全国高职高专教育"十一五"规划教材

# 高等数学（下册）

主　编　李文丰
副主编　唐仙芝

高等教育出版社
Higher Education Press

全国高职高专教育“十一五”规划教材

# 高等数学

（下册）

李文丰　主　编
唐仙芝　副主编

高等教育出版社

## 内容提要

本书是全国高职高专教育“十一五”规划教材，是根据教育部最新制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，在认真总结高职高专院校数学教学改革经验的基础上，结合对国内外同类教材发展趋势的分析而编写的。本书旨在以清晰、简洁的方式阐述高等数学的“基本概念、基本思想、基本方法”，坚持贯彻以应用为目的，以必需、够用为度的原则，强调数学思想的本质及数学的实用性，淡化数学的严密性、系统性及计算的技巧。

全书分上、下两册，上册内容包括一元函数微积分、微分方程、数学软件应用等；下册内容包括空间解析几何、多元函数微积分、级数、拉普拉斯变换、线性代数、概率统计、数学模型等。本书可作为高等职业技术学院、高等专科学校、成人高等学校等院校各专业的高等数学教材，也可作为工程技术人员知识更新的数学参考书。

**图书在版编目(CIP)数据**

高等数学．下册/李文丰主编．—北京:高等教育出版社,2009.2

ISBN 978-7-04-026181-3

Ⅰ．高…　Ⅱ．李…　Ⅲ．高等数学-高等学校:技术学校-教材　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 002036 号

**策划编辑**　邓雁城　　**责任编辑**　邓雁城　　**封面设计**　张志奇
**责任绘图**　吴文信　　**版式设计**　余　杨　　**责任校对**　王效珍
**责任印制**　陈伟光

| | | | |
|---|---|---|---|
| 出版发行 | 高等教育出版社 | 购书热线 | 010-58581118 |
| 社　　址 | 北京市西城区德外大街 4 号 | 免费咨询 | 800-810-0598 |
| 邮政编码 | 100120 | 网　　址 | http://www.hep.edu.cn |
| 总　　机 | 010-58581000 | | http://www.hep.com.cn |
| | | 网上订购 | http://www.landraco.com |
| 经　　销 | 蓝色畅想图书发行有限公司 | | http://www.landraco.com.cn |
| 印　　刷 | 北京市白帆印务有限公司 | 畅想教育 | http://www.widedu.com |
| 开　　本 | 787×960　1/16 | 版　　次 | 2009 年 2 月第 1 版 |
| 印　　张 | 18.25 | 印　　次 | 2009 年 2 月第 1 次印刷 |
| 字　　数 | 340 000 | 定　　价 | 25.80 元 |

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。



**物料号　26181-00**

# 前言

"高等数学"是高职高专院校必修的一门公共课，是学生学习有关专业知识、专门技术，提高文化素质及获取新知识能力的重要基础，同时也是学生将来生活、工作实践中的一个重要工具。数学教育在高等职业教育中起着至关重要的作用。

本书是根据教育部最新制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，在认真总结高职高专院校数学教学改革经验的基础上，结合对国内外同类教材发展趋势的分析而编写的。本书旨在以清晰、简洁的方式阐述高等数学的"基本概念、基本思想、基本方法"，坚持贯彻以应用为目的，以必需、够用为度的原则，强调数学思想的本质及数学的实用性，淡化数学的严密性、系统性及计算的技巧。

本教材主要突出以下特点:

(1) 每章篇头都给出了一个阅读材料，目的是激发学生对本章内容的兴趣，同时也为高等数学中的主要知识提供一个生动、直观的介绍。

(2) 力求从源于实际的问题引入基本概念，突出问题的实际背景。尽量采用"提出问题—分析问题—解决问题"的途径讲清抽象的数学概念。通过基于"直觉的体验"认识过程，使学生可以更容易地理解掌握数学知识。

(3) 在内容的展开上重视数学在生活实践中的应用，突出数学建模的思想，旨在提高学生认识、分析和解决实际问题的能力，把数学这一工具融入到学生的生活实践中。

(4) 采用模块化结构。上册内容为高职高专院校各专业必修的，下册内容可根据不同需要进行选学。

参加本书编写的院校有：黄河水利职业技术学院、河南大学、华北水利水电学院、郑州电力高等专科学校、郑州铁路职业技术学院、福建交通职业技术学院等。

本书由黄河水利职业技术学院的李文丰担任主编，并承担全书的框架结构

安排及统稿、定稿工作。本书副主编为黄河水利职业技术学院的唐仙芝。

参加本书编写的人员有（按章节顺序排列）

| | | | |
|---|---|---|---|
| 第一章 | 裘敬华 | 第二章 | 郝振莉 |
| 第三章 | 梁宏伟 | 第四章 | 高　杰 |
| 第五章 | 杨盛用 | 第六章 | 王大鹿 |
| 第七章 | 张志峰 | 第八章 | 吕良军 |
| 第九章 | 李文丰 | 第十章 | 周晓峰　荆一昕 |
| 第十一章 | 戴建锋　刘　岩 | 第十二章 | 朱冬梅 |
| 第十三章 | 刘春新 | 第十四章 | 董晓娜 |
| 第十五章 | 张玉祥 | 第十六章 | 唐仙芝 |
| 第十七章 | 陶小林　李　峰 | | |

北京航空航天大学的李心灿教授和北京联合大学曾庆黎教授认真细致地审阅了本书书稿，提出了不少独到的建议，编者在此特别表示感谢。在本书编写过程中，编者参阅了一些教材和著作，并得到黄河水利职业技术学院等院校有关领导和专家的大力支持和帮助，高等教育出版社也对本书的出版给予了高度重视，在此一并深表感谢。

本书编写时间匆促，又限于编者的水平，不足之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

编者

2008 年 12 月于开封

# 目录

# 第九章

# 行列式　矩阵　线性方程组

行列式、矩阵是数学中的两个重要内容，它们不仅是解线性方程组的有力工具，而且在科学技术和实际生活、工作中都有广泛应用. 本章主要介绍行列式和矩阵的一些基本概念、基本运算，并利用它们讨论线性方程组的解法.

阅读材料

## 凯莱与矩阵

1821 年 8 月 16 日，英国降生了一位对后来代数学发展做出了巨大贡献的才子——凯莱（Cayley，1821—1895 年）. 14 岁时，凯莱入伦敦皇家学院读书，初步展示出他的数学天赋. 1839 年入剑桥大学三一学院学习. 1842 年毕业，后在三一学院得到三年任聘，开始了毕生从事的数学研究. 因未继续受聘，又不愿担任圣职（这是当时继续在剑桥的数学生涯的一个必要条件），于 1846 年入林肯法律协会学习并于 1849 年成为律师，以后 14 年他以律师为职业，同时继续数学研究. 1863 年，凯莱任剑桥大学纯粹数学教授，一直做了 32 年. 1876 年他去美国霍普金斯大学任教授，与西尔维斯特共同从事代数学研究，创办了《美国数学杂志》.

凯莱是位极丰产的数学家，在数学、理论力学、天文学方面发表了近千篇论文，他的数学论文几乎涉及纯粹数学的所有领域，收集在共有 14 卷的《凯莱数学论文集》（1889—1898 年）中，并著有《椭圆函数专论》（1876 年）一书.

他最主要的贡献是与 J. J. 西尔维斯特一起，创立了代数型的理论，共同奠定了关于代数不变量理论的基础. 他是矩阵论的创立者. 他对几何学的统一研究也作出了重要的贡献.

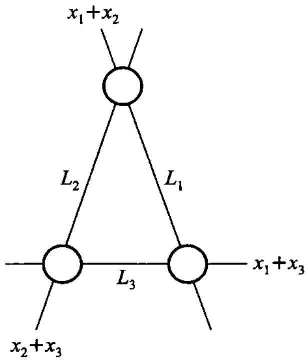
1857 年凯莱研究平面上的点（$x$，$y$）变换成点（$x'$，$y'$）的问题，（$x'$，$y'$）与（$x$，$y$）的关系是$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$，其中 $a$，$b$，$c$，$d$ 是实数. 他

把上式右端的系数记成 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 这个记号是个了不起的数学发明，它被西尔维斯特称为矩阵，它不是一种简化作用的符号，而是内容十分丰富的一个算子，表示一种新的运算，这种运算称为线性变换. 从那之后，矩阵成了代数学的主要研究对象之一，矩阵与微积分成了现代数学的两大支柱.

## 计算机层析 X 射线照相术

计算机层析扫描仪根据仅从病人的头的外部测得的 X 射线，来计算此病人大脑的图像.

附图说明线性代数在计算机层析 X 射线照相术中的作用，在三角形中，3 个小圆圈表示 3 个小的器官，它们的质量为未知数，分别表示为 $x_1$，$x_2$ 和 $x_3$，而直线则表示 X 射线. 这些小器官的位置尚属未知，这就使每根 X 射线不能仅对准一个器官，在这里，沿 $L_1$，$L_2$ 通过的总质量为 $x_1$，$x_2$，其中 $x_1$，$x_2$ 分别为器官的质量，它们吸收一定强度的 X 射线，通过测量吸收的强度，我们能求出射线通过的总质量，所以 $x_1+x_2$ 是一个已知量 $b_{12}$，即 $x_1+x_2=b_{12}$，这同样也适用于其他的直线，于是我们可得到下列包括 3 个未知数三个方程的方程组：




$$\begin{cases} x_1+x_2=b_{12} \\ x_2+x_3=b_{23} \\ x_1+x_3=b_{13} \end{cases}$$

用 Gauss 消元法可显示质量（$x_1$，$x_2$，$x_3$）.

为了医学诊断的需要，计算机层析不仅要在这三个位置，而且要在每一个器官上几千个点处计算组织的密度，而每条 X 射线要穿过许多这样的点，因此，我们可以得到含几千个未知数的几千万个方程的线性方程组，在所选第 $N$ 个点具有未知数的标记密度 $XN$（更准确地说是“线性吸收系数”），这种问题的解答不仅涉及线性代数，而且涉及更高水平的数学.

# 第一节　行　列　式

## 一、行列式的定义

### 1. 二阶行列式

在介绍二阶行列式之前，先来回忆用消元法解二元线性方程组的问题.

设二元线性方程组为$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2,\end{cases}$其中 $x_1$，$x_2$ 为未知量.

消元后可得　$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}$，

$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=b_2a_{11}-b_1a_{21}$，

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，有 $x_1=\dfrac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$，$x_2=\dfrac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$.

为了便于记忆，引入记号

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\ a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},\quad D_1=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}\\ b_2&a_{22}\end{vmatrix}=b_1a_{22}-a_{12}b_2,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1\\ a_{21}&b_2\end{vmatrix}=a_{11}b_2-b_1a_{21}.$$

则

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D}.$$

**定义 1**　式子$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\ a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$的左端叫做**二阶行列式**，右端叫做**二阶行列式的展开式**. $a_{ij}(i,j=1,2)$ 称为行列式的**元素**，横排的称为行，竖排的称为列. 二阶行列式的四个元素，其排列可看成一个矩形，左上角与右下角两元素构成它的一条对角线叫**主对角线**，右上角与左下角两元素构成它的另一条对角线叫**次对角线**.

**例 1**　用行列式解方程组$\begin{cases}2x-3y=8,\\ 3x+y=1.\end{cases}$

**解**　因为 $D=\begin{vmatrix}2&-3\\ 3&1\end{vmatrix}=11$，$D_x=\begin{vmatrix}8&-3\\ 1&1\end{vmatrix}=11$，$D_y=\begin{vmatrix}2&8\\ 3&1\end{vmatrix}=-22$，

所以方程组的解为

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{11}{11}=1,\quad y=\frac{D_y}{D}=\frac{-22}{11}=-2.$$

### 2. 三阶行列式

类似于二阶行列式，我们给出三阶行列式的定义.

**定义 2** 式子$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$叫做**三阶行列式**，其展开式为

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

如图 9－1，图中实线上三个元素之积的和减去虚线上三个元素之积的和即得其展开式.

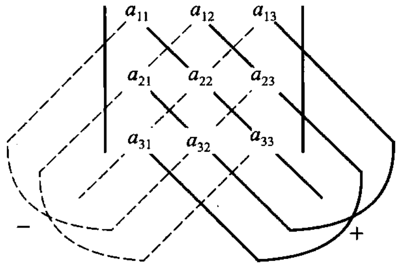



图 9－1

**例 2** 计算行列式$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

**解** 原式$=3\times1\times2+2\times3\times2+1\times2\times0-2\times1\times1-2\times2\times2-3\times3\times0=8$.

**3. $n$ 阶行列式**

二阶和三阶行列式的概念可类似地推广到 $n$ 阶行列式的情形.

**定义 3** 由 $n^2$ 个元素排成 $n$ 行 $n$ 列的式子

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 **$n$ 阶行列式**，简记为$|a_{ij}|_{n\times n}$或$|a_{ij}|$.

如行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & 4 & 9 \\ 0 & 5 & 4 & 7 \end{vmatrix}$$

为 4 阶行列式.

## 二、行列式的性质

**性质 1** 行列式的行与列依次互换，行列式值不变.

如
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

此性质说明：行列式的行与列具有同等的地位，即行具有的性质，列同样也具有，反之亦然. 上式右端的行列式称为左端行列式的**转置行列式**，记为 $D'$或 $D^{\mathrm{T}}$.

**性质 2** 行列式的两行（列）互换，行列式反号.

如 $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 10$，而 $\begin{vmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -10 = -D$.

**推论** 行列式的两行（列）相同，行列式值等于零.

**性质 3** 若行列式某一行（列）的所有元素同乘以 $k$，其结果等于 $k$ 乘原行列式.

如
$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

**推论** 若行列式某两行（列）的对应元素成比例，行列式值等于零.

**性质 4** 若行列式某一行（列）的元素都是二项式，则此行列式等于把这些二项式各取一项作为相应行（列）而其余行（列）不变的两个行列式的和.

如
$$\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+y & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+z & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & a_{12} & a_{13} \\ y & a_{22} & a_{23} \\ z & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

**性质 5** 若行列式某一行（列）的所有元素乘以同一个数加到另一行（列）的对应元素上，行列式值不变.

如
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{12} & a_{23}+ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

**定义 4** 在 $n$ 阶行列式中划去元素 $a_{ij}$所在的第 $i$ 行和第 $j$ 列上的所有元素后（其他元素相对位置不变）构成的 $n-1$ 阶行列式称为元素 $a_{ij}$的**余子式**，记为 $M_{ij}$. 称（$-1$）$^{i+j}M_{ij}$为元素 $a_{ij}$的**代数余子式**，记为 $A_{ij}$，即 $A=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

如在 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$中，元素 $a_{21}=-4$ 的余子式为 $M_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$，其代数余子式为

$$A_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}=-\begin{vmatrix}1&2\\4&2\end{vmatrix}.$$

**性质 6** 行列式的值等于任一行（列）的所有元素与各自对应的代数余子式的乘积之和；行列式任一行（列）的各元素与另一行（列）对应元素的代数余子式的乘积之和等于零.

如 $D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$，则 $a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+a_{i3}A_{j3}=\begin{cases}D & i=j\\0 & i\neq j\end{cases}(i,\ j=1,\ 2,\ 3)$，

此性质的前半部分称为**行列式按行（列）展开式**.

**例 3** 按第三行展开计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1&0&-1\\0&-1&-1\\a&b&c\end{vmatrix}$.

**解** 
$$D=a\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}0&-1\\-1&-1\end{vmatrix}+b\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&-1\\0&-1\end{vmatrix}$$
$$+c\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&0\\0&-1\end{vmatrix}=-a+b-c.$$

## 三、行列式的计算

下面用行列式的性质来计算行列式的值.

**例 4** 计算

(1) $\begin{vmatrix}1&3&4\\0&1&9\\1&4&13\end{vmatrix}$，(2) $\begin{vmatrix}\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&3\\7&5&14\\\frac{1}{3}&\frac{1}{5}&\frac{4}{15}\end{vmatrix}$，(3) $\begin{vmatrix}1&4&0&6\\8&4&2&2\\0&3&0&9\\0&0&0&4\end{vmatrix}$.

**解** (1) 原式 $=\begin{vmatrix}1&3&4\\1&4&13\\1&4&13\end{vmatrix}=0.$

(2) 原式 $=\frac{1}{3}\times\frac{1}{15}\begin{vmatrix}2&2&9\\7&5&14\\5&3&4\end{vmatrix}=\frac{1}{45}\begin{vmatrix}2&2&9\\5&3&5\\5&3&4\end{vmatrix}$

$$=\frac{1}{45}\begin{vmatrix}2&2&9\\0&0&1\\5&3&4\end{vmatrix}=\frac{1}{45}\begin{vmatrix}0&2&9\\0&0&1\\2&3&4\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{45}(2\times1\times2)=\frac{4}{45}.$$

(3) 原式 $=2\times(-1)^5\begin{vmatrix}1&4&6\\0&3&9\\0&0&4\end{vmatrix}=-2\times1\times(-1)^2\begin{vmatrix}3&9\\0&4\end{vmatrix}=-2\times12=-24.$

**定义 5** 主对角线以下（上）的元素都为零的行列式称为**上（下）三角行列式**，并统称为**三角行列式**.

如 $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$ 为上三角形行列式，$\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$ 为下三角形行列式.

除主对角线上的元素外，其他位置上的元素都是零的行列式称为**对角行列式**.

由性质 6 可得：三角行列式的值等于其主对角线上的元素的乘积，

即
$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

因此对于 $n$ 阶行列式常利用行列式的性质把它化为上三角或下三角行列式，然后再求值，这是计算行列式值的常用方法.

**例 5** 计算 $D=\begin{vmatrix}-1&3&2\\1&1&1\\-1&2&1\end{vmatrix}$.

**解** $D=\begin{vmatrix}-1&3&2\\0&4&3\\0&-1&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&3&2\\0&0&-1\\0&-1&-1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-1&3&2\\0&-1&-1\\0&0&-1\end{vmatrix}=1.$

**例 6** 计算 $D=\begin{vmatrix}-1&3&2&-2\\1&1&1&4\\-1&2&1&-1\\1&1&2&9\end{vmatrix}$.

**解** $D=-\begin{vmatrix}1&1&1&4\\-1&3&2&-2\\-1&2&1&-1\\1&1&2&9\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&1&1&4\\0&4&3&2\\0&3&2&3\\0&0&1&5\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&1&1&4\\0&1&1&-1\\0&3&2&3\\0&0&1&5\end{vmatrix}$

$$
=-\begin{vmatrix}1&1&1&4\\0&1&1&-1\\0&0&-1&6\\0&0&1&5\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&1&1&4\\0&1&1&-1\\0&0&-1&6\\0&0&0&11\end{vmatrix}=11.
$$

## 四、克拉默法则

设 $n$ 元 $n$ 个方程的线性方程组为
$$
\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n.\end{cases}\tag{1}
$$

其系数行列式为
$$
D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}.
$$

当 $D\neq0$ 时，方程组（1）有唯一解 $x_j=\dfrac{D_j}{D}(j=1,2,\cdots,n)$，其中 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是将 $D$ 中第 $j$ 列的元素依次改换为常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 而得到的行列式，即

$$
D_j=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1j-1}&b_1&a_{1j+1}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&\cdots&a_{2j-1}&b_2&a_{2j+1}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nj-1}&b_n&a_{nj+1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}.
$$

这种解方程组的方法称为**克拉默法则**.

**例 7** 解方程组 $\begin{cases}2x-y+3z=3,\\3x+y-5z=0,\\4x-y+z=3.\end{cases}$

**解** 因为 $D=\begin{vmatrix}2&-1&3\\3&1&-5\\4&-1&1\end{vmatrix}=-6\neq0$，$D_x=\begin{vmatrix}3&-1&3\\0&1&-5\\3&-1&1\end{vmatrix}=-6$，

$$
D_y=\begin{vmatrix}2&3&3\\3&0&-5\\4&3&1\end{vmatrix}=-12,\quad D_z=\begin{vmatrix}2&-1&3\\3&1&0\\4&-1&3\end{vmatrix}=-6.
$$

所以方程组的解为 $x=\dfrac{D_x}{D}=\dfrac{-6}{-6}=1$，$y=\dfrac{D_y}{D}=\dfrac{-12}{-6}=2$，$z=\dfrac{D_z}{D}=\dfrac{-6}{-6}=1$.

**定义 6** 线性方程组（1）右端的常数 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 不全为 0 时，称方程组（1）为**非齐次线性方程组**；当 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 全为 0 时，称方程组（1）为**齐次线性方程组**.

对于齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0, \end{cases} \tag{2}$$

一定有一个解 $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 0$，它称为齐次线性方程组（2）的**零解**. 如果有一组不全为 0 的数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 满足（2），则称它为（2）的**非零解**.

由克拉默法则可知，若齐次线性方程组（2）的系数行列式不为零，则它只有唯一的零解.

**定理** 若齐次线性方程组（2）有非零解，则它的系数行列式必为零.

**例 8** 当 $\lambda$ 取何值时，齐次线性方程组

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + (3-\lambda)x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + (1-\lambda)x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解?

**解** 因为 $D = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 4 \\ 2 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(\lambda-2)\lambda$，

若方程组有非零解，则 $D=0$，即当 $\lambda=0$，2 或 3 时，原方程组有非零解.

**例 9** 判定齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$ 是否有非零解?

**解** 因为 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -153 \neq 0$，所以方程组只有零解.

## 习题 9－1

1. 利用行列式的性质计算下列各行列式: