世界优秀教材中国版

MATHEMATICAL TOOLS FOR ECONOMICS

[澳] DARRELL A. TURKINGTON 著

经济学的数学工具

■ 吴汉洪　邱中虎　译
■ 吴汉洪　审校

高等教育出版社
Higher Education Press

世界优秀教材中国版

本成果受到中国人民大学“985”工程
“中国经济研究哲学社会科学创新基地”的支持

MATHEMATICAL TOOLS FOR ECONOMICS

[澳] DARRELL A. TURKINGTON 著

经济学的数学工具

■ 吴汉洪 邱中虎 译
■ 吴汉洪 审校

高等教育出版社
Higher Education Press

图字:01-2008-3437号

本书译自Mathematical Tools for Economics, First Edition, by Darrell A. Turkington

This edition is published by arrangement with **Blackwell Publishing Ltd**, Oxford.
Translated by **Higher Education Press** from the original English language version.
Responsibility of the accuracy of the translation rests solely with **Higher Education Press** and is not the responsibility of **Blackwell Publishing Ltd**.

图书在版编目(CIP)数据

经济学的数学工具/(澳)特金顿(Turkington, D. A.)著;吴汉洪,邱中虎译.—北京:高等教育出版社,2009.1

ISBN 978-7-04-025616-1

Ⅰ.经… Ⅱ.①特…②吴…③邱… Ⅲ.经济数学 Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第181314号

策划编辑 权利霞 **责任编辑** 董达英 **封面设计** 刘晓翔
责任绘图 郝 林 **版式设计** 王 莹 **责任校对** 胡晓琪
责任印制 韩 刚

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100120	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	中原出版传媒投资控股集团 北京汇林印务有限公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×1092 1/16	**版　　次**	2009年2月第1版
印　　张	17.25	**印　　次**	2009年2月第1次印刷
字　　数	390 000	**定　　价**	38.00元

物料号 25616-00

序　言

为经济学工作者写的数学书数不胜数，其中大部分，至少对于学生而言，都是繁复冗长，涵盖了经济学中能够用到的数学知识的所有细枝末节。而本书的针对性则要强得多，主要是提供经济学专业学生所需的第二阶段数学。此阶段的数学在英国的大学里常为二、三年级本科生开设一个学期，在美国的大学里常为三、四年级本科生开设一个学期。就内容而言，本书介于 S. Glaister 的《经济学家的数学方法》和 P. Lambert 的《经济学家的高级数学》之间——这两本精品教材已由 Blackwell 公司出版。对于绝大多数经济学专业学生而言，这将是在数学或者数量方法方面所学的最后一门课程。

尽管如此，书中仍有少数章节，从一门课程的角度看可能过于高深，或者太专业化。这样的章节都用星号加以注明。

本书在内容的呈现上也有所不同，采用的讲授方法着重于先讲数学原理，然后再举例说明这些原理是如何在经济学中得以应用的。从数量经济学中选取的那些案例并不一定是这些数学方法在经济学中的最新应用，但我认为它们都是很经典的应用。

本书主要针对经济学专业而非数学专业的学生，为此我进行了一定的取舍。书中收入了一些定理的证明，为的是让学生领略一下数学推理的滋味，但同时舍弃了其他定理的证明，以免使学生望而生畏。本书还包含了很多包括解题步骤的例子，相信这些例子将有助于阐明和巩固本书各章节中出现过的相当抽象的概念和方法。各节末尾附有习题，这些习题都经过精心挑选以突出该节讲过的内容。我强烈希望学生做完这些习题，因为就我们大多数人而言，数学是在做中学会的。

最后，本书包含了一些对经济学工作者来说可能较新的内容。例如，书中加入了介绍矩阵微积分的一节，我相信这部分内容今后对数量经济学工作者将会十分有用。读者一旦熟悉了多元微积分中的常用技巧和矩阵代数中关于矩阵向量化和矩阵求迹的规则，这部分内容就很容易掌握。

在本书的出版过程中，应该感谢一些人：感谢我的合作者 Juerg Weber 和 Michael McAleer，他们给了我帮助和鼓励；感谢 Helen Reidy 和 Linda Barbour，他们以耐心和技巧录入了我的手稿；感谢我的学生 Giri Parameswaren，他校读了全书；感谢我妻子 Sonia，她给了我自始至终的支持。

目　录

第三部分 动态分析

第一部分

矩阵代数和线性经济模型

第 1 章　矩 阵 代 数

1.1　基本概念

引言

大多数经济学分析都是在线性经济模型框架下进行的. 换成数学语言，这些模型不过是一些联立线性方程组. 矩阵代数就是从对此类方程组的研究中衍生出来的数学分支，因此适宜作为本书的起始点.

我们的工作从矩阵代数开始也是出于教学方面的考虑. 这类知识的某些概念，比如行列式和正定矩阵，为全面理解最优化问题所必需，而后者为本书第二部分内容.

为简洁起见，我们从矩阵代数的数学内容开始，而将其经济学应用放至本节结尾.

本书强调的是对该数学分支部分所用概念的理解，证明部分只会简略地给出. 本章出现的所有定理的正式证明可以在 Hadley，G. (1964)《线性代数》中找到.

矩阵是元素的长方形阵列. 我们用大写字母表示矩阵，有时候用下标表示该阵列的行数和列数. 元素用小写字母表示，例如，

$$\boldsymbol{A}_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

需要注意的是每个元素也有两个下标. 第一个表示该元素所处的行，而第二个表示该元素所处的列. 一般而言，a_{ij} 为第 i 行第 j 列的元素，即第(i,j)个元素. 在本书中，矩阵所有元素都是实数. 我们经常将矩阵更简洁地表示为 $\boldsymbol{A}=\{a_{ij}\}$，用一个花括号将矩阵第$(i,j)$个元素括起来.

基本矩阵运算

1. 相等

如果两个矩阵具有相同的阶(行数和列数都相同)，并且对应的元素全都相等，则这两个矩阵相等.

这意味着，令 $\boldsymbol{A}_{m\times n}=\{a_{ij}\}$，$\boldsymbol{B}_{m\times n}=\{b_{ij}\}$，那么当且仅当 $a_{ij}=b_{ij}$ 时 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

2. 相加

同样令 $\boldsymbol{A}_{m\times n}=\{a_{ij}\}$，$\boldsymbol{B}_{m\times n}=\{b_{ij}\}$，那么 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\{a_{ij}+b_{ij}\}$.

例　令

$$A=\begin{pmatrix}2&5&7\\8&9&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1&6&4\\5&2&0\end{pmatrix},$$

那么

$$A+B=\begin{pmatrix}1&11&11\\13&11&1\end{pmatrix}.$$

3. 数乘

在矩阵的术语中**数量**就是一个实数. 设 $A=\{a_{ij}\}$, λ 是一个数量,则

$$\lambda A=\{\lambda a_{ij}\}.$$

例 令

$$A=\begin{pmatrix}-2&0\\-7&4\end{pmatrix},$$

于是

$$-3A=\begin{pmatrix}6&0\\21&-12\end{pmatrix}.$$

4. 矩阵相乘

令 $A_{m\times n}=\{a_{ij}\}$, $B_{n\times p}=\{b_{ij}\}$,则 $C=AB$ 是一个 $m\times p$ 的矩阵,其中第(i,j)个元素为 $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$.

矩阵**乘积** AB 的第(i,j)个元素由矩阵 A 的第 i 行和矩阵 B 的第 j 列中对应元素相乘后再相加得到.

例 令

$$A_{3\times2}=\begin{bmatrix}3&0\\1&2\\-1&6\end{bmatrix},\quad B_{2\times2}=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix},$$

于是

$$C_{3\times2}=AB=\begin{bmatrix}3\times2+0\times1&3\times1+0\times1\\1\times2+2\times1&1\times1+2\times1\\-1\times2+6\times1&-1\times1+6\times1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&3\\4&3\\4&5\end{bmatrix}.$$

注意

(i) 要使 AB 存在,A 的列数必须等于 B 的行数. 如果该条件满足的话,我们称 A 和 B 是乘法**相容**的.

(ii) AB 的阶如下求取:

$$\underset{m\times\cancel{n},\cancel{n}\times p}{AB}.$$

例 在我们的例子中,$C_{3\times2}=AB_{3\times\cancel{2},\cancel{2}\times2}$.

(iii) 矩阵乘法并不遵循**交换律**,即一般而言 $AB\neq BA$. 在我们上面的例子中,AB 是 3×2的矩阵,而 BA 根本就不存在. 即使 AB,BA 都存在,一般而言两者也不会相等.

例 令

$$A_{3\times2}=\begin{bmatrix}3&2\\-1&4\\5&0\end{bmatrix},\quad B_{2\times3}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\5&2&4\end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}7 & 4 & 11\\ 21 & 8 & 15\\ -5 & 0 & 5\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 33 & 18\end{pmatrix}.$$

由于 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 的阶不同，$\boldsymbol{AB}$ 为 3×3 的矩阵而 $\boldsymbol{BA}$ 为 2×2 的矩阵，它们根本不可能相等.

即使 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$ 的阶相同，一般而言也是 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$.

例 令

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 0 & 5\end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}6 & 13\\ -3 & -4\end{pmatrix},$$

而

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -5 & 0\end{pmatrix}.$$

同样，$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$.

如果 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$ 都存在，我们称前者为 $\boldsymbol{A}$ **左乘** $\boldsymbol{B}$ 而称后者为 $\boldsymbol{A}$ **右乘** $\boldsymbol{B}$.

(iv) 尽管矩阵乘法不遵循交换律，但矩阵乘法和加法却遵循**分配律**，即

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC},$$
$$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}.$$

5. 矩阵的迹

假设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 的矩阵，也就是说 $\boldsymbol{A}$ 的行数等于列数，我们称 $\boldsymbol{A}$ 为**方阵**. 如果该条件满足，则 $\boldsymbol{A}$ 的迹为**主对角线**元素之和，记为 $\operatorname{tr}\boldsymbol{A}$，即

$$\operatorname{tr}\boldsymbol{A}=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}.$$

例 令

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 7 & 5\\ 6 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix},$$

则

$$\operatorname{tr}\boldsymbol{A}=3+(-1)+4=6.$$

迹运算的一个重要性质是 $\operatorname{tr}\boldsymbol{AB}=\operatorname{tr}\boldsymbol{BA}$，$\operatorname{tr}\boldsymbol{ABC}=\operatorname{tr}\boldsymbol{BCA}=\operatorname{tr}\boldsymbol{CBA}$.

6. 矩阵的转置

矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}=\{a_{ij}\}$ 的**转置**是一个 $n\times m$ 的矩阵，其中第 (i,j) 个元素为 a_{ji}，记作 $\boldsymbol{A}'$. 将 $\boldsymbol{A}$ 的行和列互换即可得到 $\boldsymbol{A}'$.

例

$$\boldsymbol{A}_{3\times2}=\begin{bmatrix}4 & 5\\ 8 & 9\\ 1 & 2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}'_{2\times3}=\begin{pmatrix}4 & 8 & 1\\ 5 & 9 & 2\end{pmatrix}.$$

如果 $A'=A$,则 A 是**对称**的.

例 令

$$A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 5\\4 & 2 & -1\\5 & -1 & 0\end{pmatrix},$$

则

$$A'=A.$$

需要注意的是要使 A 对称,其必须是方阵.

转置规则

(i) $(A')'=A$.

(ii) $(A+B)'=A'+B'$.

(iii) $(AB)'=B'A'$.

(iv) AA' 和 $A'A$ 是对称的.

为说明最后一条规则成立,考虑:

$$\begin{aligned}(AA')' &= (A')'A' && \text{由规则(iii)}\\ &= AA'. && \text{由规则(i)}\end{aligned}$$

特殊矩阵

1. 单位矩阵

单位矩阵是主对角线上元素为 1 而其余元素为 0 的方阵.

例

$$I_{2\times 2}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix},\quad I_{3\times 3}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

表示 $n\times n$ 单位矩阵的一个简洁方式是 $I_{n\times n}=\{\delta_{ij}\}$,其中 δ_{ij} 为克罗内克符号(**Kronecker delta**),其定义为:

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\0, & i\neq j.\end{cases}$$

单位矩阵在矩阵代数中所起的作用跟数字 1 在实数系中所发挥的作用一样,对于任意实数 a,

$$1\cdot a=a\cdot 1=a.$$

而对于任意的 $m\times n$ 矩阵 A,有

$$I_{m\times m}A=AI_{n\times n}=A.$$

需要注意的是为了保持可乘性,我们使用了不同阶的单位矩阵.

2. 数量矩阵

数量矩阵可表示为 $\lambda I_{n\times n}$,其中 λ 为数量,即

$$\lambda I=\{\lambda\delta_{ij}\}=\begin{pmatrix}\lambda & & 0\\ & \ddots & \\0 & & \lambda\end{pmatrix},$$

其中两个 0 表示在所有非主对角线位置上的元素都是零.

3. 对角矩阵

对角矩阵是

$$\boldsymbol{D} = \{\lambda_i \delta_{ij}\} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

4. 零矩阵

零矩阵是指所有元素都为零的矩阵，我们用一个黑体的零加以表示，即

$$\mathbf{0}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

零矩阵在矩阵代数中所发挥的作用和实数零在实数系中发挥的作用一样. 对于任意实数 a,

$$a + 0 = 0 + a = a,$$
$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0.$$

而对于任意 $m \times n$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 而言,

$$\boldsymbol{A}_{m\times n} + \mathbf{0}_{m\times n} = \mathbf{0}_{m\times n} + \boldsymbol{A}_{m\times n} = \boldsymbol{A}_{m\times n},$$
$$\boldsymbol{A}_{m\times n}\mathbf{0}_{n\times n} = \mathbf{0}_{m\times m}\boldsymbol{A}_{m\times n} = \mathbf{0}_{m\times n}.$$

5. 幂等矩阵

如果方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{AA}=\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{A}$ 为**幂等矩阵**. 例如

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

6. 向量

行向量是一个 $1\times n$ 的矩阵，而**列向量**是一个 $m\times 1$ 的矩阵. 我们将列向量表示为：

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

$\boldsymbol{a}$ 为黑体是提示我们这是一个向量而非数量，而行向量就写为 $\boldsymbol{a}'$. 注意，我们现在可以将一个 $m\times n$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 看作由一系列向量组成. 我们可以将其看作由 n 个 $m\times 1$ 的列向量组成，即由 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个列组成；同时又可以将其看作由 m 个 $1\times n$ 行向量，即 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个行组成. 当我们在处理 $\boldsymbol{A}$ 的秩时这点将很重要.

所有元素为实数的 $n\times 1$ 列向量（或者 $1\times n$ 行向量）组成的集合有一个特定的记号 $\mathbf{R}^n$. n 维的欧几里得空间记作 E^n，其实就是对空间中两个向量之间距离作出某种规定的 $\mathbf{R}^n$. 常使用的距离概念就是下面所定义的欧几里得距离. 向量 $\boldsymbol{x}$ 和向量 $\boldsymbol{y}$ 之间的距离为：

$$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

习题 1.1

1. 考虑下列矩阵：

$$A=\begin{pmatrix}2 & -5\\ 6 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -2 & 7\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 5 & 8\end{pmatrix}.$$

(i) 计算 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，$-3\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$，$\boldsymbol{CA}+\boldsymbol{CB}$，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$；

(ii) 计算 $\boldsymbol{AB}$，$\boldsymbol{BA}$，$\boldsymbol{ABC}$，$\boldsymbol{BCA}$ 和 $\boldsymbol{CAB}$. $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$ 是否相同？

(iii) 计算 $\operatorname{tr}\boldsymbol{AB}$，$\operatorname{tr}\boldsymbol{BA}$，$\operatorname{tr}\boldsymbol{ABC}$，$\operatorname{tr}\boldsymbol{BCA}$ 和 $\operatorname{tr}\boldsymbol{CAB}$.

2. 令

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 7\\ 5 & 0 & 8\end{pmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 4 & 2\\ -2 & 5 & -1\\ 3 & -1 & 6\end{bmatrix}.$$

(i) 计算 $\boldsymbol{AB}$. $\boldsymbol{BA}$ 是否存在？

(ii) 计算 $(\boldsymbol{AB})'$ 和 $\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'$；

(iii) 说明 $\boldsymbol{AA}'$ 是对称的.

3. 考虑下列矩阵：

$$A=\begin{bmatrix}2 & -3 & -5\\ -1 & 4 & 5\\ 1 & -3 & -4\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-1 & 3 & 5\\ 1 & -3 & -5\\ -1 & 3 & 5\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}2 & -2 & -4\\ -1 & 3 & 4\\ 1 & -2 & -3\end{bmatrix}.$$

(i) 说明 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，此乘积为多少？

(ii) 说明 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{C}$；

(iii) 说明 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{C}^2=\boldsymbol{C}$；

(iv) 利用(i)和(ii)的结果，证明：

(a) $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{ACB}=\boldsymbol{0}$；

(b) $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2$.

4. 定义一个对称幂等矩阵. 令 $\boldsymbol{I}$ 为 $n\times n$ 的单位矩阵，$\boldsymbol{i}$ 为所有元素都为 1 的 $n\times 1$ 向量. 令 $\boldsymbol{x}$ 为一个 $n\times 1$ 向量，其第 j 个元素为 x_j.

(i) 证明 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{ii}'/n$ 和 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 为对称幂等矩阵. 它们的迹各为多少？

提示：$\boldsymbol{ii}'$ 是一个数量，请回忆 $\operatorname{tr}\boldsymbol{AB}=\operatorname{tr}\boldsymbol{BA}$.

(ii) 请对向量 $\boldsymbol{Ax}$ 和 $\boldsymbol{Bx}$ 进行描述.

1.2 行列式

引言

任何一个方阵 $\boldsymbol{A}$ 都具有一个由 $\boldsymbol{A}$ 中元素确定的实数，我们称其为 $\boldsymbol{A}$ 的**行列式**.

表示符号

$$|\boldsymbol{A}|,\quad \det\boldsymbol{A}.$$

1. 2×2 情形

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix},$$

$$|A|=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

例

$$\begin{vmatrix}7 & 4\\ -2 & 1\end{vmatrix}=7\cdot 1-4\cdot(-2)=15.$$

2. 3×3 情形

考虑

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix},$$

则

$$|A|=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

例

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}1 & 0 & -5\\ 8 & -2 & 3\\ 6 & 7 & 1\end{vmatrix}&=1\cdot(-2)\cdot 1-0\cdot 8\cdot 1+0\cdot 3\cdot 6-5\cdot(-2)\cdot 6+5\cdot 8\cdot 7-1\cdot 3\cdot 7\\ &=-2+60+280-21\\ &=317.\end{aligned}$$

注意

(i) 行列式展开式中每一项的元素个数等于该方阵的阶数.

例

$$2\times 2\quad 2,$$

$$3\times 3\quad 3.$$

(ii) 每一项有且仅有每一行的一个元素,同时有且仅有每一列的一个元素.

(iii) 每一项中元素的第一个下标是自然数排序,而第二个下标则是对自然数序列一定形式的重新排列或置换.

利用代数余子式对行列式进行展开

考虑 $n\times n$ 矩阵 A.

定义

如果去掉 A 的一行和一列,我们可以得到 A 的一个 $n-1\times n-1$ 阶**子矩阵**. 取该子矩阵的行列式,我们就得到 A 的一个**子行列式**.

表示符号

用 $|A_{ij}|$ 表示去掉第 i 行、第 j 列后矩阵 A 的子行列式.

例

$$A=\begin{pmatrix}2&4&6\\3&2&3\\1&4&9\end{pmatrix},$$

$$|A_{11}|=\begin{vmatrix}2&3\\4&9\end{vmatrix}=18-12=6,$$

$$|A_{12}|=\begin{vmatrix}3&3\\1&9\end{vmatrix}=27-3=24,$$

$$|A_{13}|=\begin{vmatrix}3&2\\1&4\end{vmatrix}=12-2=10,$$

$$|A_{32}|=\begin{vmatrix}2&6\\3&3\end{vmatrix}=6-18=-12.$$

定义

a_{ij}的**代数余子**式记为c_{ij}，$c_{ij}=(-1)^{i+j}|A_{ij}|$.

例

在上面例子中，

$$c_{11}=(-1)^{1+1}\ |A_{11}|=1\cdot 6=6,$$
$$c_{12}=(-1)^{1+2}\ |A_{12}|=(-1)\cdot 24=-24,$$
$$c_{13}=(-1)^{1+3}\ |A_{13}|=1\cdot 10=10,$$
$$c_{32}=(-1)^{3+2}\ |A_{32}|=(-1)\cdot(-12)=12.$$

行列式的展开

定理

令 A 为 $n\times n$ 矩阵，则

$$|A|=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}c_{ij}\ \text{对于任意}\ i(\text{按第}\ i\ \text{行展开})\tag{1.1}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}c_{ij}.\ \text{对于任意}\ j(\text{按第}\ j\ \text{列展开}).\tag{1.2}$$

将(1.1)完整地写出，有

$$|A|=a_{i1}c_{i1}+a_{i2}c_{i2}+\cdots+a_{in}c_{in},$$

即，取 i 行中的每个元素，将其与对应的代数余子式相乘，然后相加. 对于每一行都采用这种方法.

将(1.2)完整地写出，有

$$|A|=a_{1j}c_{1j}+a_{2j}c_{2j}+\cdots+a_{nj}c_{nj},$$

即，取 j 列中的每个元素，将其与对应的代数余子式相乘，然后相加. 对于每一列都采用这种方法.

上例

假设我们按第一行对行列式进行展开，有：

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{A}| &= a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13} \\
&= 2 \cdot 6 + 4 \cdot (-24) + 6 \cdot 10 \\
&= 12 - 96 + 60 \\
&= -24.
\end{aligned}
$$

练习

选择其他行或列，求$|\boldsymbol{A}|$.

例

$$
|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.
$$

需要注意的是在第三列中有很多的零.当这些零元素和其代数余子式相乘时结果仍然为零，因此我们可以按第三列对行列式进行展开：

$$
|\boldsymbol{A}| = 1 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.
$$

现在我们需要计算一个 3×3 的行列式.同样第一列里面有两个零，因此我们按该列对此行列式进行展开，得到

$$
|\boldsymbol{A}| = 5 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -5 \cdot (2-3) = 5.
$$

步骤

如果矩阵的某一行或者某一列中有多个零，则可以按此行或者此列对行列式进行展开.

问题

如果行列式中没有零怎么办？要回答这个问题，我们需要先了解行列式的性质.

行列式的性质

这些性质的证明可参见 Hadley，G.（1964）的《线性代数》，第 87 页～第 95 页.

1. $|\boldsymbol{A}'| = |\boldsymbol{A}|$.

例

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & 0 & 6 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}' = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 7 & 0 & 4 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix},
$$

$$
\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 7 & 0 & 4 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & 0 & 6 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix}.
$$

2. 任意两行或者两列进行交换将改变行列式的符号.