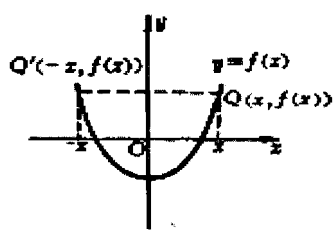


图 1-4

例 6　判断下列函数的奇偶性：

(1) $y=\frac{1}{x^2}$　　(2) $y=x+\sin x$

(3) $y=1+\sin x$

解 (1) 因为 $f(-x)=\frac{1}{(-x)^2}=\frac{1}{x^2}=f(x)$，所以 $y=\frac{1}{x^2}$ 为偶函数。

(2) 因为 $f(-x)=(-x)+\sin(-x)=-(x+\sin x)=-f(x)$，所以 $y=x+\sin x$ 为奇函数。

(3) 因为 $f(-x)=1+\sin(-x)=1-\sin x$，既不是 $f(x)=1+\sin x$，也不是 $-f(x)=-(1+\sin x)$，所以 $y=1+\sin x$ 既不是偶函数，也不是奇函数。

由此例可知，并不是任何函数都具有奇偶性。

2、函数的单调增减性

如果函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内随 x 增大而增大，即对于区间 (a,b) 的任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 是区间 (a,b) 内的单调增加函数(图 1-5)。

如果函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内随 x 增大而减小，即对于区间 (a,b) 的任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 是区间 (a,b) 内的单调减少函数(图 1-6)。

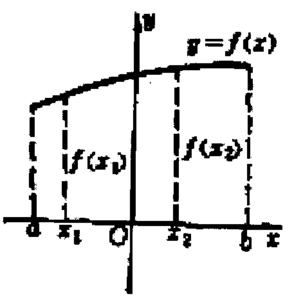


图 1-5

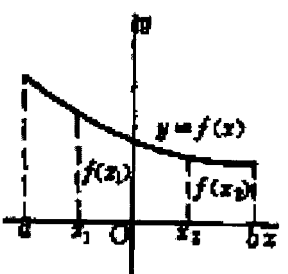


图 1-6

在整个区间上单调增加或单调减少的函数统称为单调函数。单调增加函数的图象是沿 x 轴正向上升的，如图 1-5 所示。单调减少函数的图象是沿 x 轴正向下降的，如图 1-6 所示。

例 7　求下列函数单调增加或单调减少的区间：

(1) $y=x^3$　　(2) $y=x^2$

解 (1) 函数 $y=x^3$ 在其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内都是单调增加的。

(2) 函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 内是单调减少的。在 $(0,+\infty)$ 内是单调增加的。

3、函数的周期性

设有函数 $y=f(x)$，如果存在一个不为零的常数 T，使得关系式 $f(x+T)=f(x)$ 对于定义域内任何 x 值都成立，则这个函数 $f(x)$ 叫做周期函数。满足上述关系式的不为零的常数 T 叫做该函数的周期。周期函数的周期可以不止一个，如果存在一个最小正数，使上式成立的这个最小正数叫做最小正周期。三角函数的周期，一般是指最小正周期。

周期函数的特点：周期函数的图形可由该函数在定义域内长度为 T 的区间上的图形平移而得到。如图 1-7 所示。

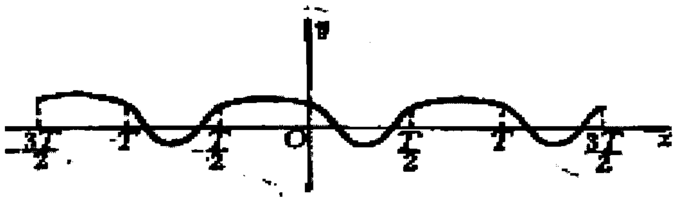


图 1-7

例如，函数 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数；函数 $y=tgx$ 和 $y=ctgx$ 都是以 π 为周期的周期函数。

例 8　求函数 $y=\sin \omega x(\omega>0\text{常数})$ 的周期。

解　因为

$$\sin \omega(x+\frac{2\pi}{\omega})=\sin(\omega x+2\pi)=\sin \omega x$$

所以函数 $y=\sin \omega x$ 的周期 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$

4、函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，如果存在正数 M，使不等式 $|f(x)|\leqslant M$ 对于 (a,b) 内任一点 x 都成立，则说函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内是有界的。如果这样的 M 不存在，就说函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内是无界的。

有界函数的特点：有界函数的图象夹在直线 $y=M$ 和 $y=-M$ 之间。

例如，函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的，因为对于任何实数 x，不等式 $|\sin x|\leqslant 1$ 总成立。这里 $M=1$。

又如，函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 内是无界的，因为不存在这样的正数 M，使 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M$ 对于 $(0,1)$ 内一切 x 值都成立。但是函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(1,2)$ 内是有界的，因为可取