

根据教育部《国家课程标准》编写

龙门品牌  学子至爱

龙门 专题

主 编：王长涛
本册主编：王长涛

初中数学

方 程



龍 門 書 局

www.Longmenbooks.com

新课标



方
程

初中数学

主 编:王长涛

本册主编:王长涛

编 者:李玉美 王婷婷 张 忠
马田苗 安士明 周 晓
王长涛 安 忠 安 萌
郗翠新

龍 門 書 局
北 京

版权所有 侵权必究

举报电话:(010)64030229;(010)64034315;13501151303

邮购电话:(010)64034160

图书在版编目(CIP)数据

龙门专题:新课标.初中数学.方程/王长涛主编;王长涛本册
主编.—北京:龙门书局,2008

ISBN 978-7-5088-1704-0

I. 龙… II. ①王…②王… III. 数学课—初中—教学参考
资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 161722 号

责任编辑:田旭 马建丽 王美容/封面设计:耕者

龙门书局出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

www.longmenbooks.com

北京龙兴印刷厂印刷

科学出版社总发行 各地书店经销

*

2008年10月第一版 开本:A5(890×1240)

2008年10月第一次印刷 印张:7 3/4

字数:277 000

定价:14.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)



未名湖畔，博雅塔旁。

明媚的晨光穿透枝叶，懒散的泻落在林间小道上，花儿睁开惺忪的眼睛，欣喜地迎接薄薄的雾霭，最兴奋是小鸟，扇动翅膀在蔚蓝的天空中叽叽喳喳地欢唱起来了。微风轻轻拂动，垂柳摇曳，舒展优美的身姿，湖面荡起阵阵涟漪，博雅塔随着柔波轻快地翩翩起舞。林间传来琅琅的读书声，那是晨读的学子；湖畔小径上不断有人跑过，那是晨练的学子；椅子上，台阶上，三三两两静静的坐着，那是求索知识的学子……

在北大，每个早晨都是这样的；在清华，每个早晨都是这样的；在复旦，在交大，在南大，在武大……其实，在每一所高校里，早晨都是一幅青春洋溢、积极进取的景象！

在过去几年时间里，我一直在组织北大、清华的高考状元、奥赛金牌得主还有其他优秀的学子到全国各地巡回演讲。揭开他们“状元”的光环，他们跟我们是那么的相似，同样的普通与平凡。

是什么成就了他们的“状元”辉煌？

在来来往往带他们出差的路上，在闲来无事的聚会聊天过程中，我越来越发现，在普通平凡的背后，他们每个人都是一道亮丽独特的风景，都是一段奋斗不息、积极进取的历程，他们的成功，是偶然中的必然。

小朱，一个很认真、很可爱的女孩子，高中之前家庭条件十分优越，但学习一直平平；在她上高中前，家庭突遭变故，负债累累，用她妈妈的话说，“家里什么都没有了，一切只能靠你自己了。”她说自己只有高考一条路，只有考好了，才能为家里排忧解难。我曾经在台下听她讲自己刻苦学习的经历：“你们有谁在大年



三十的晚上还学习到深夜三点？你们又有谁发烧烧到39度以上还在病床上看书？……”那一年，她以总分684分成为了浙江省文科高考状元。

陆文，一个出自父母离异的单亲家庭的女孩，她说，她努力学习的动力就是想让妈妈高兴，因为从小她就发现，每次她成绩考得很好，妈妈就会很高兴。为了给妈妈买一套宽敞明亮的房子，她选择了出国这条路，考托福，考GRE，最后如愿以偿，被芝加哥大学以每年6.4万美金的全额奖学金录取为生物方向的研究生。6.4万美金，当时相当于人民币52万。

齐伟，湖南省高考第七名，清华大学计算机学院的研究生，最近被全球最大的软件公司MICROSOFT聘为项目经理；霖秋，北京大学数学学院的小妹，在坚持不懈的努力中完成了自身最重要的一次涅槃，昨天的她在未名湖上游弋，今天的她已在千里之外的西雅图……

还有很多很多优秀的学子，他们也都有自己的故事，酸甜苦辣，很真实，很精彩。我有幸跟他们朝夕相处，默默观察，用心感受，他们的自信，他们的执着，他们的勤奋刻苦，尤其是他们的“学而得其法”所透露出来的睿智更让人拍案叫绝，他们人人都有一套行之有效的学习方法，花同样的时间和精力他们可以更加快速高效，举一反三。我一直在想：如果当年我也知道他们的这些方法，或许我也能考个清华北大的吧？

多年以来，我一直觉得我们的高考把简单的事情搞复杂了，学生们浪费了大量的时间和精力却收效甚微；多年以来，我们也一直在研究如何将一套优良的学习方法内化在图书中，让同学们在不知不觉中轻松快速的获取高分。这，就是出版《龙门专题》的原因了。

一本好书可以改变一个人的命运！名校，是每一个学子悠远的梦想和真实的渴望。“少年心事当拿云，谁念幽寒坐呜呃！”

龙门专题，走向名校的阶梯！



总策划 王旭

2008年7月

《龙门专题》状元榜

赵永胜 2007年山西省文科状元

中国人民大学财政金融学院

星座：射手座

喜欢的运动：爬山 乒乓球

喜欢的书：伟人传记，如《毛泽东传》

人生格言：生命不息，奋斗不止

学习方法、技巧：兴趣第一，带着乐趣反复翻阅教科书，从最基本的知识入手，打牢“地基”，从基础知识中演绎难题，争取举一反三，融会贯通。合理安排时间，持之以恒，坚信“天道酬勤，勤能补拙”。



卢毅 2006年浙江省理科状元

北京大学元培学院

星座：天秤座

喜欢的运动：跑步 滑板

喜欢的书：《卡尔维诺文集》

人生格言：做自己

学习方法、技巧：注重知识点的系统性，将每门学科的知识点作一个系统的梳理，无论是预习还是复习，这样便可在课上学习时有的放矢，课后复习时查漏补缺。坚持锻炼，劳逸结合。



武睿颖 2005年河北省文科状元

北京大学元培学院

星座：天秤座

喜欢的运动：游泳 网球

喜欢的书：A Thousand Splendid Suns

人生格言：赢得时间，赢得生命

学习方法、技巧：勤奋是中学学习的不二法门；同时要掌握良好的学习方法，如制定学习目标、计划，定期总结公式、解题思路等，这样才能事半功倍。最后要培养良好的心态，平和积极地面对学习中的得失。



刘诗泽 2005年黑龙江省理科状元

北京大学元培学院

星座：金牛座

喜欢的运动：篮球 台球 排球

喜欢的书：《三国演义》

人生格言：战斗到最后一滴血

学习方法、技巧：多读书，多做题，多总结。看淡眼前成绩，注重长期积累。坚持锻炼，劳逸结合。



邱汛 2005年四川省文科状元

北京大学

星座：处女座

喜欢的运动：篮球 乒乓球

喜欢的书：《哈利·波特》

人生格言：非淡泊无以明志，非宁静无以致远

学习方法、技巧：1. 要保持一颗平常心来面对考试、繁重的学习任务和激烈的竞争。2. 学会从各种测验考试中总结经验、教训，而不要仅仅局限于分数。3. 学会计划每一天的学习任务，安排每一天的学习时间。4. 坚持锻炼，劳逸结合。



林叶 2005年江苏省文科状元

北京大学

星座：水瓶座

喜欢的运动：跑步 台球 放风筝

喜欢的书：《黑眼睛》《笑面人》

人生格言：不经省察的生活不值得过

学习方法、技巧：学习分两类，一类和理想真正有关，另一类只是不得不过的门槛。不要总因为喜好就偏爱其中的一个，它不仅是必须的，而且你也许会发现，它本来也值得你热爱和认真对待。你自己的学习方法别人永远无法替代，它也是你生活的一部分，完善它，就像完善你自己。



田禾 2005年北京市理科状元

北京大学元培学院

星座：水瓶座

喜欢的运动：羽毛球

喜欢的书：历史类书籍

人生格言：认真、坚持

学习方法、技巧：认真听讲，勤于思考，作阶段性总结，及时调整学习计划，坚持阅读课外书和新闻，一以贯之，学不偏废。



朱师达 2005年湖北省理科状元

北京大学元培学院

星座：水瓶座

喜欢的运动：足球 篮球 游泳

喜欢的书：《追风筝的人》《史记》

人生格言：有梦想就有可能，有希望

就不要放弃

学习方法、技巧：1. 知识系统化、结构化是掌握知识的有用技巧和重要体现。2. 知其然还要知其所以然，记忆才更牢固。3. 整体把握兴趣和强弱科的平衡。4. 正确认识自己的弱点，集中力量克服它。



编委会

主 编：王长涛

编委会成员：李玉美 王婷婷 张 忠

马田苗 安士明 周 晓

王长涛 安 忠 安 萌

郗翠新

Contents

目录

基础篇	(1)
第一章 一元一次方程	(1)
1.1 从算式到方程	(1)
1.2 一元一次方程的解法	(17)
1.3 列一元一次方程解应用题	(27)
中考经典题型分析	(42)
本章小结	(52)
本章测试题	(53)
第二章 二元一次方程组	(57)
2.1 二元一次方程组	(57)
2.2 二元一次方程组的解法——消元	(65)
2.3 布列二元一次方程组解应用题	(78)
中考经典题型分析	(94)
本章小结	(106)
本章测试题	(107)
第三章 一元二次方程	(113)
3.1 一元二次方程	(113)
3.2 一元二次方程的解法	(119)
3.3 一元二次方程的应用	(147)
3.4 可化为一元一次方程、一元二次方程的分式方程 ..	(159)
中考经典题型分析	(176)
本章小结	(185)
本章测试题	(186)

综合应用篇	(191)
一、数学思想方法	(191)
二、构造一次方程(组)	(200)
三、解一次方程(组)的技巧	(206)
四、一次方程(组)的应用	(212)
五、实际生活中的不定方程(组)	(221)
六、配方法的应用	(225)
七、一元二次方程的应用	(229)
八、方程(组)、不等式(组)函数的综合应用	(232)
(191)	
(192)	
(193)	
(194)	
(195)	
(196)	
(197)	
(198)	
(199)	
(200)	
(201)	
(202)	
(203)	
(204)	
(205)	
(206)	
(207)	
(208)	
(209)	
(210)	
(211)	
(212)	
(213)	
(214)	
(215)	
(216)	
(217)	
(218)	
(219)	
(220)	
(221)	
(222)	
(223)	
(224)	
(225)	
(226)	
(227)	
(228)	
(229)	
(230)	
(231)	
(232)	



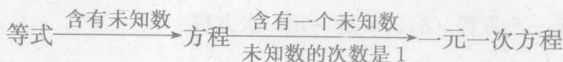
基础篇

第一章 一元一次方程

1.1 从算式到方程

1.1.1 一元一次方程

知识网络图解



知识点精析与应用



知识点精析

知识点 1: 基本概念: (1) 等式: 用等号“=”表示相等关系的式子叫等式. (2) 方程: 含有未知数的等式叫做方程. (3) 一元一次方程: 在一个方程中, 只含有一个未知数并且未知数的指数是 1, 这样的整式方程叫做一元一次方程. (4) 方程的解: 使方程左右两边的值相等的未知数的值, 叫做方程的解. (5) 解方程: 求方程解的过程叫做解方程.

知识点 2: 方程与等式之间的区别与联系: 方程必须是等式, 且含有未知数, 等式是表示相等关系的式子, 它可含未知数, 也可不含未知数. 也就是说: 方程一定是等式, 而等式不一定是方程.

知识点 3: 方程的“元”与“次”, 方程中的“元”指的是未知数, 有几个未知数就称为几元方程, “次”是指的是含未知数项的未知数的次数, 且是指次数最高的项的次数.

知识点 4: 方程的解与解方程的不同: 方程的解是未知数的值, 而解方程的解指的是一个过程, 两者是不同的.



解题方法指导

题型 1 方程的识别

[例 1] 判断下列各式哪些是方程, 哪些不是方程:

(1) $3+2=5$; (2) $3x+5>7$; (3) $3x+y=3$; (4) $3x+y$; (5) $p=3$.

剖析 这类问题先观察是否是等式, 再看是否含有未知数. (1) 是等式, 不含未知数, (2) 不是等式, (4) 不是等式, (3)(5) 是等式且都含有未知数, 所以它们是方程.



解 (1)、(2)、(4)不是方程。(3)、(5)是方程。(3)中的未知数是 x, y , (5)中的未知数是 p 。(这里 p 也可作未知数,未知数不一定是 x, y, z 等)。

题型2 一元一次方程的识别

[例2] 判断下列各式哪些是一元一次方程:

(1) $9 \times 5 = 45$; (2) $2a + 3b = 7$; (3) $3x - 8 = 1$; (4) $ax + b = 0$ (a, b 为已知数); (5) $x^2 + 1 = 4$ 。

剖析 要判断一个等式是否为一元一次方程,要看它是否符合两个条件:一是只含一个未知数,二是未知数的指数是1且为整式方程,两者缺一不可。(1)中不含未知数,它不是,(2)中含有两个未知数它不是,(5)中虽含有一个未知数,但它的指数不是1,(3)、(4)符合两个条件所以它们是,注意(4)中有 a, b 为已知数这个条件,所以它只有 x 是未知数。

解 (1)、(2)、(5)不是一元一次方程。(3)、(4)是一元一次方程。

题型3 检验方程的解

检验一个数是否是方程的解,要把这个数值代入方程的两边,能使它的左、右两边相等的未知数的值就是方程的解,不相等的则不是方程的解。

[例3] 检验下列各数是不是方程 $2y - 3 = 3y - 5$ 的解:(1) $y = 2$; (2) $y = 3$ 。

剖析 判断一个数是否是方程的解,将给定的数代入方程的左、右两边,能使左、右两边相等的就是方程的解,否则就不是它的解。

解 (1)把 $y = 2$ 代入方程的左、右两边得:左边 $= 2 \times 2 - 3 = 1$, 右边 $= 3 \times 2 - 5 = 1$.
 \therefore 左边 = 右边. $\therefore y = 2$ 是方程 $2y - 3 = 3y - 5$ 的解。(2)把 $y = 3$ 代入方程的左、右两边得:左边 $= 2 \times 3 - 3 = 3$, 右边 $= 3 \times 3 - 5 = 4$. \therefore 左边 \neq 右边, $\therefore y = 3$ 不是方程的解。

误区警示 上面检验不能写成:把 $y = 2$ 代入原方程,得 $2 \times 2 - 3 = 3 \times 2 - 5 = 4 - 3 = 6 - 5 = 1$ 。这样写的原因在于未检验之前还不知道 $y = 2$ 是不是方程的解,也就不知道 $y = 2$ 是不是适合方程,这样不能用等号连接,正确的写法是分别代入方程的左边和右边,看它们是否相等。

[例4] 已知 $3x^{a-1}y^2$ 与 $4x^2y^{b-1}$ 是同类项,判断 $k = \frac{a+b}{2}$ 是不是方程 $2k - 6 = 0$ 的解。

剖析 要判断 $k = \frac{a+b}{2}$ 是不是方程的解,只要把 k 的值代入方程,看它的左、右两边是否相等就可以了,而 k 的值是未知的。只有知道 a, b 的值才能得到 k 的值,而 a, b 的值我们可从已知条件中去寻求,由 $3x^{a-1}y^2$ 与 $4x^2y^{b-1}$ 是同类项,根据同类项的定义可知 $\begin{cases} a-1=2 \\ b-1=2, \end{cases}$ 由此可得到 $\begin{cases} a=3 \\ b=3, \end{cases}$ 于是可求得 k 的值为3,只要把 $k=3$ 代入方程便可得出结论。



解 $\because 3x^{a-1}y^2$ 与 $4x^2y^{b-1}$ 是同类型项, $\therefore \begin{cases} a-1=2 \\ b-1=2 \end{cases} \therefore \begin{cases} a=3 \\ b=3 \end{cases}$. 将 $a=3, b=3$ 代入 $k = \frac{a+b}{2}$ 得 $k = \frac{3+3}{2} = 3$. 把 $k=3$ 代入方程 $2k-6=0$ 得: 左边 $= 2 \times 3 - 6 = 0$, 右边 $= 0$
 \therefore 左边 = 右边. $\therefore k = \frac{a+b}{2}$ 是方程 $2k-6=0$ 的解.

题型4 根据数量关系列方程

根据问题中的数量关系列方程, 关键是从题意中找出等量关系, 抓住问题中的关键词和反映的数量关系, 其分析过程通常包括: (1) 弄清题意和其中的数量关系, 设出未知数, (2) 找出问题中的等量关系, (3) 根据相等关系中涉及的量, 列出所需的代数式, 根据等量关系列出方程.

[例5] 根据下列条件列出方程:

(1) 某数与 5 的和的 3 倍比它本身大 7; (2) x 的 $\frac{1}{3}$ 比 x 与 3 的差小 10; (3) 某数的相反数与 4 的和是它本身的 2 倍; (4) x 的 5 倍与 y 的 3 倍的差等于 3.

解 (1) 设某数为 x , 那么有 $3(x+5) = x+7$; (2) $\frac{1}{3}x + 10 = x - 3$; (3) 设某数为 x , 则: $-x + 4 = 2x$; (4) 设某数为 x , 则 $5x - 3y = 3$.

解题规律总结 列方程的关键在于找出等量关系, 列出正确的代数式, 要抓住关键词如: 倍、差、和、相反数等.

[例6] 根据题意, 列方程:

(1) 某旅行团一行人到某地旅游, 安排住处时, 如果每 3 人住一间, 则有 10 人无法安排, 如果 4 人住一间, 则可空出 2 个床位, 问这个旅行团有多少人?

(2) 某班总人数 70 人, 其中会打篮球的 52 人, 会打乒乓球的 33 人, 两样都不会的 6 人, 问两样都会的有多少人?

解 (1) 设有房间 x 间, 依题意列方程, 得 $3x + 10 = 4x - 2$.

(2) 设两样都会的有 x 人, 根据题意, 得 $52 + 33 - x + 6 = 70$.

解题规律总结 (1) 中不是直接设旅行团的人数, 而是设房间数, 这是采用间接设未知数的方法, 今后的学习中我们还经常采用这种方法. 若设这个旅行团共有 x 人, 则可列方程为 $\frac{x-10}{3} = \frac{x+2}{4}$. 其中利用的等量关系是房间数不变. 请考虑 $x-10$ 、 $x+2$ 各表示什么?



基础达标演练

1. 指出下列各式是不是方程. 是方程的说明已知数和未知数, 不是方程的说明理由.

(1) $2x-1=5$; (2) $4+(-9)=-5$; (3) $2x+3y=1$; (4) $x-3 \neq 5$; (5) $ax+2a=3$.



2. 下列方程哪些是一元一次方程, 哪些不是? 为什么?

(1) $2x+3=4x-1$; (2) $3x+2y=9$; (3) $2x^2-3x+1=0$; (4) $ax+b=0$.

3. $x=2$ 是下列哪些方程的解.

(1) $2x+3=3x+1$; (2) $5x-1=7$; (3) $6x+3=3x+9$; (4) $x+5=2x+3$.

4. 如果 $\frac{1}{2}x^{n-1}+5=0$ 是关于 x 的一元一次方程, 则 n 的值是多少?

5. 若 $x=3$ 是方程 $ax+1=5$ 的解, 则 a 的值是多少?

6. 根据下列条件列方程.

(1) 某数与 5 的差的 3 倍与这个数与 3 的和相等.

(2) 某数的 $\frac{2}{3}$ 与 6 的差是 3.

(3) 某数的 50% 与它的 30% 的和是 98.

7. 一根铁丝用去它的一半后, 还剩下 12 m. 若铁丝原长为 x m, 写出所列方程.

8. 小赵去商店买练习本, 回来后问同学们: “店主告诉我如果多买一些就给我八折优惠, 我就买了 20 本, 结果便宜了 1.8 元, 你们猜原来每本价格多少元, ” 如果设每本价格为 x 元, 你能写出所列方程吗?

答案与提示

- (1) 是方程. 未知数是 x , 已知数是 2, -1, 5 (2) 不是, 它不含未知数 (3) 是方程, x, y 是未知数, 2, 3, 1 是已知数 (4) 不是方程. 它不是等式 (5) 是方程. a 为已知数时, x 为未知数, $a, 2, 3$ 是已知数; 当 a 为未知数时, $x, 2, 3$ 是已知数, a, x 为未知数时, 2, 3 是已知数. (提示: $ax+2a=3$ 要进行分析, 分三种情况讨论.)
- (1) 是一元一次方程. (2) 不是一元一次方程, 因为它含有二个未知数. (3) 不是一元一次方程. 因为未知数的次数是 2. (4) 当 a, b 为已知数时是一元一次方程. a, b 为未知数时, 它不是一元一次方程.
- (1) 把 $x=2$ 代入方程: 左边 $=2 \times 2 + 3 = 7$, 右边 $=3 \times 2 + 1 = 7$, \therefore 左边 = 右边, $\therefore x=2$ 是方程的解.
 (2) 把 $x=2$ 代入方程: 左边 $=5 \times 2 - 1 = 9$, 右边 $=7$, \therefore 左边 \neq 右边, $\therefore x=2$ 不是方程的解.
 (3) 把 $x=2$ 代入方程: 左边 $=6 \times 2 + 3 = 15$, 右边 $=3 \times 2 + 9 = 15$, \therefore 左边 = 右边.
 $\therefore x=2$ 是方程的解.
 (4) 把 $x=2$ 代入方程: 左边 $=2 + 5 = 7$, 右边 $=2 \times 2 + 3 = 7$, \therefore 左边 = 右边, $\therefore x=2$ 是方程的解.
- 解: $\because \frac{1}{2}x^{n-1}+5=0$ 是关于 x 的一元一次方程. $\therefore n-1=1$, $\therefore n=2$, 即 n 的值是 2.
- 解: $\because x=3$ 是方程 $ax+1=5$ 的解, $\therefore 3a+1=5$. $\therefore a=\frac{4}{3}$. (提示: 根据方程解的定义, $x=3$ 是方程的解. 所以把 $x=3$ 代入原方程, 则它的左右两边必定相等, 于是得到 $3a+1=5$, 于是可求 a .)



6. 设某数为 x , 根据题意可得: (1) $3(x+5)=x+3$ (2) $\frac{2}{3}x-6=3$ (3) $50\%x+30\%x=98$.

7. 解: $\frac{1}{2}x=12$ 或 $x-\frac{1}{2}x=12$ (提示: 铁丝用去一半则还剩下半, 剩下的一半是 12 m, 由此可得 $\frac{1}{2}x=12$. 注意题目中的一半, 剩下这关键的词语.)

8. 解: $20x-20x \cdot 80\%=1.8$ 或 $20(1-80\%)x=1.8$ (提示: 按原来的价格买 20 本, 共花 $20x$ 元, 若按优惠计算共花 $80\%x \times 20$, 所依据的相等关系是: 优惠前的价格 - 优惠后的价格 = 1.8 元.)

能力拓展

释疑解难

命题规律 1: 本节重点概念是一元一次方程, 它可用作判断是否是一元一次方程的依据, 从而确定一些待定字母的值. 同时, 灵活地逆用这个定义, 可以求出符合某些已知解的一元一次方程. 定义的正用与反用, 才能深刻领会概念的本质.

命题规律 2: 列方程解决生活中的实际问题

首先要对实际问题提供的情景有所了解, 其次要仔细阅读题, 弄清问题中各种数量之间的关系, 如多几, 少几, 几倍, 几分之几. 又如: 路程 = 速度 \times 时间, 等等, 然后要设未知数, 最关键的就是要从题目中找出表示已知量和未知量之间的等量关系, 根据此等量关系列出方程.

综合探究

技巧 1 一元一次方程定义的应用

[例 7] 已知方程 $(n+2)x^{|n|}=n+1$ 是关于 x 的一元一次方程, 试求字母 n 的值.

剖析 由一元一次方程的定义, 可知 x 的指数 $|n|$ 的值只能为 1, 又因为 x 的系数 $(n+2)$ 不能为 0, 由这两个条件可确定 n 的值.

解 $\because (n+2)x^{|n|}=n+1$ 是关于 x 的一元一次方程. $\therefore |n|=1$ 且 $n+2 \neq 0$. 由绝对值的定义可知 $n=1$ 或 $n=-1$. 而当 $n=1$ 或 $n=-1$ 时, $n+2$ 均不为零, $\therefore n$ 的值为 1 或 -1.

误区警示 在这类问题中, 不能忽视 x 的系数不为零这个条件.

技巧 2 用估算法求方程的解

[例 8] 试估算 $3x-3=6$ 的解.

剖析 可通过列表形式, 在一定范围内确定 x 的值, 计算方程左、右两边的值, 再根据概念确定方程的解.

解 列表如下:



x 的值	0	1	2	3	...
$3x-3$	-3	0	3	6	...

所以,可确定方程 $3x-3=6$ 的解为 $x=3$.

解题规律总结 估计方程的解,先应确定未知数的一个大致范围,以减少计算量,而不是胡想乱测,估测法是数学中的一种重要的发现问题、解决问题的方法,它要依据一定的经验、数感和灵活的头脑.

技巧3 列方程解决生活中的实际问题

[例9] 为支援四川省抗震救灾,某校发起了“众志成城,抗震救灾”捐献活动.该校八年级二个班的94名学生积极参与,踊跃捐款,已知八年级一班有 $\frac{1}{2}$ 的同学每人捐了50元,八年级二班 $\frac{1}{3}$ 的同学每人捐了50元,两班其余学生每人捐了20元,两班共捐款总数为2500元,问两班各有多少名学生.(只列方程)

剖析 该问题中的等量关系为:两班共捐款2500元.即一班捐款总数+二班捐款总数=2500.因此把两个班各自的捐款数分别表示出来即可.

解 设八年级一班有 x 人,则八年级二班有 $(94-x)$ 人,根据题意,得 $[\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}(94-x)] \times 50 + [(1-\frac{1}{2})x + (1-\frac{1}{3})(94-x)] \times 20 = 2500$.

[例10] 某地电话拨号入网有两种收费方式,用户可任选其一.

(1)计时制:0.05元/分;(2)包月制:50元/月.

此外,每一种上网方式都得加收通信费0.02元/分,问用户每月上网多少小时,这两种收费方式所收费一样,请列出方程.

剖析 计时制0.05元/分.所以每小时收费为0.05元/分 \times 60分=3元,通信费0.02元/分.即1.2元/时,所以第一种收费方式实际为4.2元/时,包月制50元/月,另收通信费1.2元/时,如果设用户每月上网 x 小时,则第一种方式共收费为 $4.2x$ 元,第二种收费方式为 $(50+1.2x)$ 元,由两种收费方式收费一样,根据这一等量关系可列出方程.

解 设用户每月上网 x 小时,这两种收费方式收费一样,根据题意得 $4.2x = 50 + 1.2x$.

技巧4 从多角度分析问题

[例11] 根据问题设未知数,并列方程.

某校举行一次九年级数学竞赛,共有25道选择题,做对一道得4分,做错或不做一题倒扣1分,若某一学生考80分,他做对了多少道题.

剖析 本题中包含的等量关系是:得分-扣分=80.



解法 1 设该同学做对了 x 道题, 则设不做或做错 $(25-x)$ 道题, 依题意, 有 $4x - (25-x) \times 1 = 80$.

解法 2 本题的等量关系也可理解为 $100 - \text{失分} = 80$, 故设做错或未做共有 x 道题. 那么每道题不做或做错实际失分为 5 分, 依据题意得 $100 - 5x = 80$.

解题规律总结 相同的问题, 从不同的角度入手分析, 所列方程不同, 但结果是相同的. 我们思考问题要善于从不同角度去分析, 已寻求最佳方法.

思维拓展训练

1. (江苏考题) 已知 $x=4$ 是方程 $mx-8=20$ 的解, 求 m 的值.
2. (2007·福建南平) 已知 $x=1$ 是方程 $ax^2+x-2=0$ 的一个根, 求 a 的值.
3. 已知 $(a+1)x^{|a|}-3=0$ 是关于 x 的一元一次方程, 求 a^2-2a+3 的值.
4. 当 $x=2$ 时, 代数式 $ax-2$ 的值是 4, 那么当 $x=-2$ 时, 代数式的值是多少?
5. 一次美化校园中, 先安排 32 人去拔草, 18 人去植树, 后又增派 22 人支援他们, 结果拔草的人数是植树人数的 2 倍, 问支援拔草和植树的人各有多少人? 若设支援拔草的有 x 人, 列出方程.

6. 某项工程甲单独干需要 12 天完成, 乙单独干需要 18 天完成, 现由甲、乙合干 3 天后, 余下的由乙队去完成, 问乙还需要多少天完成. (只列出方程)

7. 著名数学家苏步青先生有一次在德国与另一位数学家同乘一辆电车, 这位数学家出了一道题, 请苏先生解答.

甲、乙两人同时从相距 100 km 的 A、B 两地出发, 相向而行, 甲每小时走 6 km, 乙每小时走 4 km, 甲带着一只狗和他同时出发, 狗以每小时 10 km 的速度向乙奔去, 遇到乙后立即回头向甲奔去, 遇到甲后又回头向乙奔去, 直到甲、乙相遇时才停止. 问这只狗共跑了多少千米?

请你试着解决这个问题, 并把你的想法和同伴们交流一下.

8. 写出一个一元一次方程使它的解为 -2 , 系数为 3.

答案与提示

1. 解: $\because x=4$ 是方程 $mx-8=20$ 的解. $\therefore 4m-8=20, \therefore m=7$.

提示: 方程的解是使方程两边相等的未知数的值, 因此把 $x=4$ 代入便可得到 $4m-8=20$, 而 $28-8$ 的值是 20. 所以 $4m=28$, 所以 $m=7$.

2. 解: $\because x=1$ 是方程 $ax^2+x-2=0$ 的一个解. $\therefore a+1-2=0, a-1=0, \therefore a=1$.

3. 解: $\because (a+1)x^{|a|}-3=0$ 是关于 x 的一元一次方程. $\therefore |a|=1$, 而 $a+1 \neq 0$. 由 $|a|=1$ 得 $a=\pm 1$, 而当 $a=-1$ 时, $a+1=0$. $\therefore a$ 只能取 $a=1$, 当 $a=1$ 时 $a^2-2a+3=1^2-2 \times 1+3=2$.

误区警示: 在一元一次方程 $ax+b=0$ 中, $a \neq 0$ 是不能忽视的, 上面的问题中, 当 $a=-1$ 时, $a+1=0$, 这时方程则不是一元一次方程.

4. 解: 由已知可得 $2a-2=4$, 所以 $a=3$. 把 $a=3$ 代入 $ax-2$ 得 $3x-2$, 当 $x=-2$ 时, $3x-2=3 \times (-2)-2=-8$.



5. 解: $32+x=2[18+(22-x)]$.

(提示: 增派的 22 人, 若 x 人去拔草, 则有 $(22-x)$ 人去植树, 这时拔草的人数共有 $(32+x)$ 人, 植树的人数共有 $[18+(22-x)]$ 人, 由拔草人数是植树人数的 2 倍, 可列出方程.)

6. 设乙还需要 x 天完成, 依题意可得 $\frac{3}{12} + \frac{3}{18} + \frac{x}{18} = 1$.

(提示: 把总工程量看作 1, 则甲每天完成 $\frac{1}{12}$, 乙每天完成 $\frac{1}{18}$.)

7. 解: 设出发后, 甲、乙经 x 小时相遇, 则 $6x+4x=100$, 估测 $x=10$, 所以狗奔跑的路程为 $10 \times 10 = 100(\text{km})$.

(提示: 本题的解题思路是: 已知狗的奔跑速度是每小时 10 km, 求狗的奔跑路程, 它的奔跑时间是解决本题的关键, 狗从甲、乙两人出发到甲、乙两人相遇时, 一直在两人之间不间断的奔跑, 因此狗奔跑的时间即甲、乙从出发到相遇的时间.)

8. 解: $3x+4=-2$.

(提示: 本题具有开放性, 答案不唯一, 可通过逆向考虑一元一次方程的解的定义来考虑, 其最简形式为 $3x=-6$, 然后对其正确变形得到的方程都符合题意.)

1.1.2 等式的性质

知识网络图解

等式的基本性质 $\left\{ \begin{array}{l} \text{性质 1. 解方程} \rightarrow \text{移项.} \\ \text{性质 2. 的应用} \rightarrow \text{去分母、系数化为 1.} \end{array} \right.$

知识点精析与应用

知识点精析

知识点 1: 等式的基本性质

(1) 等式两边都加上(或减去)同一个数或同一个整式, 所得结果仍是等式.

(2) 等式两边都乘以(或除以)同一个数(除数不能为零), 所得结果仍是等式.

知识点 2: 等式的基本性质字母表示法

(1) 若 $a=b$, 则 $a \pm m = b \pm m$; (2) 若 $a=b$, 则 $am = bm$; (3) 若 $a=b$, 则 $\frac{a}{m} = \frac{b}{m}$ ($m \neq 0$).

知识点 3: 等式的对称性和传递性

(1) 对称性: 如果 $a=b$, 那么 $b=a$, 即等式两边可以相互交换.

(2) 传递性: 如果 $a=b, b=c$, 那么 $a=c$, 即一个量可以用与它相等的量来代替.

知识点 4: 运用这两个基本性质时注意: 性质(1)是两边同加上(或减去)同一个数或同一个整式, 等式仍然成立, 特别注意“同时”和“同一个”; 性质(2)中是两边同时乘以(或除以)同一个数(除数不能为零), 等式仍然成立. 注意乘与除是同一个数而不是整式, 这是与(1)的区别. 除的时候除数不能为零, 这一点要特别注意.