

# 金融资产价格的 运动行为研究

——时间序列计量经济学模型理论与应用

*Jinrong Zichan Jiage de  
Yundong Xingwei Yanjiu*

刘潭秋 著

湖南大学出版社

*Jinrong Zichan Jiage de  
Yundong Xingwei Yanjiu*

## · 内容简介

本书是“金融资产价格的运动行为研究”项目成果。该书在对金融资产价格运动行为进行深入研究的基础上，提出了一系列新的理论观点和方法。书中不仅系统地介绍了金融资产价格运动行为的基本理论，而且对金融资产价格运动行为的实证分析、模型构建、预测方法等进行了深入的研究。书中还对金融资产价格运动行为的实证分析、模型构建、预测方法等进行了深入的研究。

# 金融资产价格的运动行为研究

——时间序列计量经济学模型理论与应用

刘潭秋 著

湖南大学出版社

2009年·长沙

## 内 容 简 介

本书是以时间序列计量经济学为模型对金融资产价值的动态行为进行研究。理论部分着重在于介绍近年来用于金融研究领域的一些重要的时间序列模型和方法；实证部分不仅仅是简单地应用这些模型，而且还结合其他相关理论在扩展原有时间序列计量经济学模型的基础上研究金融时间序列的复杂随机过程。

### 图书在版编目(CIP)数据

金融资产价格的运动行为研究

——时间序列计量经济学模型理论与应用/刘潭秋著.

—长沙:湖南大学出版社,2008.12

**ISBN 978 - 7 - 81113 - 534 - 3**

I. 金... II. 刘... III. 资本市场—经济波动—研究 IV. F830.9

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 205799 号

## 金融资产价格的运动行为研究

——时间序列计量经济学模型理论与应用

Jinrong Zichan Jiage de Yundong Xingwei Yanjiu

—Shijian xulie Jiliang Jingjixue Moxing Lilun yu Yingyong

作 者：刘潭秋 著

责任编辑：肖 蓉 王和君

封面设计：张 毅

出版发行：湖南大学出版社

社 址：湖南·长沙·岳麓山 邮 编：410082

电 话：0731-8822559(发行部),8821593(编辑室),8821006(出版部)

传 真：0731-8649312(发行部),8822264(总编室)

电子邮箱：presswanghj@hnu.cn

网 址：<http://press.hnu.cn>

印 装：长沙瑞和印务有限公司

开本：880×1230 32 开 印张：11.25

字数：303 千

版次：2009 年 1 月第 1 版 印次：2009 年 1 月第 1 次印刷

书号：ISBN 978 - 7 - 81113 - 534 - 3/F · 192

定价：24.00 元

版权所有，盗版必究

湖南大学版图书凡有印装差错，请与发行部联系

金融时间序列分析与预测是金融学的一个重要分支，近年来金融学的研究范围不断拓宽，金融时间序列分析与预测的研究对象也从传统的股票、债券、外汇等资产价格扩展到利率、汇率、收益率等金融变量。金融时间序列分析与预测是金融学的一个重要分支，近年来金融学的研究范围不断拓宽，金融时间序列分析与预测的研究对象也从传统的股票、债券、外汇等资产价格扩展到利率、汇率、收益率等金融变量。

## 前 言\*

随着世界经济金融化的程度不断提高，全球经济金融市场的相互依赖性不断增强，金融市场之间的联动效应日益显著。近年来，在全球一体化趋势下，世界各国经济的交流密切而频繁，资源在全球范围内重新配置，各国金融市场不断加大开放力度，资本在全球范围内快速自由地流动。这同时也加大了全球金融市场之间的相互依赖性，导致了各个市场之间变动的相互效应，使任何地区金融市场的局部变动都会迅速地波及扩散到其他市场，加大了全球金融市场的变动性和风险，以至于容易引发金融危机，给世界经济带来灾难性的后果。因此，正确认识金融市场上各种金融资产价格的运行变化，采用科学的方法和工具度量金融变动，无论从风险防范规避角度出发，还是从风险管理监控的角度出发，都具有非常重要的现实意义。

一直以来，研究者们都试图把握金融资产价格变化规律并在此基础上对其未来变化进行精确预测，从而指导科学决策。已有的研究结果表明，金融资产价格是具很强的非高斯特征的复杂随机过程，虽然研究者们已经付出了巨大努力，然而这仍然是一项还未完成的艰巨任务。由于绝大部分金融市场数据是时间序列数据，即根据其产生的时间顺序进行排列的数值序列，因此采用时间序列技术对其进行分析是一个相当自然的选择。时间序列计量经济学在金融研究中很重要，因为它为调查金融时间序列的动态关系提供了统计学方法和工具。近三四十年来，随着计算技术

\* 本书得到中南大学博士后基金资助。由周伟、张良平编著，由张良平校审。

与之相伴的数字优化技术的巨大进步，大量金融工具的高质量数据可获得，以及更复杂的计量经济学技术的发展和采用已经极大地改变了这个领域的研究。最重要的是，这些进步不仅仅限于学术界，而且深深地影响了现代金融的实践，特别是投资管理，并且这又进一步促进了这个研究领域新的发展。今天时间序列计量经济学已经成为计量经济学研究中发展最活跃的部分。

本书重点讨论时间序列计量经济学模型及其在金融时间序列研究中的应用，其中理论部分着重在于介绍近年来用于金融研究领域的一些重要的时间序列计量经济学模型和方法，而不是给出一系列严格的理论证明，因此，数学和统计学的基本条件并没有深入涉及。

早期的时间序列计量经济学主要着重于经济和金融时间序列数据的线性时序分析，而线性时间序列计量经济学在统计学理论和方法上的应用已经达到了相当成熟的阶段，且广泛应用于经济和金融研究。因此，在第1章对时间序列分析的基本概念进行介绍之后，第2章着重于对经典的一元线性模型——移动平均自回归模型进行讨论，其中包括模型的统计学特征以及建模程序。第3章讨论多元线性平均自回归模型，其中包括模型的统计学特征以及建模程序。第3章讨论多元线性模型——向量自回归(VAR)模型的统计学特征，协整分析和模型估计方法。虽然金融数据中的波动群集现象早在 Mandelbrot (1963) 和 Fama (1965) 的研究中就已经被证明其存在，但是直到 Engle (1982) 提出自回归条件异方差(ARCH)模型以及 Bollerslev (1986) 提出广义自回归条件异方差(GARCH)模型，研究者们才开始对这种现象严格建模。第4章就 ARCH/GARCH 模型统计特征、模型估计和模型非对称性扩展进行介绍。

然而，线性时间序列模型不能抓住非线性的固有现象，例如不对称、时间不可逆、幅度依赖调整，以及制度转移、波动群集

和跳跃或异常点。在过去二十年里，非线性时间序列分析已经得到了迅猛发展，这主要归因于非线性动力学的大量需求、大型时间序列数据的可获得、计算机技术的进步和时间序列中非参数分析的应用。实证研究表明，在许多情况下从某个具体的观点出发，非线性时间序列能够引起模型拟合和预测方法的改进。本书的第5章、第6章和第7章分别对目前最流行的三种非线性时间序列计量经济学模型——平滑过渡自回归模型、阈值自回归模型和马尔可夫转换模型，予以讨论。与线性时间序列计量经济学不同，非线性时间序列计量经济学在理论和方法上还没有取得成熟的发展，仍处于进一步发展和完善过程中。

第8章和第9章分别阐述对前面章节所介绍的这些时间序列计量经济学模型在金融研究中的应用。虽然本书在前面几章也分别给出了相应时间序列模型的实证研究，但是这两章的研究工作不仅仅是简单应用某一种时间序列模型，而是根据所研究的具体金融时间序列的特征，在综合多种时间序列模型的基础上构建新的时间序列模型所进行的实证研究，是在进一步更准确地描述金融时间序列复杂的随机行为，是在获得更精确的样本外预测能力方面，以及有助于获得更合理的科学决策方面的有益探索。

由于本书所涉及的理论和方法许多部分是该研究领域的最新研究成果，覆盖范围较广、研究难度较大，许多问题还有待深入探讨，因此，很可能研究还不够充分，水平有限，错误和不当之处在所难免，恳请专家、同行和读者给予批评指正。

作 者

2008年9月

# 目 次

第1章 绪论	1
1.1 金融时间序列	1
1.2 随机过程与平稳性	2
1.3 相关和自相关函数	3
1.4 白噪音	5
1.5 随机游走模型	5
第2章 一元线性模型	7
2.1 ARMA模型	7
2.2 整合模型	12
2.3 分整模型	14
2.4 ARMA模型的统计推断	15
第3章 向量自回归模型	19
3.1 概述	19
3.2 平稳性条件	20
3.3 最大似然估计	22
3.4 单位根检验	23
3.5 多元协整分析	25
3.6 多元Granger因果分析	28
3.7 广义脉冲响应分析	32

3.8 实证研究（I）——我国外汇市场主要汇率 协整分析.....	35
3.9 实证研究（II）——人民币汇率制度之于 “三元悖论” .....	41
第4章 条件异方差模型 .....	
4.1 ARCH 模型 .....	56
4.2 GARCH 模型.....	60
4.3 不对称 ARCH/GARCH 模型 .....	63
4.4 实证研究——基于 GARCH 模型与 ANN 技术的 汇率预测.....	67
第5章 平滑过渡自回归模型 .....	
5.1 模型介绍.....	80
5.2 线性测试.....	83
5.3 建模程序.....	87
5.4 实证研究（I）——基于 STAR 模型的人民币实际 汇率行为的描述.....	90
5.5 实证研究（II）——基于 STAR 模型的中国股票市 场的非线性行为研究.....	97
第6章 阈值自回归模型.....	
6.1 概述 .....	108
6.2 二制度 SETAR 模型 .....	108
6.3 三制度 SETAR 模型 .....	112
6.4 实证研究——股市交易者行为异质实证研究 .....	116

---

第 7 章 马尔可夫转换模型.....	128
7.1 概 述 .....	128
7.2 马尔可夫转换模型 .....	129
7.3 模型估计 .....	130
7.4 线性测试 .....	134
7.5 实证研究——人民币实际汇率中的马尔可夫 转换行为 .....	136
第 8 章 人民币汇率的非线性行为描述与预测研究.....	144
8.1 导 论 .....	144
8.2 实际汇率行为研究的理论基础 .....	150
8.3 人民币汇率的特征与模型构造 .....	157
8.4 人民币实际汇率行为的描述 .....	163
8.5 人民币实际汇率的预测 .....	177
第 9 章 时间序列计量经济学模型及其在汇率制度 研究中的应用.....	192
9.1 概 述 .....	192
9.2 汇率目标区理论框架 .....	205
9.3 三制度 DTGARCH 汇率模型的构建 .....	236
9.4 三制度 DTGARCH 汇率模型与汇率行为描述 ..	262
9.5 三制度 DTGARCH 汇率模型与汇率预测 .....	281
9.6 三制度 DTGARCH 汇率模型与汇率制度分析 ..	300

时间序列分析(1),数据并为一不规则时间间隔的随机变量,且根据其性质分为确定性时间序列和随机时间序列。确定性时间序列可以表示为  $y_t = f(t) + \epsilon_t$ , 其中  $f(t)$  表示确定性部分,  $\epsilon_t$  表示随机误差项。随机时间序列可以表示为  $y_t = \mu + \sigma \epsilon_t$ , 其中  $\mu$  表示均值,  $\sigma$  表示标准差,  $\epsilon_t$  表示随机误差项。如果一个时间序列满足  $y_t = \mu + \sigma \epsilon_t$ , 则该序列称为白噪声。如果一个时间序列满足  $y_t = f(t) + \epsilon_t$ , 则该序列称为确定性时间序列。如果一个时间序列满足  $y_t = \mu + \sigma \epsilon_t$ , 则该序列称为随机时间序列。

## 第1章 绪论

### 1.1 金融时间序列

时间序列分析是一种重要的现代统计分析方法,广泛应用于自然科学和社会科学领域,尤其是经济领域的研究,例如商业周期衡量、金融风险管理、政策分析和预测等方面都运用到了时间序列分析。所谓时间序列就是将某一个指标在不同时间上的不同数值按时间的先后顺序排列而成的数列。时间序列分析的基本特征就是研究时间序列随时间发展的模式,其区别于其他模型的重要特征之一就是明确重视时间顺序的重要性。首先,时间序列与其他变量数列不同,序列中的观察值是按一定顺序取得的,并保持其顺序不变,因为只有这样才能保证所研究现象的历史发展过程不变。其次,时间序列中的观察值之间存在一定的依存关系,因为任何现象的发展一般都具有一定的惯性(延续性)。再次,时间序列分析是根据预测变量本身或其他相关变量过去的变化规律来预测未来的变化。

金融时间序列是经济与金融领域中最重要的数据类型,对这类数据进行分析、预测和控制是整个经济和金融活动的重要工作。金融时间序列特指各种不同金融产品的时间序列,如汇率、基金、股票价格等,通过取自相同时间段的多种金融时间序列所构成的多元金融时间序列。显然金融时间序列是一种特殊的时间序列,它与金融市场和人类的各种经济活动紧密相关。与其他的时间序

列相比,金融时间序列具有以下一些特殊性:(1)厚尾。厚尾简单地意味着金融资产收益时间序列的无条件分布有一个比正态分布更厚的尾部。(2)不对称性。研究已经证实股票收益时间序列的分布偏度稍微为负,原因是交易者对负面消息的反应比对正面消息的反应更强烈。(3)波动群集。波动群集是指这样一个事实,即大幅度价格变化后接着是大幅度价格变化,小幅度价格变化后接着是小幅度价格变化。(4)显著的非平稳性。金融市场是一个由自然、社会、心理、政治、经济等很多因素共同作用的复杂系统,因此金融时间序列往往具有非平稳性特征。

## 1.2 随机过程与平稳性

考虑到未来观察值的不可预测性,因此在使用正式的统计方法对一组金融时间序列进行分析时,往往将观察到的序列 $(x_1, x_2, \dots, x_T)$ 看作是一个随机过程的某组具体实现值,这对于理论讨论,例如预测和渐近分析,很方便。因此,时间序列 $(x_1, x_2, \dots, x_T)$ 是随机变量族 $\{X_t, t \in T\}$ 的一种实现,被记为 $\{x_t\}_1^T$ 。一般地,这个随机过程本身是定义在一个恰当的概率空间上的随机变量族 $\{X_t\}_{-\infty}^{\infty}$ ,通常限制主随机过程的指示集 $T = (-\infty, \infty)$ 与实现值的指示集(即 $T = (1, T)$ )相同。常常用大括号中的随机变量表示随机过程,即 $\{X_t\}$ ,也被称为一个过程或模型。

平稳性是时间序列分析的基础。对于一个时间序列 $\{x_t\}$ ,如果针对任意整数 $k$ 和 $h$ ,观察值 $(x_t, x_{t+1}, \dots, x_{t+k})$ 的联合概率分布与 $(x_{t+h}, x_{t+1+h}, \dots, x_{t+k+h})$ 的联合概率分布完全一样,那么这个时间序列被认为是严平稳的。换句话说,严平稳要求 $(x_t, x_{t+1}, \dots, x_{t+k})$ 的联合概率分布是不随时间变化的。然而,严平稳条件对于大多数时间序列而言太严格了,很难用实例证实。因此,在研究中往往假设一种较弱的平稳条件,即如果一个时间序列具有不

随时间变化的一阶矩和二阶矩,它就被称为宽平稳或二阶平稳。本书后面所提及的平稳都是指这种宽平稳。换句话说, $\{x_t\}$ 是宽平稳的,如果满足:

$$(1) E(x_t) = U_x, \text{ 其中所有 } t \in T;$$

$$(2) E[(x_t - \mu_x)(x_{t+h} - \mu_x)] = \gamma_h, \text{ 其中对于所有 } t \in T \text{ 且对于所有整数 } h, \text{ 有 } t+h \in T.$$

第一个条件意味着一个平稳随机过程的所有值都具有相同的常数均值。因此,一个由平稳随机过程产生的时间序列必然围绕一个常数均值波动。第二个条件确保方差也是不随时间变化,因为对于  $h=0$ , 方差  $\sigma_y^2 = E[(y_t - \mu_y)^2] = \gamma_0$  不取决于  $t$ 。此外, 协方差  $E[(y_t - \mu_y)(y_{t-h} - \mu_y)] = \gamma_h$  并不取决于  $t$ , 而是取决于这个过程中两个值之间的距离  $h$ 。如果一个时间序列服从高斯分布,那么其满足宽平稳条件的同时必然也满足严平稳条件。

### 1.3 相关和自相关函数

两个随机变量  $X$  和  $Y$  之间的相关函数 (correlation function, CF) 定义为

$$\rho_{x,y} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X) \cdot \text{Var}(Y)}} = \frac{E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)]}{\sqrt{E(X - \mu_x)^2 E(Y - \mu_y)^2}} \quad (1.1)$$

其中  $X$  和  $Y$  的均值分别为  $\mu_x$  和  $\mu_y$ , 且各自的方差存在。这个系数度量了  $X$  和  $Y$  之间的线性相关程度, 具有如下性质:

$$(1) -1 \leq \rho_{x,y} \leq 1;$$

$$(2) \rho_{x,y} = \rho_{y,x};$$

(3) 如果  $\rho_{x,y} = 0$ , 那么意味着这两个变量无关;

(4) 如果变量  $X$  和  $Y$  都服从正态分布, 那么当且仅当两者无关时, 有  $\rho_{x,y} = 0$ 。

当样本  $\{(x_t, y_t)\}_{t=1}^T$  可得时,  $X$  和  $Y$  的相关系数能由其样本相关系数估计值获得

$$\hat{\rho}_{x,y} = \frac{\sum_{t=1}^T (x_t - \mu_x)(y_t - \mu_y)}{\sqrt{\sum_{t=1}^T (x_t - \mu_x)^2} \sqrt{\sum_{t=1}^T (y_t - \mu_y)^2}}. \quad (1.2)$$

从一个宽平稳过程所获得的两个随机变量  $X_i$  和  $X_{i+\tau}$  之间的相关关系被称为滞后步长为  $\tau$  的自相关函数 (autocorrelation function, ACF), 记为  $\rho_\tau$ 。在宽平稳假设下,  $\rho_\tau$  是  $\tau$  的函数而与时间无关。因此, 定义为

$$\rho_\tau = \frac{\text{Cov}(X_i, X_{i+\tau})}{\sqrt{\text{Var}(X_i) \text{Var}(X_{i+\tau})}} = \frac{\text{Cov}(X_i, X_{i+\tau})}{\text{Var}(X_i)} = \frac{\gamma_\tau}{\gamma_0}, \quad (1.3)$$

其中  $\text{Var}(x_i) = \text{Var}(X_{i+\tau})$  对于一个宽平稳随机过程是成立的。显然, 自相关系数  $\rho_\tau$  具有如下性质:

- (1)  $\rho_0 = 1$ ;
- (2)  $\rho_\tau = \rho_{-\tau}$ ;
- (3)  $-1 \leq \rho_\tau \leq 1$ ;

(4) 对于所有  $\tau > 0$ , 当且仅当  $\rho_\tau = 0$  时, 一个宽平稳过程  $\{X_t\}$  是序列无关的;

(5) 自相关函数不唯一地识别潜在的模型。虽然一个随机过程具有唯一的协方差结构, 但是反之并不成立。通常能够找到许多具有相同自相关函数的正态和非正态过程, 因此需要设定可逆条件来确保模型的唯一性。

对于一个宽平稳的时间序列  $\{x_t\}_{t=1}^T$ , 滞后步长为  $\tau$  的样本自相关系数(函数)为

$$\hat{\rho}_\tau = \frac{\sum_{t=\tau+1}^T (x_t - \mu)(x_{t-\tau} - \mu)}{\sum_{t=1}^T (x_t - \mu)^2}, \quad 0 \leq \tau \leq T-1 \quad (1.4)$$

其中  $\mu$  是该时间序列的样本均值, 即  $\mu = \sum_{t=1}^T (x_t / T)$ 。如果

$\{x_t\}_{t=1}^T$  独立同分布且满足  $E(x_t^2) < \infty$ , 那么  $\hat{\rho}_\tau$  演近服从均值为 0 且方差为  $1/T$  的正态分布。在有限样本情况下,  $\hat{\rho}_\tau$  是  $\rho_\tau$  的有偏估计。

## 1.4 白噪音

如果  $\{x_t\}$  是服从有限均值和方差独立同分布的随机变量序列, 那么时间序列  $x_t$  被称为白噪音。尤其是, 如果  $\{x_t\}$  服从的是均值为 0 且方差为  $\sigma^2$  的正态分布, 那么这个时间序列被称为高斯白噪音。对于白噪音时间序列, 有

$$\rho_0 = 1 \text{ 和 } \rho_\tau = 0, \text{ 对于所有 } \tau > 0.$$

在实际应用中, 若某个时间序列所有的样本自相关函数都近似为 0, 则认为该序列是白噪音序列。然而, 自相关为 0 并不确保该随机变量  $X_t$  是与其的一个现实值  $x_t$  不相关, 即使当  $X_t$  服从相同的无条件分布。如果  $X_t$  是独立和平稳的, 那么这个随机过程被称为严白噪音。

## 1.5 随机游走模型

一个过程  $\{X_t\}$  是一种随机游走过程, 如果它满足

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t \quad (1.5)$$

其中, 假设  $\{\varepsilon_t\}$  是一个离散的纯随机过程, 其中均值为  $\mu$  且方差为  $\sigma_\varepsilon^2$ 。习惯上这个过程当  $t=0$  取值为 0, 所以

$$X_1 = \varepsilon_1 \quad (1.6)$$

且

$$X_t = \sum_{i=1}^t \varepsilon_i \quad (1.7)$$

那么, 显然有  $E(X_t) = t\mu$  且  $\text{Var}(X_t) = t\sigma_\varepsilon^2$ 。随着  $t$  变化, 均值和方

差都发生变化,因此这个过程不是平稳的。通过一阶差分处理,这个随机游走模型变成

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1} = \epsilon_t$$

这是一个纯随机过程,是平稳的。

### 高粱白粉病

中国科学院植物研究所植物病理学研究室对高粱白粉病进行了长期的研究。他们用显微镜观察了高粱白粉病菌孢子萌发、侵入和生长情况,并测定了孢子萌发率、侵入率、孢子管生长速度等指标,从而得出了高粱白粉病菌孢子萌发、侵入和生长的数学模型。该模型由以下三部分组成:

1. 孢子萌发模型:  $\frac{dN}{dt} = k_1 N (1 - \frac{N}{K}) - k_2 N^2$

2. 侵入模型:  $\frac{dI}{dt} = k_3 N I - k_4 I^2$

3. 孢子管生长模型:  $\frac{dL}{dt} = k_5 I L - k_6 L^2$

### 电影布景设计

中国科学院植物研究所植物病理学研究室对高粱白粉病进行了长期的研究。他们用显微镜观察了高粱白粉病菌孢子萌发、侵入和生长情况,并测定了孢子萌发率、侵入率、孢子管生长速度等指标,从而得出了高粱白粉病菌孢子萌发、侵入和生长的数学模型。该模型由以下三部分组成:

1. 孢子萌发模型:  $\frac{dN}{dt} = k_1 N (1 - \frac{N}{K}) - k_2 N^2$

2. 侵入模型:  $\frac{dI}{dt} = k_3 N I - k_4 I^2$

3. 孢子管生长模型:  $\frac{dL}{dt} = k_5 I L - k_6 L^2$

## 第2章 一元线性模型

金融时间序列分析中最常用的一元线性时间序列计量经济学模型是三类线性模型：自回归(AR)模型、移动平均(MA)模型、ARMA模型。一种观点认为，这些模型为数据生产过程的动态性提供了很好的一阶逼近。另一种观点则认为，它们仅仅试图抓住DGP(数据生成过程)的前二阶矩，即均值和协方差(包括方差和相关)。因为在高斯分布中所有特征都被前二阶矩描述了，所以这些线性模型都偏好采用几乎服从高斯分布的数据或样本。对于预测者而言，这些简单的线性模型是吸引人的，只要非高斯或非线性特征不足够强到能被其他模型成功地抓住。事实上对于许多已知包含非线性动态性的数据集，这些非线性既不足够明显地不随时间变化，也不足够统计显著地改进预测。这证明这些简单线性模型的流行是合理的。

### 2.1 ARMA 模型

#### 2.1.1 移动平均模型

一个过程是遵循一个阶为  $q$  的移动平均过程，记为  $\text{MA}(q)$ ，如果其满足

$$X_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (2.1)$$

其中假设  $\{\varepsilon_t\}$  是一个纯随机过程，均值为 0 且方差为  $\sigma_\varepsilon^2$ 。既然  $\varepsilon_t$  是相互独立的，那么显然有

$$E(X_t) = 0$$

$$\text{Var}(X_t) = \sigma_\epsilon^2 \sum_{i=0}^q \theta_i^2 \quad (2.2)$$

同时,既然

$$\text{Cov}(Z_s, Z_t) = \begin{cases} \sigma_Z^2, & s = t \\ 0, & s \neq t \end{cases} \quad (2.3)$$

则有

$$\begin{aligned} \gamma(k) &= \text{Cov}(X_t, X_{t+k}) \\ &= \text{Cov}(\epsilon_t + \dots + \theta_q \epsilon_{t+q}, \epsilon_{t+k} + \dots + \theta_q \epsilon_{t+k-q}) \\ &= \begin{cases} 0, & k > q \\ \sigma_\epsilon^2 \sum_{i=0}^{q-k} \theta_i \theta_{i+k}, & k = 0, 1, \dots, q \\ \gamma(-k), & k < 0 \end{cases} \quad (2.4) \end{aligned}$$

由于  $\gamma(k)$  不取决于  $t$  且均值为常数, 所以对于  $\{\theta_i\}$  任意取值, 这个过程都是二阶平稳的。此外, 如果  $\epsilon_t$  服从正态分布, 那么  $X_t$  也服从正态分布, 因此  $\{X_t\}$  是一个严格的和平稳的正态分布过程。

这个 MA( $q$ ) 过程的自相关函数为

$$\rho(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \frac{\sum_{i=0}^{q-k} \theta_i \theta_{i+k}}{\sum_{i=1}^q \theta_i^2}, & k = 1, \dots, q \\ 0, & k > q \\ \rho(-k), & k < 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

注意, 在滞后步长  $q$  处这个自相关函数被“切断(cut off)”, 这是 MA 过程的一个特征。

无需对  $\{\theta_i\}$  作出限制以获得平稳的 MA 过程, 但是通常会对其设置一个约束条件以确保这个过程是可逆的。这个约束条件解释如下:

一阶 MA 过程