通向金牌之路

金版奥赛教程

数学 高中综合分册

◎ 左宗明 主编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

通向金牌之路

金版奥赛教程

数学(高中综合分册)

● 主　　编　左宗明
● 编委人员　左宗明　熊玲玲　振　云
　　　　　　李欢欢　何树平　王光月

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

金版奥赛教程. 数学. 高中综合分册/左宗明主编.
杭州：浙江大学出版社，2009.4
ISBN 978-7-308-06656-3
Ⅰ.金… Ⅱ.左… Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料
Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 036974 号

金版奥赛教程数学(高中综合分册)
左宗明　主编

责任编辑　杨晓鸣
封面设计　刘依群
出版发行　浙江大学出版社
（杭州天目山路 148 号　邮政编码 310028）
（网址：http://www.zjupress.com）
排　　版　杭州大漠照排印刷有限公司
印　　刷　临安市曙光印务有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　22.5
字　　数　410 千
版 印 次　2009 年 4 月第 1 版　2009 年 4 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-06656-3
定　　价　36.00 元

编写说明

中小学学科竞赛是我国覆盖面最广、参加人数最多、影响最大的一项中小学生课外活动。据不完全统计，全国每年有三百多万高中学生参与各类学科竞赛活动。尤其是近年来，我国选手在国际数学奥林匹克（简称 IMO）、国际物理奥林匹克（简称 IPHO）、国际化学奥林匹克（简称 ICHO）等活动中成绩斐然，更是吸引了许多有创新能力和天赋的学生参与学科竞赛活动。学科竞赛之所以备受广大学生关注和参与，究其原因是学科竞赛不仅具有很强的挑战性、探究性，而且在塑造和培养学生思维修养和创新意识方面大有裨益。

浙江大学出版社本着为我国基础教育改革、发展和学科竞赛做点有益事情的心愿，在精心研究了多年国内外竞赛命题规律、博采国内外优秀试题的基础上，邀请了全国各地竞赛命题专家、金牌教练，组织编写了“金版奥赛教程”系列丛书。丛书涵盖数学、英语、物理、化学、生物、信息技术六大学科，包括从小学到高中各个层次，共计30多个品种。

丛书的最大特点：

一是起点低，目标高。本丛书以学科基础知识为起点，适用的对象是学有余力或对该学科有兴趣的学生；编写的依据是各学科竞赛大纲，同时兼顾新课程标准教材，对竞赛涉及的课外知识给予适当补充，不同层次的学生可以合理取舍。

二是作者阵容强大。作者队伍既有来自一线的资深特级教师、金牌教练，也有来自高等学府的命题研究专家、命题专家，还有来自国家层面上的国家级教练、领队。

鉴于时间仓促，书中定有不少纰漏，请读者批评指正。

2009 年 3 月

目 录

第一章 初等数论的基本知识与应用 …… 1

第一节 整数的简单性质 …… 1

一、质数与合数 …… 1

二、整数的奇偶性 …… 2

第二节 有关整数整除性的问题 …… 10

一、带余数除法 …… 10

二、整数的质因数分解 …… 15

第三节 同余理论与方法 …… 21

一、同余的概念和定义 …… 21

二、完系、简系、剩余类 …… 23

三、欧拉定理、费马定理、威尔逊定理 …… 27

四、一次同余方程与孙子定理 …… 34

第四节 简单不定方程(组)的解法 …… 38

一、二(三)元一次不定方程(组)的基本解法 …… 39

二、高次不定方程 …… 43

三、勾股定理和 Pell 方程 …… 48

四、其他不定方程 …… 52

练习一 …… 56

第二章 几个常用的基本原理 …… 61

第一节 最小数原理 …… 61

一、最小数原理 …… 61

二、最小数原理与自然数的归纳公理 …… 62

三、最小数原理与数学归纳法 …… 63
四、最小数原理与逐差法 …… 64
五、最小数原理的其他应用 …… 66
六、最小数原理的推广 …… 67
第二节　抽屉原则 …… 68
一、抽屉原则 …… 68
二、抽屉原则的运用 …… 71
三、重叠和覆盖问题 …… 75
四、综合性问题 …… 78
第三节　容斥原理 …… 84
一、容斥原理 …… 84
二、容斥原理的其他形式 …… 88
第四节　排序原理 …… 95
一、排序原理 …… 95
二、几个著名的不等式的证明和应用 …… 100
第五节　极端原理 …… 106
练习二 …… 108

第三章　有限集合的基本知识与应用 …… 112

第一节　某些子集类的简单性质及其应用 …… 112
一、C 类 …… 112
二、R 类 …… 114
三、K 类 …… 117
第二节　映射与计数 …… 119
一、映射 …… 119
二、映射在计数方面的应用 …… 121
练习三 …… 130

第四章　组合的基本知识与应用 …… 132

第一节　可重排列与可重组合 …… 132
一、可重排列 …… 132
二、可重组合 …… 133

三、重集的不尽相异元素的全排列 …… 134
四、重集的不尽相异元素的 r—可重组合 …… 136
第二节　组合恒等式和母函数 …… 137
一、基本组合恒等式 …… 137
二、母函数 …… 143
三、形式幂级数 …… 150
四、指数型母函数 …… 155
第三节　递推与归纳 …… 162
一、递推 …… 162
二、归纳和一般 …… 166
第四节　简单组合问题 …… 168
第五节　组合构造 …… 175
一、对称构造 …… 175
二、分组构造 …… 180
三、等价构造 …… 183
练习四 …… 188

第五章　多项式的基本知识与应用 …… 192

第一节　多项式运算 …… 192
第二节　多项式的根 …… 200
第三节　韦达定理 …… 205
第四节　爱森斯坦定理 …… 211
第五节　对称多项式 …… 217
练习五 …… 221

第六章　平面几何的基本知识与应用 …… 223

第一节　两个重要定理及其应用 …… 223
一、梅涅劳斯定理 …… 223
二、塞瓦定理 …… 227
第二节　三角形五心 …… 233
一、重心 …… 233
二、外心 …… 234

三、垂心 …… 235
四、内心 …… 238
五、旁心 …… 240
第三节　圆的基本性质 …… 243
一、基本性质 …… 243
二、圆幂和根轴 …… 245
三、其他重要定理 …… 248
第四节　平面几何的解题方法 …… 253
一、向量法 …… 253
二、三角函数方法 …… 256
三、解析几何方法 …… 259
四、复数方法 …… 262
五、代数法 …… 264
六、面积法 …… 266
练习六 …… 268

第七章　图的简单知识与应用 …… 270

第一节　图的一般知识 …… 270
一、基本概念 …… 270
二、基本性质和应用 …… 274
第二节　欧拉闭迹与哈密尔顿圈 …… 277
一、欧拉(Euler)闭迹 …… 277
二、哈密尔顿(Hamilton)圈 …… 279
三、有向图中的哈密尔顿圈 …… 281
第三节　匹配 …… 284
第四节　图的着色和拉姆赛数 …… 290
一、拉姆赛(Ramsey)数 …… 290
二、含子图 K_n 的某些条件 …… 295
三、图上着色 …… 297
练习七 …… 299

附录　练习题答案、提示或简解(证) …… 302

第一章

初等数论的基本知识与应用

数学竞赛中常有应用整数知识的试题，其中涉及整数奇偶性、整除性、整数高次幂的末位数及不定方程的问题尤多.这些问题虽然应用的整数知识简单、浅显，但内容丰富多彩，且解法灵活巧妙，技巧千变万化，对启迪思维、开阔思路、提高能力、发展智力非常有益.

第一节　整数的简单性质

一、质数与合数

设 a, b 是整数，$b \neq 0$.若有整数 c 使得 $a = bc$，则 a 叫做 b 的倍数，b 叫做 a 的因数或约数.这时也说 b 能整除 a，或 a 能被 b 整除，记为 $b \mid a$.

下面的性质是显然的：

(1) 若 $b \mid a$，则 $b \mid (-a)$, $(-b) \mid a$, $(-b) \mid (-a)$, $|b| \mid |a|$.

(2) 若 $a \mid b$, $b \mid c$，则 $a \mid c$.

(3) 若 $|a| < |b|$，且 $|b| \mid |a|$，则 $a = 0$.

一个大于 1 的整数，仅有 1 和它本身这两个正因数，则这样的正整数叫做质数或素数.今后我们常用 p 或 p_1, p_2, p_3, … 表示质数.

一个正整数除 1 和它本身以外，还有其他正因数，则这样的正整数叫做合数.显然

$$\text{全体正整数} = \{1\} \cup \{\text{全体质数}\} \cup \{\text{全体合数}\}.$$

若 b 是质数，又是整数 a 的因数，则 b 称为 a 的质因数.

显然，2 是全体偶数中唯一的质数，而且是所有偶数的质因数.

如果两个整数 p 与 q 没有共同的质因数，则称 p 与 q 互质，记为 $(p, q) = 1$.

我们还有下面的性质：

(4) 设 a 是大于 1 的整数，则 a 的大于 1 的最小因数一定是质数.

证明 若 a 是质数，则 a 的大于 1 的因数只有 1 个，就是 a 本身，它当然是 a 的大于 1 的因数；

若 a 是合数，p 为 a 的大于 1 的最小因数，则 p 必为质数. 因为 p 若为合数，则有 $1 < c < p$，使 $c \mid p$. 因为 $p \mid a$，故由性质(2) 得 $c \mid a$，这与 p 的最小性矛盾.

(5) 对于 $a > 1$，若所有不大于$\sqrt{a}$ 的质数 $p \nmid a$(表示 a 不被 p 整除)，则 a 是质数.

证明 用反证法. 设 $a = bc$，其中 $b > 1$ 为 a 的最小因数，于是 $c \geqslant b$. 又由性质(4)，b 为质数，根据题设，不大于 $\sqrt{a}$ 的质数 $p \nmid a$，而 $b \mid a$，故 $b > \sqrt{a}$，从而 $bc > \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$，这与 $bc = a$ 相矛盾，所以 a 是质数.

二、整数的奇偶性

关于整数奇偶性的下列性质显然成立：

(1) 奇数与偶数之和(或差) 为奇数.

(2) 任意个偶数之和(或差) 是偶数.

(3) 奇数个奇数之和(或差) 为奇数；偶数个奇数之和(或差) 为偶数.

(4) 有限个整数之积为奇数，则其中每个整数都是奇数；有限个整数之积为偶数，则这些整数中至少有一个偶数.

下面举例说明这些简单知识在解数学竞赛题中的应用.

例 1 求 a, b, c，使它们满足不等式 $a^2 + b^2 + c^2 + 3 < ab + 3b + 2c$ ($a, b, c \in \mathbf{Z}$).

分析 利用整数的离散性及配方法.

解 由题意，整数 a, b, c 满足 $a^2 + b^2 + c^2 + 3 < ab + 3b + 2c$，

即
$$a^2 + b^2 + c^2 + 4 \leqslant ab + 3b + 2c.$$

配方得
$$\left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{b}{2} - 1\right)^2 + (c-1)^2 \leqslant 0.$$

由于
$$\left(a - \frac{b}{2}\right)^2 \geqslant 0,\ \left(\frac{b}{2} - 1\right)^2 \geqslant 0,\ (c-1)^2 \geqslant 0,$$

故有
$$a - \frac{b}{2} = \frac{b}{2} - 1 = c - 1 = 0,$$

即
$$a = 1,\ b = 2,\ c = 1.$$

例 2 求方程 $x^y + 1 = z$ 的质数解 x, y, z.

分析 从讨论整数 z 的奇偶性入手，并紧紧抓住 2 是唯一的偶质数这一突破口，探索

已知方程的解的情况.

解　若 z 为偶数，则因 z 为质数，故 $z=2$，从而 $x^y=1$. 这样，在整数范围中必须 $x=1$ 或 $y=0$，但 0 与 1 均非质数，因此 z 不可能是偶数，只能是奇数. 这时 x^y 为偶数，由于奇数的任意次幂都是奇数，所以 x 必为偶数. 但 x 为质数，故 $x=2$.

因为 $z=2^y+1$，当 y 为奇数时，是 $2+1=3$ 的倍数，不为质数，故 y 只能为偶数，即 $y=2$. 这时 $z=2^2+1=5$. 所以 $x=2$，$y=2$，$z=5$ 是所求唯一的质数解.

例 3　已知 $m=3\lg a+\lg b$，其中 a，b 是质数且 $b-a=1985$，求 m 的范围.

分析　看看条件 $b-a=1985$ 提供了哪些线索？

解　由 $b-a=1985$ 知 $b>a$；而 1985 是奇数，由整数奇偶性的性质(1)，知 a，b 中其一为奇数，另一为偶数；又已知 a，b 均为质数，而 2 是唯一的偶质数且是质数中最小的，所以 $a=2$，从而 $b=1985+a=1987$.

由于不大于 $\sqrt{1987}$ 的质数 2，3，…，43 都不能整除 1987，故由质数的性质(5)，知 1987 确实是质数. 这时 $m=3\lg a+\lg b=3\lg 2+\lg 1987=\lg 15896$，

所以
$$4<m<5.$$

例 4　证明 1979^2+2^{1979} 与 1979 互质.

分析　因为 2^{1979} 只有偶因数，而 1979 只有奇因数，故 1979^2+2^{1979} 与 1979 似乎不可能有公因数，不妨用反证法试试看.

证明　设 $n=1979^2+2^{1979}$ 和 1979 的公因数 $p>1$，即有 $n=pk$，$1979=pl$，其中 k，l 为自然数. 于是 $2^{1979}=n-1979^2=pk-p^2l^2=p(k-pl^2)$ 能被 p 整除. 因为任何大于 1 的奇数都不可能是 2^{1979} 的因数，所以 p 是偶数；另一方面，$pl=1979$ 是奇数，故由整数奇偶性的性质(4)，知 p 为奇数. 这一矛盾证明了 n 与 1979 互质.

例 5　设 p_n 是第 n 个质数($p_1=2$，$p_2=3$，…)，证明 $p_n\leqslant 2^{2^{n-1}}$.

分析　因为结论与自然数 n 有关，故不妨试用数学归纳法. 证明的困难可能在于由 $n\leqslant k$ 时结论成立，如何推出 $n=k+1$ 时结论也成立. 故设法充分利用前 k 个质数所满足的不等式可能是解题的关键.

证明　用数学归纳法证明 $p_n\leqslant 2^{2^{n-1}}$.

当 $n=1$ 时，$p_1=2=2^{2^{1-1}}$，结论成立.

现设 $n\leqslant k$ 时结论成立，即有 $p_n\leqslant 2^{2^{n-1}}$，$n\leqslant k$.　①

要证明 $p_{k+1}\leqslant 2^{2^k}$ 也成立. 由 ① 式，得　②

$$p_1\leqslant 2^1,\ p_2\leqslant 2^2,\ p_3\leqslant 2^{2^2},\ \cdots,\ p_k\leqslant 2^{2^{k-1}}.$$

由于
$$1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}=2^k-1,$$

故 $$p_1p_2p_3\cdots p_k\leqslant 2^{1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}}=2^{2^k-1}=\frac{1}{2}2^{2^k},$$

$$1+p_1p_2p_3\cdots p_k=1+\frac{1}{2}2^{2^k}\leqslant\frac{1}{2}2^{2^k}+\frac{1}{2}2^{2^k}=2^{2^k}.$$

因此要②式成立，只须证明

$$p_{k+1}\leqslant 1+p_1p_2p_3\cdots p_k \qquad ③$$

显然，p_1，p_2，…，p_k 均不可能是 $1+p_1p_2\cdots p_k$ 的质因数，故若 p_m 是 $1+p_1p_2\cdots p_k$ 的质因数，则 p_m 至少是第 $k+1$ 个质数 p_{k+1}，从而 $p_{k+1}\leqslant p_m$. 另一方面，显然 $p_m\leqslant 1+p_1p_2\cdots p_k$，所以不等式③成立. 于是，当 $n=k+1$ 时，也有 $p_{k+1}\leqslant 2^{2^k}$. 由归纳原理，对一切自然数 n，都有 $p_n\leqslant 2^{2^{n-1}}$.

例 6 令 a_n 表示前 n 个质数之和，即

$$a_1=2,\ a_2=2+3=5,\ a_3=2+3+5=10,\ \cdots$$

证明：对任意的 n，$[a_n,\ a_{n+1}]$ 中包含有一个完全平方数.

分析 由于 $a_4=2+3+5+7=17$，$a_5=2+3+5+7+11=28$，而区间 $[a_1,\ a_2]=[2,5]$，$[a_2,\ a_3]=[5,10]$，$[a_3,\ a_4]=[10,17]$，$[a_4,\ a_5]=[17,28]$ 中都包含有一个完全平方数，因此只需对 $n\geqslant 5$ 的情形证明本题.

另一方面，如果 $\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}\geqslant 1$，则区间 $[\sqrt{a_n},\ \sqrt{a_{n+1}}]$ 上必包含有一个自然数 m，则 $\sqrt{a_n}\leqslant m\leqslant\sqrt{a_{n+1}}$，而这等价于 $a_n\leqslant m^2\leqslant a_{n+1}$. 但当 $a_{n+1}-a_n\geqslant 1+2\sqrt{a_n}$，即 $(\sqrt{a_{n+1}})^2\geqslant 1+2\sqrt{a_n}+(\sqrt{a_n})^2=(1+\sqrt{a_n})^2$ 时，就有 $\sqrt{a_{n+1}}\geqslant 1+\sqrt{a_n}$，即 $\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}\geqslant 1$. 因此为证明本题，只须证明当 $n\geqslant 5$ 时

$$p_{n+1}=a_{n+1}-a_n\geqslant 1+2\sqrt{a_n}. \qquad ①$$

证明 根据 a_n 的定义，知 p_{n+1} 为第 $n+1$ 个质数，且不等式①等价于

$$(p_{n+1}-1)^2\geqslant 4a_n=4(p_1+p_2+\cdots+p_n).$$

记 $q_n=(p_n-1)^2-4(p_1+p_2+\cdots+p_{n-1})$，则

$$q_{n+1}-q_n=(p_{n+1}-1)^2-(p_n-1)^2-4p_n=(p_{n+1}-p_n)(p_{n+1}+p_n-2)-4p_n.$$

注意到 $n\geqslant 2$ 时，p_n 都是奇数，从而 $p_{n+1}-p_n\geqslant 2$，故

$$q_{n+1}-q_n\geqslant 2(p_{n+1}+p_n-2)-4p_n=2(p_{n+1}-p_n-2)\geqslant 0.$$

因此，当 $n\geqslant 2$ 时，数列 q_n 单调增加. 由于

$$q_5=(p_5-1)^2-4(p_1+p_2+p_3+p_4)=(11-1)^2-4(2+3+5+7)=32>0,$$

故当 $n \geqslant 5$ 时，$q_n \geqslant q_5 > 0$. 这就证明了，当 $n \geqslant 5$ 时，不等式 ① 成立.

本题中，原来要求证明 $[a_n, a_{n+1}]$ 中包含有一个完全平方数，处理时，我们改为证明 $\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n} \geqslant 1$，因为当此不等式成立时，$[\sqrt{a_n}, \sqrt{a_{n+1}}]$ 上必包含有一个自然数 m，从而就有 $a_n \leqslant m^2 \leqslant a_{n+1}$，也就是说，我们证明了一个使原结论成立的充分条件. 这种证明方法通常称为“变更问题法”，它是数学中常用的一种重要证明方法.

例 7　桌上放着 7 只杯口向上的茶杯. 若每次任意翻转(即将杯口向上者变为杯口向下，或者相反) 其中的 4 只茶杯，则不论翻转多少次，永远不可能使所有茶杯杯口向下，试证明之.

分析　观察某一次翻转的 4 只杯子，看看杯口向上(或向下) 的杯子数有什么变化?

证明　某一次翻转的 4 只杯子，在翻转前的情况不外乎有以下几种可能:

(1) 这 4 只杯子杯口均向上，翻转后杯口向上的杯子数减 4;

(2) 这 4 只杯子有 3 只杯口均向上，翻转后杯口向上的杯子数减 2;

(3) 这 4 只杯子有 2 只杯口向上，翻转后杯口向上的杯子数不变;

(4) 这 4 只杯子有 1 只杯口向上，翻转后杯口向上的杯子数增 2;

(5) 这 4 只杯子杯口均向下，翻转后杯口向上的杯子数增 4.

总之，翻转一次，杯口向上的杯子数或者不变，或者增减一个偶数，因而不改变杯口向上的杯子数的奇偶性. 但原有 7 只杯口向上的杯子，因此不论翻转多少次，杯口向上的杯子数仍是奇数，永远不可能等于零，即不可能使这 7 只杯子的杯口均向下.

从以上证明可知，本例中茶杯数只要是奇数，而每次翻转的杯子数是偶数，结论仍然不变.

例 8　在棋盘上有兵卒各一枚，规定双方只能横行或竖走，每步一格，以吃掉对方(即走到对方棋子上) 为胜. 如果红(兵) 方先走，你能否预测哪一方将获胜? 如果卒的位置不变，且仍然红方先走，那么，为使红方有可能获胜，兵应位于棋盘上哪些方格内?

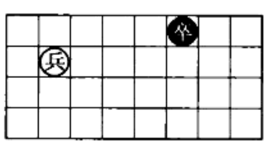

图 1－1

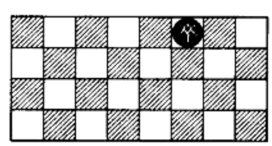

图 1－2

解　我们先规定兵和卒之间的“距离”. 如果兵和卒位于同一(横) 行或同一(竖) 列上，则它们之间的距离等于它们之间的方格数加 1; 如果兵和卒既不同行也不同列，那么棋盘上存在一个以兵、卒为顶点，边平行于棋盘边框的矩形，这时兵和卒之间的距离就等于该矩形周界上的方格数之半. 例如图 1－1 中兵卒之间的距离就是 5.

兵卒各走一步，称为一个回合，经过若干个回合后，如果能使兵卒之间的距离等于 1,

那么下一步兵就可以吃掉卒而获胜;如果经过若干个回合后兵卒之间的距离等于0,那么刚才最后一步兵被卒吃掉.由于每一回合,兵卒各走一步,因而每经一回合,兵卒之间的距离或者不变,或者改变2(增加2或减少2),因此,无论经过多少个回合,兵卒之间的距离,或者不变,或者改变一个偶数,所以无论经过多少个回合,原来距离为5的兵卒之间的距离一定还是一个奇数,而不可能等于0,这说明卒不可能取胜.为了证明红方必然获胜,只要让兵朝卒所在位置方向横走或竖走,卒为了逃避被兵吃掉,只好往前逃,但由于棋盘方格数有限,卒逃到边上后,无法前行,只得改变方向,往旁边逃,一直逃到角上,被困,最后只好被兵吃掉.

显然,如果"棋盘"是"环形"的,则卒可一直往前逃,这时便分不出胜败了.

如果卒的位置不变,为了使红方获胜,兵所在的方格应使兵卒之间的距离为奇数,因此,兵应位于图1-2中棋盘上的那些有阴影的方格上.

例9 若整系数多项式 $f(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$,当 $x=0$ 与 $x=1$ 时取奇数值,则 $f(x)=0$ 没有整数根,试证明之.

分析 对任意整数(奇数或偶数)p,设法证明 $f(p)$ 是奇数.

证法1 设 p 为任意整数,取另一整数 q,使 $p-q$ 为偶数,这时

$$\begin{aligned}f(p)-f(q)&=a_0(p^3-q^3)+a_1(p^2-q^2)+a_2(p-q)\\&=(p-q)[a_0(p^2+pq+q^2)+a_1(p+q)+a_2]\end{aligned}$$

显然是偶数.

若 p 为奇数,取 $q=1$,因为已知 $f(1)$ 是奇数,故 $f(p)$ 也是奇数,从而不为零;

若 p 为偶数,则取 $q=0$,因为已知 $f(0)$ 是奇数,故 $f(p)$ 仍然是奇数,当然也不为零.

既然任何奇数与偶数 p 都不能使 $f(p)=0$,所以 $f(x)=0$ 没有整数根.

证法2 因为 $f(0)=a_3$ 是奇数,$f(1)=a_0+a_1+a_2+a_3$ 也是奇数,所以 $a_0+a_1+a_2$ 是偶数.

若 p 是偶数,则 $f(p)=a_0p^3+a_1p^2+a_2p+a_3=p(a_0p^2+a_1p+a_2)+a_3$,$f(p)$ 等于偶数与奇数之和,当然不等于零;

若 p 是奇数,令 $p=q+1$,则 q 是偶数,于是

$$\begin{aligned}f(p)=f(q+1)&=a_0(q+1)^3+a_1(q+1)^2+a_2(q+1)+a_3\\&=[(a_0+a_1+a_2)+q(a_0n+a_1m+a_2)]+a_3,\end{aligned}$$

式中 n, m 都是整数.由于方括号里是偶数,而 a_3 是奇数,所以仍有 $f(p)\neq 0$.

即,不论 p 是怎样的整数,$f(p)\neq 0$,故 $f(x)=0$ 无整数根.

注 1. 容易看出,这里的证明适用于任何 n 次多项式 $f(x)$,只要 $f(0)$ 与 $f(1)$ 都是

奇数；

2. 证法2告诉我们，若一个偶数 a（相当于问题中的0）与一个奇数 b（相当于问题中的1），使 $f(a)$ 与 $f(b)$ 都是奇数，则对任何整数 p，$f(p)$ 必为奇数；

3. 本题也采用了变更问题法.证明了比原结论更强的结论.

例10　设正整数 n 的不同正因数的个数为 $S(n)$. 例如24有正因数1，2，3，4，6，8，12，24. 所以 $S(24)=8$. 试确定和

$$S(1)+S(2)+\cdots+S(2009) \tag{①}$$

是奇数还是偶数？

分析　考虑和式①中有多少个值为奇数的项，即对1—2009中的哪些自然数 n，$S(n)$ 是奇数？

解　设 d 是 n 的正因数，则 $\frac{n}{d}$ 也是 n 的正因数. 因此 n 的正因数总是成对出现的. 其中，仅当 n 是完全平方数时，n 的因数 $d=\sqrt{n}=\frac{n}{d}$ 自身配对. 因此当且仅当 n 为完全平方数时，n 有奇数个不同的正因数.

由于 $45^2=2025>2009>1936=44^2$，所以1，2，…，2009中有44个完全平方数，即和式①中有44个奇数，从而这个和必为偶数.

例11　能否把1，1，2，2，3，3，…，1986，1986这些数排成一行，使得两个1之间夹着一个数，两个2之间夹着两个数，依此类推，直到两个1986之间夹着1986个数？

分析　不妨假定是可能的，看看会不会产生矛盾.

解　假定符合题设条件的排列存在，则这些数排好之后，共占了 $2\times1986=3972$ 个位置，按自左至右的顺序给这些位置编号，对于每个 $i(1\leqslant i\leqslant1986)$，设两个 i 在排列中所对应的号码分别为 a_i 与 $b_i(b_i>a_i)$，依题意，应有

$$b_i-a_i=i+1，即\ b_i+a_i-2a_i-1=i.$$

从1到1986求和，得 $\sum\limits_{i=1}^{1986}(b_i+a_i)-2\sum\limits_{i=1}^{1986}a_i-1986=\sum\limits_{i=1}^{1986}i.$　①

由于 $\sum\limits_{i=1}^{1986}(b_i+a_i)$ 是1—3972各数之和，所以它等于

$$\sum_{i=1}^{3972}i=\frac{1}{2}(1+3972)\times3972=3973\times1986,$$

于是①式左端是一个偶数. 但①式右端

$$\sum_{i=1}^{1986} i = \frac{1}{2}(1+1986)\times 1986 = 1987\times 993$$

却是一个奇数.这一矛盾说明满足题设要求的排列不可能存在.

注 本例的结论实际上与 n 有关.例如,当 $n=3$ 和 $n=4$ 时,这种排列是存在的,如图 1-3 和图 1-4 所示.一般地,当 $n=4k-1$ 或 $n=4k(k=1,2,\cdots)$ 时,能够找到符合要求的排列,而且有很多种.当 $n=7$ 时,有人通过电脑排出了 26 种(不计颠倒排法),而 $n=8$ 时,竟有 150 种.

2	3	1	2	1	3

图 1-3

2	3	4	2	1	3	1	4

图 1-4

例 12 设 $E=\{1,2,3,\cdots,200\}$, $G=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{100}\}$, $G\subset E$,且 G 具有下列性质:

(1) 对任何 $1\leqslant i<j\leqslant 100$,恒有 $a_i+a_j\neq 201$;

(2) $\sum_{i=1}^{100} a_i = 10080$.

试证明:G 中奇数的个数是 4 的倍数,且 G 中所有数字的平方和为一定数.

分析 E 中的数 1—200 中有 100 个奇数和 100 个偶数:

$$1,3,5,\cdots,197,199$$
$$200,198,196,\cdots,4,2$$

故可分为 100 个组:$\{1,200\}$, $\{3,198\}$, $\cdots$, $\{199,2\}$,各组两数之和都等于 201.而 E 的子集 G 有 100 个数,由条件(1)可知,各组中有且仅有 G 中的一个数.由此可知:若 G 中有 k 个奇数,则它们是上述 100 个组中 k 个组里的奇数,而 G 中的另 $100-k$ 个偶数是其余的 $100-k$ 个组里的偶数.据此设法证明 k 是 4 的倍数.

证明 对 $1\leqslant i\leqslant 100$,记

$$\alpha_i = 2i-1,$$
$$\beta_i = 201-\alpha_i = 2(101-i),$$
$$E_i = \{\alpha_i,\beta_i\},$$

则 G 中包含且只包含 E_i 中的一个元素.设 G 中有 k 个奇数 $a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_k}(1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant 100)$,于是 $\alpha_{i_t}=a_{i_t}(1\leqslant t\leqslant k)$, $a_j=\beta_j(j\neq i_t)$,

由题设(2),得
$$\sum_{t=1}^{k}\alpha_{i_t}+\sum_{j\neq i_t}\beta_j = 10080; \quad ①$$

另一方面
$$\sum_{j=1}^{100}\beta_j = 202 \times 100 - 2\sum_{j=1}^{100} j = 10100. \qquad ②$$

②－① 得
$$\sum_{t=1}^{k}(\beta_{i_t} - \alpha_{i_t}) = 20.$$

即
$$201 \cdot k - 2\sum_{t=1}^{k}\alpha_{i_t} = 20,$$

$$201 \cdot k = 2\left(\sum_{t=1}^{k}\alpha_{i_t} + 10\right). \qquad ③$$

故 k 必为偶数. 若 $k = 2m$, $m = 2p + 1$(m, p 均为自然数). 则 ③ 式化为

$$201 \cdot m = \sum_{t=1}^{k}\alpha_{i_t} + 10.$$

因为偶数个奇数之和为偶数,故右端为偶数,但左端是奇数,矛盾. 所以 k 必是 4 的倍数.

G 中各数的平方和为

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{100}a_i^2 &= \sum_{t=1}^{k}\alpha_{i_t}^2 + \sum_{j\neq i_t}\beta_j^2 = \sum_{j=1}^{100}\beta_j^2 - \sum_{t=1}^{k}\beta_{i_t}^2 + \sum_{t=1}^{k}\alpha_{i_t}^2 \\
&= \sum_{j=1}^{100}[2(101-j)]^2 - \sum_{t=1}^{k}(\beta_{i_t}^2 - \alpha_{i_t}^2) = 4\sum_{i=1}^{100}i^2 - \sum_{t=1}^{k}(\beta_{i_t} + \alpha_{i_t})(\beta_{i_t} - \alpha_{i_t}) \\
&= 4 \times \frac{1}{6} \times 100(100+1)(200+1) - 201 \times 20 = 1349380.
\end{aligned}$$

例 13　设 $n \geqslant 2$, a_1, a_2, $\cdots$, a_n 都是正整数,且 $a_k \leqslant k(1 \leqslant k \leqslant n)$. 试证明:当且仅当 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 为偶数时,可以适当选取“+”号和“－”号,使得

$$a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_n = 0. \qquad ①$$

分析　关键是证明条件 ① 是必要的,可用数学归纳法,但在应用归纳假设时,可考虑 $a_k = a_{k-1}$ 与 $a_k \neq a_{k-1}$ 两种情况.

证明　设 ① 式成立. 由 ① 式知其中带“+”号的各项 a_i 之和(设为 m)等于带“－”号的各项 a_j 之和,因此 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_i a_i + \sum_j a_j = m + m = 2m$ 是偶数.

下设 $a_k \leqslant k(1 \leqslant k \leqslant n)$, $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 为偶数. 现用数学归纳法证明 ① 式成立.

当 $n = 2$ 时, $a_1 \leqslant 1$, $a_2 \leqslant 2$, 于是 $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ 或 $a_2 = 2$. 但 $a_1 + a_2$ 为偶数,故只可能 $a_2 = 1$, 所以 $a_1 - a_2 = 0$.

当 $n = 3$ 时, $a_1 \leqslant 1$, $a_2 \leqslant 2$, $a_3 \leqslant 3$, 且 $a_1 + a_2 + a_3$ 为偶数,由此推知只可能是