

混凝土 损伤理论及试验

沈新普 杨璐◎著



科学出版社
www.sciencep.com

混凝土损伤理论及试验

沈新普 杨璐 著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书介绍了混凝土损伤力学本构理论涉及的连续介质力学基本概念、原理和数学工具. 对梯度依赖塑性损伤耦合本构模型的理论和数值计算方法作了详细介绍. 给出了ABAQUS大型有限元程序模拟混凝土4点剪切梁动力损伤破坏过程的原理、结果和数值计算技巧. 给出了采用白光散斑法进行混凝土损伤试验的实验设备、试件准备和结果处理技术.

本书可作为力学、材料、土木、机械及相关专业研究生的教学参考书, 也可供高年级本科生、一般工程技术人员和相关领域研究人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

混凝土损伤理论及试验/沈新普, 杨璐著. —北京: 科学出版社, 2009

ISBN 978-7-03-023677-7

I. 混… II. ①沈… ②杨… III. 混凝土-损伤(力学)-研究 IV. TU528.01

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009) 第 046710 号.

责任编辑: 刘凤娟 胡 凯 / 责任校对: 陈玉凤

责任印制: 钱玉芬 / 封面设计: 王 浩

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

双青印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009年4月第 一 版 开本: B5(720×1000)

2009年4月第一次印刷 印张: 11 1/4

印数: 1—2 000 字数: 213 000

定价: 42.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈环伟〉)

序

由沈新普教授和杨璐副教授所共同撰写的《混凝土损伤理论及试验》一书是一本用损伤力学研究混凝土材料和构件力学行为的专著。

随着建筑工业技术的迅速发展,大型、复杂且重要的混凝土结构如混凝土大坝、核电站混凝土保护壳、地下混凝土墙、高耸混凝土建筑等不断涌现。常规的混凝土力学理论往往不能满足此类复杂且重要混凝土结构的安全承载分析的需要,因此,混凝土的种种非弹性理论应运而生。目前国际上比较流行的 Bazant 的书偏重于混凝土的断裂理论;国内清华大学过镇海教授的著作偏重于理论设计方法介绍,大连理工大学唐春安教授的著作则偏重于数值计算的介绍。而其他的力学专业相关著作则很少对混凝土的损伤理论或试验作较详细的介绍。1980 年以来,混凝土连续损伤理论逐步得到发展,目前已经在国内外土木建筑类的工程中得到相当广泛的应用。

该书首先介绍了混凝土损伤力学本构理论涉及的连续介质力学基本概念、原理和数学工具,简明扼要而系统地介绍了必要的数学基础,如张量分析理论等,在此基础上,对梯度依赖塑性损伤耦合本构模型的理论和数值计算方法作了详细介绍,其中所介绍的一种能够不使用有效应力概念的二阶张量损伤与塑性耦合模型、混凝土应力三轴比依赖的本构理论、梯度依赖非局部损伤模型等内容都是在国际学术期刊上发表过的混凝土损伤研究最新进展。这本书的主要内容是作者近年来在两个国家自然科学基金课题支持下的理论和实验研究最新成果。

书中还介绍了使用 ABAQUS 大型有限元程序模拟混凝土 4 点剪切梁动力损伤破坏过程的原理、结果和数值计算技巧。所介绍的数值结果图形新颖、细致,理论先进。由于混凝土损伤局部化特性明显,混凝土结构的损伤计算比较难于收敛。书中通过给出的相关损伤塑性结构计算实例,介绍了有关参数的选取和网格划分经验。这些资料对有关工程技术人员在处理实际工程问题时,具有重要的参考价值。

白光数字散斑法是 20 世纪 90 年代中期以来在国内得到应用的新型实验技术,目前掌握该实验技术的研究人员及工程技术人员为数尚不多。该书具体地介绍了使用白光数字散斑法测量混凝土试件断裂损伤的实验设备、试件准备、数据处理、结果分析等各环节细节内容。所介绍的白光散斑数字实验方法是目前混凝土断裂研究中先进的技术手段,适合目前的研究人员参考。该书成果发展了准脆性材料与结构的损伤力学理论方法,丰富了损伤力学实验方法和装置的种类及内容。

该书作者长期与国内外著名专家和学者合作,在混凝土损伤力学方面做出了高

水平的工作,在许多重要领域里,做出了有意义的工作和研究成果.这些成果都多次被有关专家所引用,作者又有多年在高等院校教学第一线工作的经验.书中还包括了作者在固体损伤塑性本构理论研究生课程教学中所涉及的一些基本理论方法和原理.因此该书的撰写是有基础的,书中使用的例子都是常见的典型算例,便于和相关文献研究结果相比较.

该书的出版,将在这一学科领域中的许多方面填补国内的空白,而许多内容对有关研究人员及工程技术人员具有重要的参考价值.本书可供土木、建筑、岩土工程、水利工程、能源开采等相关专业的高年级本科生、研究生、一般工程技术人员和相关领域研究人员参考.可以期望该书将在混凝土材料和结构的研究和应用中发挥重要的作用.

徐秉业

清华大学教授 博士生导师

2008年4月4日

前 言

随着计算技术和实验技术的发展,混凝土在重要且复杂工程结构中的应用日益增多,相关科学研究成果层出不穷.但是系统介绍混凝土塑性损伤计算与实验理论方法的书籍目前不算多.本书的目的是要弥补这一不足.

这本书的主要内容是作者近年来在两个国家自然科学基金课题支持下的理论和实验研究成果.同时书中也包括了作者近年来和波兰科学院 Mroz 教授课题组、法国特鲁瓦技术大学 Sannouni 教授的课题组以及英国谢菲尔德大学 Crouch 教授课题组等同行合作研究的成果.还包括了在沈阳工业大学固体损伤塑性本构理论研究生课程教学中涉及的一些基本理论方法的内容.本书介绍的白光散斑数字试验方法是目前混凝土断裂研究中常用的较为先进的技术手段,适合目前的有关研究人员参考.作者希望本书能够为相关工程技术人员和高年级本科生、研究生提供一份较有价值的混凝土损伤力学研究的参考书.

本书各章均为共同执笔.

感谢国家自然科学基金委通过项目 (10672106) 和 (10472072) 对本书的资助.

感谢沈阳工业大学计算力学所的硕士生冯金龙、程玲和郭丽丽在本书部分章节写作过程中提供的帮助.

感谢清华大学航空航天学院徐秉业老师、庄茁老师在本书写作过程中给予的鼓励与支持.

作 者

2008 年 5 月 19 日

目 录

序

前言

第 1 章 张量及连续介质热力学基础	1
1.1 数学基础	1
1.2 张量代数	4
1.3 张量微积分	5
1.4 连续介质热力学基础	6
1.4.1 热力学第一定律	7
1.4.2 热力学第二定律	7
1.4.3 状态变量	10
1.4.4 热力学非局部理论	13
第 2 章 固体的损伤塑性局部本构模型研究	16
2.1 引言	16
2.2 损伤模型及有效变量表达式	16
2.2.1 Saanouni-Forster-Hatira 模型有效变量表达式	16
2.2.2 有效变量表达式的其他形式	17
2.2.3 本构关系	18
2.3 本构积分数值格式	19
2.3.1 方法的一般描述	19
2.3.2 未知量及相关项的具体形式	20
2.4 本构行为的数值试验与比较	21
2.5 数值应用	23
2.6 结束语	26
参考文献	26
第 3 章 岩土材料弹塑性正交异性损伤耦合本构理论	28
3.1 引言	28
3.2 模型的一般热力学描述	28
3.2.1 连续介质的热力学	28
3.2.2 塑性流动准则及损伤准则	30
3.2.3 关于损伤应变与扩容计算的讨论	31

3.3 塑性损伤耦合描述	32
3.3.1 正交异性张量损伤模型	32
3.3.2 Mohr-Coulomb 准则的均匀化	32
3.4 小结	34
参考文献	35
第 4 章 梯度增强的弹塑性损伤非局部本构模型理论研究	36
4.1 引言	36
4.2 已有相关模型简要介绍	36
4.2.1 面积加权平均的非局部模型	36
4.2.2 梯度增强的非局部本构模型	38
4.2.3 讨论	42
4.3 梯度增强的损伤塑性耦合本构关系	42
4.3.1 梯度增强损伤塑性的连续介质热力学	42
4.3.2 梯度增强的损伤模型	43
4.4 弹塑性损伤耦合本构模型的具体形式	45
4.4.1 损伤材料有效应力/应变关系	45
4.4.2 内变量演化律及加载条件	46
4.5 结束语	47
参考文献	47
第 5 章 梯度增强的弹塑性损伤非局部本构模型数值计算研究	49
5.1 引言	49
5.2 用移动最小二乘法近似求解 Laplace 值的原理与格式	49
5.2.1 移动最小二乘法的数学原理	49
5.2.2 矢量 α 的计算	51
5.2.3 二维问题的基矢量 p	51
5.2.4 三维问题的多项式基矢量 p	52
5.3 数值应用	53
5.3.1 双面预制缺口平面应变试件的拉伸试验	53
5.3.2 金属板条的塑性损伤数值模拟	57
5.4 结束语	61
参考文献	61
第 6 章 厚壁筒梯度依赖损伤解析	62
6.1 引言	62
6.2 加入损伤项的解析解	62
6.2.1 屈服条件	62

6.2.2	损伤演化方程	63
6.2.3	弹性区的解 ($R \leq r \leq b$)	64
6.2.4	损伤区的解 ($a \leq r \leq R$)	65
6.3	加入损伤梯度项的解析解	66
6.3.1	屈服条件	66
6.3.2	损伤演化方程	67
6.3.3	弹性区的解 ($R \leq r \leq b$)	67
6.3.4	损伤区的解 ($a \leq r \leq R$)	67
6.4	计算实例	68
6.5	结论	71
	参考文献	72
第 7 章	混凝土结构损伤过程区几何特性数值研究	73
7.1	引言	73
7.2	本构模型	75
7.2.1	损伤模型	75
7.2.2	塑性模型	76
7.2.3	本次计算的材料参数取值	78
7.3	载荷和几何模型	80
7.4	模型网格	81
7.5	数值模拟结果	81
7.5.1	双边缺口试件的计算结果	82
7.5.2	单边缺口试件的计算结果	93
7.6	结论	96
	参考文献	97
第 8 章	混凝土四点剪切梁破坏试验白光散斑法测量原理与装置	99
8.1	引言	99
8.2	数字散斑相关方法的发展概述	101
8.3	数字散斑相关方法原理	103
8.3.1	散斑场	104
8.3.2	基本原理	105
8.4	混凝土变形局部化的试验研究	111
8.4.1	试验准备	112
8.4.2	试验装置	113
8.4.3	试验结果	114
8.4.4	结论	132

参考文献	132
第 9 章 高温下混凝土力—热—流耦合数学模型	138
9.1 引言	138
9.2 考虑质量传递和热传递的可变形孔隙体中的一般宏观守恒方程	139
9.2.1 宏观质量守恒方程	140
9.2.2 线动量守恒方程	141
9.2.3 能量守恒方程	142
9.3 本构方程	143
9.3.1 质量传递的本构方程	143
9.3.2 热传递的本构方程	146
9.3.3 固体相力学行为的本构关系	146
9.4 基于实验拟合的某些变量的数学表达式	147
9.4.1 孔隙率变量	147
9.4.2 液态水的饱和度 S_w	147
9.4.3 液态水的密度	148
9.4.4 水蒸气压力的计算公式	148
9.4.5 混凝土固体骨架脱水速率	149
9.4.6 物理吸附水的饱和度	150
9.5 材料参数的取值	150
9.5.1 比热	150
9.5.2 汽化热和脱水热的取值	150
9.5.3 与质量传递相关的参数取值	151
9.5.4 弥散系数	152
9.5.5 作为混合物的混凝土的热传导系数	152
9.6 系统微分方程	152
9.6.1 系统微分方程的初、边值条件	153
9.6.2 微分方程等效积分及其弱形式	155
9.7 场变量的近似函数及有限元方程空间离散	163
9.8 结束语	167
参考文献	168

第1章 张量及连续介质热力学基础

1.1 数学基础

为了描述一个任意物体的构形, 我们需要引入参考系的概念. 参考系是一个刚体构架, 供观察者观察物体运动时, 作为参照. 物体任何一个量化的描述都需要有一个与参考系联系在一起的坐标系才能进行. 坐标系的选取必须既具有普适性又要方便分析问题, 因此我们先得研究坐标变换. 我们这里介绍的内容仅限于直角坐标系.

所谓直角坐标指的是空间中的三个都是直线且相互垂直的坐标轴形成的坐标系. 图 1.1 示为两个具有相同原点的直角坐标系. 坐标系 1 由坐标轴 x_i , $i = 1, 2, 3$ 组成, 坐标轴上有方向矢量 i_1, i_2, i_3 ; 坐标系 2 为 X_p , $p = 1, 2, 3$, 坐标轴上有方向矢量 I_p . 两个坐标系的原点重合.

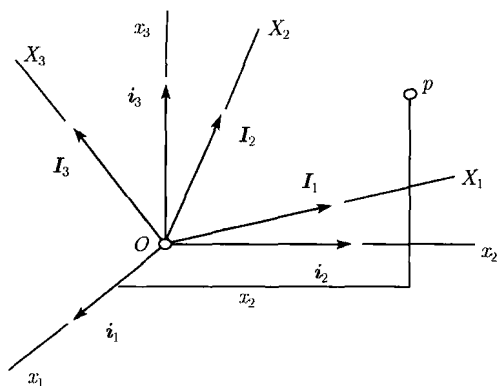


图 1.1 笛卡儿坐标系

坐标系 1 的坐标轴 x_i 与系 2 的坐标轴 X_p 的夹角方向余弦可以表示为

$$c_{pi} = \cos(X_p, x_i) = I_p \cdot i_i \quad (1.1)$$

下标 $p, i = 1, 2, 3$. 设 p 是空间中的一点, 在系 1 中的坐标值为 x_i . 那么, p 点在第 2 个坐标系中的坐标值就是 x_i 在 X_p 方向上的投影, 即

$$\begin{cases} X_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 \\ X_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 \\ X_3 = c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3 \end{cases} \quad (1.2)$$

(1.2) 式其实就是从 x_i 向 X_p 作的一个坐标变换, 它的逆变换为

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}X_1 + c_{21}X_2 + c_{31}X_3 \\ x_2 = c_{12}X_1 + c_{22}X_2 + c_{32}X_3 \\ x_3 = c_{13}X_1 + c_{23}X_2 + c_{33}X_3 \end{cases} \quad (1.3)$$

两式可以写成一个 $\sum$ 求和的形式,

$$X_p = \sum_{i=1}^3 c_{pi}x_i \quad (1.4)$$

$$x_i = \sum_{p=1}^3 c_{pi}X_p \quad (1.5)$$

在 (1.4) 式中, p 是自由的, (1.5) 式中, i 是自由的. 引入一个求和约定可以使 (1.4) 和 (1.5) 式更为简洁:

$$X_p = c_{pi}x_i \quad (1.6)$$

$$x_i = c_{pi}X_p \quad (1.7)$$

求和约定规定: 在一个乘积中, 如果一个下标出现 2 次且仅出现 2 次, 则对该下标求和. 求和的下标叫做哑元. 哑元的符号可以根据需要更换字母而不影响结果, 如

$$x_i y_i = x_j y_j \quad (1.8)$$

比如, 若把 (1.7) 式代入 (1.6) 式则先得把 (1.7) 式改写为

$$x_i = c_{qi}X_q \quad (1.9)$$

以避免前后两式字母重复超过 2 次, 从而得到

$$X_p = c_{pi}c_{qi}X_q \quad (1.10)$$

很明显, (1.10) 式中 X_q 的系数应为 1, 当 $q = p$ 时应为零, 从而这里引入一个克罗内克 (Kronecker) 符号:

$$\delta_{pq} = \begin{cases} 1, & p = q \\ 0, & p \neq q \end{cases} \quad (1.11)$$

则

$$C_{pi}C_{qi} = \delta_{pq} \quad (1.12)$$

坐标转换矩阵 C_{pi} 可以写作

$$C_{pi} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

下标 p 代表行号, i 代表列号. 对于给定的 p , C_{pi} 表示单位矩阵 I_p 的分量在坐标系 x_i 中的分量. 所以矩阵 $[C_{pi}]$ 的行列式值为

$$\begin{aligned} \det C_{pi} &= I_1 \cdot (I_2 \times I_3) \\ \det C_{pi} &= \pm 1 \end{aligned} \quad (1.14)$$

当 x_i 和 X_p 都是右手系或左手系时取正号.

当 x_i 和 X_p 分别是右手系和左手系时取负号.

利用 (1.1) 式可得到

$$\begin{cases} I_p = (I_p \cdot i_i) i_i = C_{pi} i_i \\ i_i = (i_i \cdot I_p) I_p = C_{pi} I_p \end{cases} \quad (1.15)$$

这样我们可以注意到, 坐标的基矢量可以和点的坐标值一样进行坐标变换. 在非直角坐标系中, 不可以这么做.

标量: 一个标量 λ 是与坐标系无关的量. 把坐标系 X_p 中与 λ 相对应的记为 Λ , 则有

$$\Lambda = \lambda \quad (1.16)$$

矢量: 一个矢量 ν 具有一个方向和三个分量 ν_i , 矢量本身不依赖坐标系但它的分量随坐标系的变化而变化, 即在空间中矢量端点的坐标随坐标系不同而变化. 由 (1.15) 式得

$$V_p = C_{pi} v_i, v_i = C_{pi} V_p \quad (1.17)$$

把 (1.15) 式推广到 3 维直角坐标中的 n 阶张量, 可以得到

$$\begin{aligned} T_{pq\dots S} &= C_{pi} C_{qj} \cdots C_{sl} T_{ij\dots L} \\ t_{ij\dots l} &= C_{pi} C_{qj} \cdots C_{sc} T_{pq\dots S} \end{aligned} \quad (1.18)$$

下标的个数叫阶, 下标的变程叫维.

总结: 标量不需要变换; 矢量需一次变换; n 阶张量需 n 次变换, 即 n 个 C_{pi} . 对于 2 阶张量 t , 即 t_{ij} , 有以下的坐标变换表示:

$$T_{pq} = C_{pi} C_{qj} t_{ij} \quad (1.19)$$

$$t_{ij} = C_{pi} C_{qj} T_{pq} \quad (1.20)$$

克罗内克符号的矩阵表示为

$$\delta_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

若把 δ_{ij} 理解为坐标系 x_i 中的对角矩阵, 则 (1.21) 式定义 δ_{ij} 为一个 2 阶张量, 在坐标系 X_p 中, δ_{ij} 变为

$$\Delta_{pq} = C_{pi} C_{qj} \delta_{ij} = C_{pi} C_{qi} = \delta_{pq} \quad (1.22)$$

因此 x_i 和 X_p 中, δ_{ij} 是相同的.

在不同的坐标系中张量的分量都不变化的张量叫做各向同性张量. 比如标量和 δ_{ij} 都是各向同性张量.

1.2 张量代数

本节介绍张量代数的主要运算法则.

设 $r_{ijk\dots m}$ 和 $S_{ijk\dots m}$ 为两个同阶的任意张量. 将两者相加得到

$$t_{ijk\dots m} = r_{ijk\dots m} + s_{ijk\dots m} \quad (1.23)$$

$t_{ijk\dots m}$ 称为 $r_{ijk\dots m}$ 和 $S_{ijk\dots m}$ 的和.

给定两个任意阶的张量, r_{ijk} 和 s_{lm} 它们的乘积的定义为

$$t_{ijklm} = r_{ijk} s_{lm} \quad (1.24)$$

张量积的阶为各张量阶的和. 特殊的例子有标量与张量的积:

$$t_{ij} = \lambda r_{ij} \quad (1.25)$$

和若干个矢量的乘积:

$$t_{ijk} = u_i v_j w_k \quad (1.26)$$

张量的内积又称为点积. 给定 n 阶张量 $r_{ijkl\dots p}$, 假如它的下标有两个相同即 $r_{ijil\dots p}$. 则可得另一个 $n-2$ 阶张量 $t_{jl\dots p}$. 这个过程叫做张量的缩减.

张量缩减的一个例子是 2 阶张量 t 的迹,

$$\text{tr} t = t_{ii} \quad (1.27)$$

它是一个标量. 应力张量的第一不变量为

$$I_1 = \sigma_{ii} \quad (1.28)$$

张量缩减可以用于两个张量的乘积, 当相乘的两个张量各有一个下标相同时就发生缩减, 如

$$r_{ijk} s_{lj} = t_{ikl} \quad (1.29)$$

比如两个矢量的乘积 $u_i v_i$, 如果一个 2 阶张量和 Kronecker 张量相乘, 则得到原张量, 即

$$\Delta_{ij} \delta_{ij} = \Delta_{jk} \quad (1.30)$$

因此 δ_{ij} 也称作 2 阶单位张量.

还有张量 t 的幂 t^2, t^3 分别为

$$t^2 = t_{ip} t_{pj}, \quad t^3 = t_{ip} t_{pq} t_{qj}, \dots \quad (1.31)$$

对称张量: 当张量的两个指标变换时不影响分量的值时, 称为对称. 如

$$t_{ij} = t_{ji} \quad (1.32)$$

若下标交换时分量变符号, 则称为反对称的

$$t_{ij} = -t_{ji} \quad (1.33)$$

这里会得出

$$t_{11} = 0 = t_{22} = \dots \quad (1.34)$$

上述性质与坐标无关. 一个 2 阶张量可以分成对称部分和反对称部分:

$$t_{(ij)} = \frac{1}{2} (t_{ij} + t_{ji}), \quad t_{[ij]} = \frac{1}{2} (t_{ij} - t_{ji}) \quad (1.35)$$

1.3 张量微积分

在直角坐标 x_i 定义的空间区域中, 设有一个任意张量 $t_{j\dots l}$ 与空间中的每一点都有关, 则这个区域称为张量场.

设张量函数 $t_{j\dots l}(x_i)$ 是单值的、连续的、无限可微的, 则张量函数的坐标变换以下式进行:

$$T_{q\dots s}(X_p) = C_{qj\dots} C_{st} t_{j\dots l}(x_i) = C_{qj} \dots C_{st} t_{j\dots l}(C_{pi} X_p) \quad (1.36)$$

张量对坐标求偏导: $\frac{\partial t_{j\dots l}}{\partial x_i}$ 表示在域内张量分量随坐标变量的变化情况, 对于直角坐标系, $C_{qj}, \dots, C_{sl}$ 都是常张量, 张量导数的坐标变换为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X_p} T_{q\dots s} &= C_{qj} \dots C_{sl} \frac{\partial}{\partial X_p} t_{j\dots l} = C_{pi} C_{qi} \dots C_{sl} \frac{\partial}{\partial x_i} t_{j\dots l} \\ \frac{\partial x_i}{\partial X_p} &= C_{pi}, \end{aligned} \right\} \quad (1.37)$$

$$x_i = C_{pi} X_p \quad (1.38)$$

变换系数多出来一个, 这就是说张量的偏导数定义了另一个 $n+1$ 阶张量. 这样可以有

$$\frac{\partial}{\partial x_i} t_{j\dots l} = t_{j\dots l, i} \quad (1.39)$$

注意, $i = 1, 2, 3$, 张量 $t_{j\dots l, i}$ 称为 $t_{j\dots l}$ 的梯度. 张量梯度的最简单的例子是标量 φ 的梯度 $\varphi_{,i}$, $\text{grad} \varphi$. $\nabla \varphi$ 矢量梯度 $v_{k,j}$, 一般非对称. 其迹为 $v_{k,k}$ 称为 v 的散度 $\text{div} v_i$. 标量 φ 的 Laplace 算子 $\Delta \varphi = \varphi_{,ii}$. 张量的高斯定理表示为:

$$\int_V t_{j\dots l, i} dV = \int_A t_{j\dots l} v_i dA \quad (1.40)$$

式中, v_i 是界面 A 上的外法线方向.

当 $t_{j\dots l}$ 是标量 φ 时, 有

$$\int_V \nabla_i \varphi dV = \int_A v_i \varphi dA \quad (1.41)$$

以上是作者工作经历中曾涉及的张量内容, 以小变形分析的张量理论为主. 其他的张量分析内容可参阅书后所附文献目录中列出的参考书.

1.4 连续介质热力学基础

经典的热力学研究的对象是宏观现象静止的物质系统, 且设这个系统可以用一组相互独立的运动系坐标或参数 a_k ($k = 1, 2, \dots, n$) 以及绝对温度 θ 来表示.

例如, 我们先来考虑一个连续介质的立方单元体. 其运动学状态可用应变张量 ε_{ij} 完全描述. ε_{ij} 为一个二阶对称张量, 起 a_k 的作用. 上述变量 a_k 和 θ 称为独立状态变量. 它们的函数称为依赖变量, 或称状态函数. 当给独立状态变量一个小增量, $da_k, d\theta$, 则作用在系统上的微功为

$$dw = A_k da_k \quad (1.42)$$

当所选连续介质为气体时

$$dw = -p dv \quad (1.43)$$

这里 p 是静水压力, (1.42) 式中的 A_k 称为 a_k 的共轭力. 一般地说系统状态的改变意味着热的流入或流出. 设 dQ 表示系统状态微小变化对应的热流入. 外力功和热流入 Q 都是状态函数.

1.4.1 热力学第一定律

有一个状态函数 $U(a_k, \theta)$ 称为内能, 且有

$$dU = dw + dQ = A_k da_k + dQ \quad (1.44)$$

(1.44) 式表明: 内能的全微分是外力功和热供应的和
若

$$dQ = 0 \quad (1.45)$$

则系统是绝热的; 若

$$dw = 0 \quad (1.46)$$

则称此过程为加热或冷却过程.

第一定律可以看作能量守恒方程. 它意味着第一类永动机不存在.

1.4.2 热力学第二定律

认为存在另一种叫做熵的状态函数 $s(a_k, \theta)$, 且有

$$\theta ds \geq dQ \quad (1.47)$$

当 (1.47) 式的等式成立时, 这个过程叫做可逆的, 否则叫做不可逆的.

第二定律确定了第二类永动机不存在.

第二定律也可以表示为

$$ds = d^{(r)}s + d^{(i)}s \quad (1.48)$$

这里

$$d^{(r)}s = \frac{d\theta}{\theta} \quad (1.49)$$

是 s 的可逆部分, 也称为外部熵供应. 而

$$d^{(i)}s \geq 0 \quad (1.50)$$