Matroid 理论及应用

〔一〕

刘振宏编

中国科学院 数学研究所

78.6.

符　号

E	表示有限个元素的集合
F(E)	表示E的所有子集簇
ϕ	表示空集
$\forall$	表示任意的意思
$\Longrightarrow$	表示由……能推出……结果
$\cup$	表示集合的并
$\setminus$	表示集合的差
$\subseteq$	集合的包含符号
$\subset$	集合的严格包含符号
$\|S\|$	表示集合S中不同元素的个数.
$\cap$	表示集合的交
$\in$	表示属于的意思
$\notin$	不属于
$\not\subseteq$	不包含
$\Longleftrightarrow$	等价于……
$\exists$	存在
$\{e \mid e\in S, P\}$	表示集合S中具有性质P的元素的总体。
$\triangle$	对称差标子

序 言

拟阵（Matroid）这一名词是由矩阵 Matrix 衍生出来的。它是H·Whitney在1935年提出来的。关于拟阵的一些性质，在三十年代 Van der Wearden 已作过一些研究。

拟阵理论是向量空间线性独立与相关性质的抽象，但是它的应用范围与深度已超出了向量空间的线性独立与相关的性质。目前已深入到图论、运筹学、格论、电网络、开关网络和投影几何各个领域。特别，近几年来，已应用到组合数学中，并解决了一类组合最优化的问题。

拟阵的概念虽然产生于三十年代，但较长一段时间内没有引起人们的重视，直到六十年代中期，W. T. Tutte，J. Edmonds 等人从图论的观点，对拟阵理论进行了系统的研究之后，研究拟阵的人才越来越多。近些年来，关于拟阵方面的文章不下数百篇，其中很多出现在组合杂志刊物上。与此同时，拟阵的专著也出世了。特别值得提出的是 J. Edmonds，E. L. Lawler，Masuo IRi 和 S Fujishige 等人，把拟阵理论应用到组合最优化中，它不仅统一了已有的某些组合最优化的方法，而且为解决一大类组合最优化问题，提供了有力的工具。

这本讲义是我们组讨论班的讲稿，然后经过充实整理而成的。我们将分为几个部分陆续印出，以供有兴趣的读者参考和了解拟阵的内容和应用。由于水平所限，难免产生错误，希同志们批评指正。

第一讲

拟阵的公理系统

拟阵有不少等价性的定义，我们可以把它们分为五类，通过了解这些等价性的定义，就能对拟阵的结构有清楚的了解，同时，在应用过程中也就更加灵活。

这些公理系统，看起来有些抽象，但是和线性向量空间及图论联系起来，就十分具体了。拟阵中所应用的术语，几乎都是来自于代数和图论，因此就不难了解这些术语的意义。

§1. 秩的公理系统

拟阵在秩的公理系统下，有下述两个等价的定义。

设E是有限个元素的集合，令F(E)表示E的所有子集构成的簇。

[定义1] 设E是有限个元素的集合．r是定义在F(E)上的函数，若r满足下述条件，则称(E,r)为一拟阵，並记$M=(E,r)$，r称为M的秩函数。

(I.1)　$r(\phi)=0$

(I.2)　$\forall e\in E,\ S\subseteq E \implies r(S\cup\{e\})-r(S)\in\{0,1\}$

(I.3)　$\forall S\subseteq E,\ e_1,\ e_2\in E$

若　$r(S\cup\{e_1\})=r(S\cup\{e_2\})=r(S)$　则 $r(S\cup\{e_1,e_2\})=r(S)$．

当　$\forall e\in E$，有 $r(e)=1$ 时，则称M为正态的。

由此定义可见，r是F(E)上的非负整数函数。

由上述定义，我们容易得到秩函数r的下述性质：

1、$\forall\ S\subseteq E$，　有$r(S)\leq|S|$

2. $\forall S_1, S_2 \subseteq E$，若 $\forall e \in S_2$ 有 $\gamma(S_1 \cup \{e\}) = \gamma(S_1)$，则有 $(S_1 \cup S_2) = \gamma(S_1)$

3. $\forall S' \subseteq E$，$\forall S \subseteq S'$ 则有 $0 \leq \gamma(S') - \gamma(S) \leq |S' \setminus S|$。

4 $\forall S \subseteq E$，$\gamma(S) = max\{|S'| \mid S' \subseteq S$ 且 $\gamma(S') = |S'|\}$

5 $\forall X \subseteq E$，$Z \subseteq Y \subseteq X$，$e \in X \setminus Y$，若 $\gamma(Z \cup \{e\}) = \gamma(Z)$

则有 $\gamma(Y \cup \{e\}) = \gamma(Y)$

证明：

1. 我们用归纳法来证明性质1.

当 $|S| = |\{e\}| = 1$ 时，由(I,2) 知 $\gamma(e) \leq 1$

设 $|S| \leq k$ 时，性质1成立. 即 $\gamma(S) \leq |S|$

当 $|S| = k+1$ 时，令 $S = S' \cup \{e\}$，由 (I,2) 知

$\gamma(S) - \gamma(S') = \gamma(S' \cup \{e\}) - \gamma(S') \leq 1$ 因此

$$\gamma(S) \leq \gamma(S') + 1 \leq |S'| + 1 = |S|$$

2. 我们也用归纳法来证明性质2.

当 $|S_2| \leq 2$ 时，性质2就是(I.3)，因此结论成立.

设 $|S_2| \leq k$ 时，性质2成立.

当 $|S_2| = k+1$ 时，令 $S_2 = S' \cup \{e_1, e_2\}$ 因此

$|S' \cup \{e_1\}| = k$，$|S' \cup \{e_2\}| = k$，按归纳假设有

$\gamma(S_1 \cup S' \cup \{e_1\}) = \gamma(S_1)$，$\gamma(S_1 \cup S' \cup \{e_2\} = \gamma(S_1)$

$\gamma(S_1 \cup S') = \gamma(S_1)$

因此，$\gamma(S_1 \cup S' \cup \{e_1\}) = \gamma(S_1 \cup S' \cup \{e_2\}) = \gamma(S_1 \cup S') = \gamma(S_1)$

令 $S_1 \cup S' = \tilde{S}$，由 (I,3) 得知

$$\gamma(\tilde{S}\cup\{e_1\})=\gamma(\tilde{S}\cup\{e_2\})=\gamma(\tilde{S}) \Longrightarrow \gamma(\tilde{S}\cup\{e_1,e_2\})=\gamma(\tilde{S})$$

即 $\gamma(S_1\cup S_2)=\gamma(\tilde{S}\cup\{e_1,e_2\})=\gamma(\tilde{S})=\gamma(S_1\cup S')=\gamma(S_1)$

3. 设 $S'\setminus S=\{e_1,e_2\cdots\cdots,e_k\}$ 由 (I,2) 知

$$0\leq\gamma(S\cup\{e_1\})-\gamma(S)\leq 1$$

$$0\leq\gamma(S\cup\{e_1,e_2\})-\gamma(S\cup\{e_1\})\leq 1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$0\leq\gamma(S')-\gamma(S\cup\{e_1,e_2\cdots\cdots e_{k-1}\})\leq 1$$

加起所有这些不等式就有 $0\leq\gamma(S')-\gamma(S)\leq k=|S'\setminus S|$

4. 设 $\max\{|S'|\,|\,S'\subseteq S,\ \gamma(S')=|S'|\}=|\tilde{S}|$

若 $\tilde{S}=S$, 则结论显然成立.

若 $\tilde{S}\subset S$, 则 $\forall e\in S\setminus\tilde{S}$ 有 $\gamma(\tilde{S}\cup\{e\})=\gamma(\tilde{S})$, 否则 $\tilde{S}$ 就不是极大的。因此由性质2知

$$\gamma(S)=\gamma(\tilde{S}\cup(S\setminus\tilde{S}))=\gamma(\tilde{S})=|\tilde{S}|$$

5. 设 $\gamma(Z)=\gamma(Z_0)=|Z_0|$ 对某一 $Z_0\subseteq Z$

$\gamma(Y)=\gamma(Y_0)=|Y_0|$ 对某一 $Y_0\subseteq Y$

则 $\forall e\in E$ 有 $\gamma(Z\cup\{e\})=\gamma(Z_0\cup e)$ 和 $\gamma(Y\cup\{e\})=\gamma(Y_0\cup\{e\})$

我们只证第一个等式, 第二个的证明是完全一样的.

因 $\gamma(Z\cup\{e\})\geq(Z_0\cup\{e\})\geq\gamma(Z_0)$

若 $\gamma(Z\cup\{e\})>\gamma(Z_0\cup\{e\})\Longrightarrow\gamma(Z_0\cup\{e\})=\gamma(Z_0)$ (这是因为 $\gamma(Z_0)+1\geq\gamma(Z\cup\{e\})$)

因此 $\forall e'\in Z\setminus Z_0$ 有 $\gamma(Z_0\cup\{e'\})=\gamma(Z_0)$ 又因

$$r(Z_0\cup\{e\})=r(Z_0)\Longrightarrow r(Z\cup\{e\})=r(Z_0\cup(Z\setminus Z_0)\cup\{e\})$$
$$=r(Z_0)$$

这于 $r(Z\cup\{e\})>r(Z_0)$ 矛盾.

若 $\forall e\in X\setminus Y$ 有 $r(Z\cup\{e\})=r(Z)=r(Z_0)=|Z_0|$

若有 $r(Y\cup\{e\})>r(Y)=r(Y_0)\Longrightarrow r(Y\cup\{e\})=r(Y_0)+1$ 则有

$$r(Y\cup\{e\})-r(Z\cup\{e\})=r(Y_0\cup\{e\})-r(Z_0\cup\{e\})=r(Y_0)+1-r(Z_0)$$
$$=|Y_0\setminus Z_0|+1$$

但另一方面有 $r(Y_0\cup\{e\})-r(Z_0\cup\{e\})\leq|Y_0\cup\{e\}\setminus Z_0\cup\{e\}|=|Y_0\setminus Z_0|$

故得矛盾 从而有 $r(Y\cup\{e\})=r(Y)$

由上述性质可以得到另一等价的定义:

[定理1.1] $M=(E,r)$ 是一拟阵 $\Longleftrightarrow$ r 是 $F(E)$ 上的非负在数函数,并且满足

(I.1′) $\forall S\subseteq E\Longrightarrow r(S)\leq|S|$

(I.2′) $\forall S,S'\subseteq E$,若 $S\subseteq S'\Longrightarrow r(S')\geq r(S)$

(I.3′) $\forall S,S'\subseteq E\Longrightarrow r(S\cup S')+r(S\cap S')\leq r(S)+r(S')$

证明:设 $M=(E,r)$ 为拟阵,显然 r 是 $F(E)$ 上的非负在数函数。而(I.1′)和(I.2′)就是性质(1)和(3).我们利用性质(5)来证明(I.3′)。设 $X=S\cup S'$ $Y=S'$ 而 $Z=S\cap S'$

因 $r(Y)+r(S\cap S')=r(S')+r(Z)$

由性质(5)知,对任意 $e\in X\setminus Y$ 有 $r(Y\cup\{e\})\leq r(Z\cup\{e\})$,因此

我们可以重复的应用性质(5)来增加Y和Z，一直到Z增至为S而Y为$S\cup S'$为止，此时就有不等式

$$r(S\cup S')+r(S\cap S')\leq r(S')+r(S)$$

现在证明其充分性，由于r为非负整数函数，和(1.1′)知$r(\phi)=0$。在(1.2′)中取$S'=S\cup\{e\}$，则有$r(S\cup\{e\})-r(S)\geq 0$。另一方面在(1.3′)中，令$S'=\{e\}$ 有$r(S\cup\{e\})\leq r(S)+r(e)\leq r(S)+1$，即$r(S\cup\{e\})-r(S)\leq 1$ 从而有$r(S\cup\{e\})-r(S)\in\{0,1\}$

令$S_1=S\cup\{e_1\}$，$S_2=S\cup\{e_2\}$，由(1.3′) 得

$$r(S\cup\{e_1,e_2\})+r(S)\leq r(S\cup\{e_1\})+r(S\cup\{e_2\})$$

因$r(S\cup\{e_1\})=r(S\cup\{e_2\})=r(S)\Longrightarrow r(S\cup\{e_1,e_2\})\leq r(S)$，另一方面由(1.2′)知$r(S\cup\{e_1,e_2\})\geq r(S)$，从而有$r(S\cup\{e_1,e_2\})=r(S)$ 这就证明了 $M=(E,r)$ 是一拟阵。

推论：设$M=(E,r)$是一拟阵，$\forall S\subseteq E$，若$r(S)=|S|$，则$\forall S'\subseteq S$，有$r(S')=|S'|$

证明：若结论不成立，则有$r(S')<|S'|$，因

$$r(S\setminus S')\leq|S\setminus S'|=|S|-|S'|<|S|-r(S')$$ 从而有

$$r(S')+r(S\setminus S')<|S|$$

另一方面由(1.3′)有$r(S')+r(S\setminus S')\geq r(S)=|S|$，故产生矛盾，所以有$r(S')=|S'|$

例1. 设R^m为m维实向量空间，E为R^m中的有限个向量的非空集合，对$\forall S\subseteq E$，定义：

$r(S)$=向量组S所张成的空间维数，则$M=(E,r)$为拟阵

§2、独立集公理系统

在独立集的公理系统中，也有两个等价性的定义.

[定义2] 令E是有限个元素的集合，$\mathcal{I}$是E的一个子集簇。若它满足

(Ⅱ.1) $\phi\in\mathcal{I}$，若 $S\in\mathcal{I}$，则 $\forall S'\subseteq S$ 有 $S'\in\mathcal{I}$

(Ⅱ.2) $\forall S,S'\in\mathcal{I}$，若 $|S|>|S'|$，则存在 $e\in S\setminus S'$，使 $S'\cup\{e\}\in\mathcal{I}$

则称 $M=(E,\mathcal{I})$ 为拟阵. $\mathcal{I}$ 为独立集簇，$\mathcal{I}$ 中的元素称为独立集。

又当 $\forall e\in E$ 有 $e\in\mathcal{I}$ 时，则称M为正态的。

由拟阵的这个定义，我们可以导出拟阵的下述性质:

[推论1]: 设 $M=(E,\mathcal{I})$ 是拟阵，$S\subseteq E$，令

$$\mathcal{D}=\{I \mid I\in\mathcal{I}\quad I\subseteq S \text{ 且 } \forall e\in S\setminus I \text{ 有 } I\cup\{e\}\notin\mathcal{I}\}$$

则任意 $I_1,I_2\in\mathcal{D}$ 有 $|I_1|=|I_2|$，并称 $\mathcal{D}$ 中之素为S的极大独立集。

证明: 若 $I_1,I_2\in\mathcal{D}$ 有 $|I_1|>|I_2|$，则由(Ⅱ.2)知，存在 $e\in I_1\setminus I_2$，使 $I_2\cup\{e\}\in\mathcal{I}$，这与 $I_2\in\mathcal{D}$ 相矛盾.

由上述推论，我们可以导出独立集公理系统中，拟阵的另一等价的定义:

[定理1.2] $M=(E,\mathcal{I})$ 是一拟阵 $\Longleftrightarrow$ 子集簇 $\mathcal{I}$ 满足

(Ⅱ.1) $\phi\in\mathcal{I}$，若 $S\in\mathcal{I}$ 则 $\forall S'\subseteq S$ 有 $S'\in\mathcal{I}$

(Ⅱ.2) $\forall S\subseteq E$ S的所有极大独立集所含元素个数相等。

证明：$\Longrightarrow$ 由推论可得。

$\Longleftarrow$：我们现在由（Ⅱ.1）和（Ⅱ.2'）来导出（Ⅱ.2）

设：$S, S' \in \mathcal{I}$，令 $\tilde{S} = S \cup S'$ 并设 $|S| > |S'|$，因 $\tilde{S}$ 的极大独立集有相等个数的元素．设 $\tilde{S}$ 的极大独立集为 I，显然有 $|I| \geqslant |S| > |S'|$．若对 $\forall e \in S \setminus S'$ 有 $S' \cup \{e\} \notin \mathcal{I}$，则 S' 为 $\tilde{S}$ 的极大独立集，但 $|S'| < |I|$ 这与假设矛盾。因此，必存在 $e \in S \setminus S'$，使 $S' \cup \{e\} \in \mathcal{I}$

［推论2］设 $I \in \mathcal{I}$，$S \subseteq E$，且 $I \subseteq S$，则必存在 S 的一个极大独立集 I'，使 $I \subseteq I' \in \mathcal{I}$．

例2：设 A 是实数域上的 $m \times n$ 的矩阵，用 e_i 表示 A 的第 i 列，即 $A = \{e_1, e_2 \cdots\cdots e_n\}$　　令 $E = \{e_1, e_2 \cdots\cdots e_n\}$ 我们定义 E 的子集族 $\mathcal{I}$ 如下：

$$I \in \mathcal{I} \Longleftrightarrow I \subseteq E，且 I 中的向量线性无关．则$$

$M = (E, \mathcal{I})$ 是拟阵．

§3．基的公理系统：

［定义3］设 E 是有限元素的集合，$\mathbb{B}$ 是 E 的一个子集族，若它满足：

（Ⅲ.1）$\forall S, S' \in E$，若 $S \subset S'$ 而 $S' \in \mathbb{B}$ 则 $S \notin \mathbb{B}$

（Ⅲ.2）$\forall B_1, B_2 \in \mathbb{B}$，$\forall e \in B_1$ 则存在 $e' \in B_2$ 使得

$$(B_1 \setminus \{e\}) \cup \{e'\} \in \mathbb{B}$$

则称 $M = (E, \mathbb{B})$ 是一拟阵，$\mathbb{B}$ 中的元素称为 M 的基．而 $\mathbb{B}$ 称

为基的簇。

又若 $\forall e \in E$，$\mathbb{B}$ 中就存在基 B，使 $e \in B$，则称 M 为正态的。

由上述定义，可以得到如下的结论：

[推论1] 设 $M=(E,\mathbb{B})$ 为拟阵，则 $\forall B_1, B_2 \in \mathbb{B}$ 有

$$|B_1|=|B_2|.$$

证明：由(Ⅲ.1)知若 $B_1 \neq B_2$，则 $B_1 \setminus B_2 \neq \phi$，$B_2 \setminus B_1 \neq \phi$

令 $e \in B_1 \setminus B_2$ 由(Ⅲ.2)知存在 $e' \in B_2$ 使得 $B_1'=(B_1\setminus\{e\})\cup\{e'\}\in\mathbb{B}$

若 $B_1' \subseteq B_2$，则由(Ⅲ.1)推得 $B_1'=B_2$，否则以 B_1' 替换 B_1 重复上述过程，直到 $B_1'=B_2$ 为止。但因 $|B_1|\geqslant|B_1'|=|B_2|$，同理可证 $|B_2|\geqslant|B_1|$，因此有 $|B_1|=|B_2|$

[推论2.] 设 $M=(E,\mathbb{B})$ 是一拟阵，则 $\forall e \in B_1\setminus B_2$ 存在 $e' \in B_2 \setminus B_1$ 使 $(B_1\setminus\{e\})\cup\{e'\}\in\mathbb{B}$.

证明：按(Ⅲ.2) $\forall e \in B_1 \setminus B_2$ 存在 $e' \in B_2$，使 $(B_1\setminus\{e\})\cup\{e'\}\in\mathbb{B}$

若 $e' \in B_1$，则 $(B_1\setminus\{e\})\cup\{e'\}=B_1\setminus\{e\}$，从而 $|(B_1\setminus\{e\})\cup\{e'\}|<|B_1|$.

这与 $(B_1\setminus\{e\})\cup\{e'\}\in\mathbb{B}$ 矛盾。

例3. 设 $G=(X,E)$ 是一联通图，E 为 G 的边的集合，令 $\mathbb{B}$ 是 G 的所有支撑树的集合，则 $M=(E,\mathbb{B})$ 是拟阵。

§4. 圈的公理系统

[定义4] 设 E 为有限个元素的集合，$\mathbb{C}$ 是 E 的一个子集簇，若它满足：

(Ⅳ.1) $\phi \notin \mathbb{C}$，$\forall C, C' \in \mathbb{C}$．若 $C \subseteq C'$ 则 $C = C'$

(Ⅳ.2) $\forall C, C' \in \mathbb{C}$．若 $C \neq C'$，且 $e \in C \cap C'$ 则存在 $C'' \in \mathbb{C}$

使得 $C'' \subseteq (C \cup C') \setminus \{e\}$

则称 $M = (E, \mathbb{C})$ 为拟阵，$\mathbb{C}$ 中的元素称为 M 的圈．又若 $\forall C \in \mathbb{C}$ 有 $|C| \geqslant 2$，则称 M 为正态的．

例4．设 $G = (X, E)$ 是一图，$\mathbb{C}$ 为 G 的所有初级圈的集合，则 $M = (E, \mathbb{C})$ 为一拟阵．

§5．支撑集公理系统

[定义5] 设 E 是有限个元素的集合，φ 是 $F(E) \to F(E)$ 的映象，若它满足．

(Ⅴ.1) $\forall S \subseteq E$，$\varphi(S) = \overline{S}$ $\overline{S} \subseteq E$ 且 $S \subseteq \overline{S}$

(Ⅴ.2) $\forall S, S' \subseteq E$ 若 $S \subseteq S'$ 则 $\overline{S} \subseteq \overline{S'}$

(Ⅴ.3) $\forall S \subseteq E$，$e, e' \in E$ 若 $e \notin \overline{S}$ 而 $e \in \overline{S \cup \{e'\}}$ 则有

$e' \in \overline{S \cup \{e\}}$

则称 $M = (E, \varphi)$ 为一拟阵，φ 称为支撑映象，$\overline{S}$ 称为 S 的闭包．

又若 $\overline{\phi} = \phi$ 则称 M 为正态的．

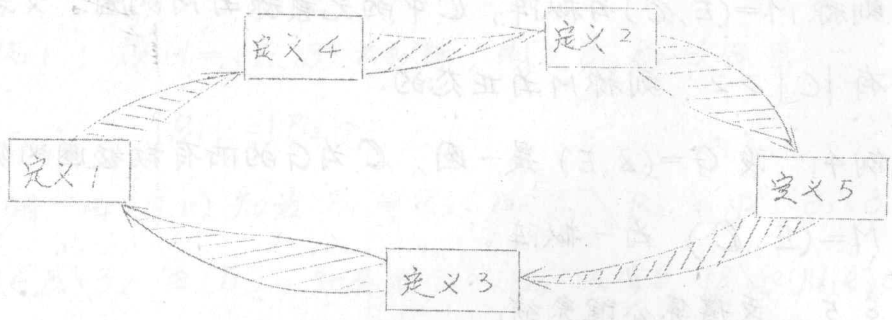
例5．在例2中，定义 φ 加下：$\forall S \subseteq E$

$\varphi(S) = \overline{S}$，$\overline{S}$ 是 E 中能够用 S 中列向量线性表示的一切列的集合．则 $M = (E, \varphi)$ 为拟阵．

§6．定义的等价性

这一节里，我们来证明上述五个定义的等价性。也就是说，当给定一个拟阵（如 $M=(E,\mathcal{I})$），我们就能够道出（$\mathcal{I}$，$\mathcal{B}$，$\mathcal{C}$ 和 φ）其它四个定义所确定的拟阵。

为了证明简单起见，我们采取了下述证明方式：



［主要定理］上述拟阵的五个定义是相互等价的。

证明：

1. 定义1 $\Longrightarrow$ 定义4：

给定拟阵 $M=(E,r)$，定义 E 的子集族 $\mathcal{C}$ 如下：

$$\mathcal{C}=\{C \mid C\subseteq E,\ r(C)=|C|-1,\ \text{且}\ \forall e\in C\ \text{有}\ r(C\setminus\{e\})=|C|-1\}$$

我们来证明，这样定义的 $\mathcal{C}$ 满足定义4。

显然 $\phi\notin\mathcal{C}$，设 $C, C'\in\mathcal{C}$，若 $C\subset C'$，令 $e\in C'\setminus C$，按定义 $r(C'\setminus\{e\})=|C'|-1$，由定理1推论知 $C\subseteq C'\setminus\{e\}$，因此，$r(C)=|C|$，这与 $C\in\mathcal{C}$ 矛盾。所以 $C\not\subset C'$，这就证明了(Ⅳ.1)成立。

设 $C, C'\in\mathcal{C}$ 且 $C\neq C'$，那么由定理1推论知，

$r(C\cap C')=|C\cap C'|$，令 $e\in C\cap C'$，则有

$r((C\cup C')\setminus\{e\})\leq r(C\cup C')\leq r(C)+r(C')-r(C\cap C')$

$=|C|+|C'|-2-|C\cap C'|$

$=|C\cup C'|-2<|C\cup C'|-1$

令 $\mathscr{D}=\{S \mid S\subseteq (C\cup C')\setminus\{e\}$ 且 $r(S)=|S|-1\}$

显然 $\mathscr{D}\neq\phi$ 设 C'' 满足

$$|C''|=\min_{S\in\mathscr{D}}|S|$$

则 $C''\in\mathbb{C}$.

显然 $r(C'')=|C''|-1$. $\forall e'\in C''$ 若 $r(C''\setminus\{e'\})=|C''|-2$ 则 $C''\setminus\{e'\}\in\mathscr{D}$,这与 $|C''|$ 为 $\mathscr{D}$ 中极小矛盾. 从而有 $\forall e'\in C''$ $r(C''\setminus\{e'\})=|C''|-1$. 按定义 $C''\in C$ 且 $C''\subseteq(C\cup C')\setminus\{e\}$. 因此(Ⅳ.2)成立. i.e $M=(E,\mathbb{C})$ 为拟阵。

2. 定义4 $\Longrightarrow$ 定义2

给定拟阵 $M=(E,\mathbb{C})$ 定义E的子集簇

$$\mathscr{I}=\{I \mid I\subseteq E \text{ 且 } \forall C\in\mathbb{C}\ \ C\not\subseteq I\}$$

按定义显然有 $\phi\in\mathscr{I}$, 且 $\forall I\in\mathscr{I}$ $I'\subseteq I$, 有 $I'\in\mathscr{I}$, 为了证明(Ⅱ.2), 我们先证明下述结论:

$\forall I\in\mathscr{I}$ $e\in E$, 若 $I\cup\{e\}\notin\mathscr{I}$, 则 $I\cup\{e\}$ 包含唯一一个圈C.

若不然,设 $I\cup\{e\}$ 包含两个不同的圈 C_1 和 C_2,因 $C_1\neq C_2$ $e\in C_1\cap C_2$ 由(Ⅳ2)知, 存在 $C''\subseteq(C_1\cup C_2)\setminus\{e\}$, 从而 $C''\subseteq I$ 这与 $I\in\mathscr{I}$ 矛盾, 这就证明了 $I\cup\{e\}$ 包含唯一一个圈。

设 $I_1, I_2\in\mathscr{I}$, 且 $|I_1|>|I_2|$,要证明存在 $e\in I_1\setminus I_2$, 使

$I_2\cup\{e\}\in\mathcal{I}$，只要证明

$\mathcal{D}=\{I \mid I\in\mathcal{I},\ |I|<|I_1|$ 且 $\forall e\in I_1\setminus I\quad I\cup\{e\}\notin\mathcal{I}\}$ 为空集即可.

若 $\mathcal{D}\neq\Phi$，取 I_0 满足

$$|I_0\cap I_1| = \max_{I\in\mathcal{D}} |I\cap I_1|$$

设 $e\in I_1\setminus I_0$ 由 $I_0\cup\{e\}\notin\mathcal{I}$，则存在唯一一个圈 $C_0\subseteq I_0\cup\{e\}$，显然 $C_0\cap(I_0\setminus I_1)\neq\Phi$，否则 $C_0\subseteq I_1$，这与 $I_1\in\mathcal{I}$ 矛盾. 设 $\tilde{e}\in C_0\cap(I_0\setminus I_1)$ 显然 $\tilde{e}\neq e$. 我们断言 $(I_0\cup\{e\})\setminus\{\tilde{e}\}\in\mathcal{I}$. 因若不然，则必存在圈 C 使得 $C\subseteq(I_0\cup\{e\})\setminus\{\tilde{e}\}$，同 $\tilde{e}\in C_0$ 而 $\tilde{e}\notin C$，$e\in C_0\cap C$ 那么由 (Ⅳ.2) 知存在 $C''\subseteq(C\cup C_0)\setminus\{e\}\subseteq I_0$，这与 $I_0\in\mathcal{I}$ 矛盾. 从而证明了 $(I_0\cup\{e\})\setminus\{\tilde{e}\}\in\mathcal{I}$

因 $|(I_0\cup\{e\})\setminus\{\tilde{e}\}|=|I_0|<|I_1|$，但 $|\{(I_0\cup\{e\})\setminus\{\tilde{e}\}\}\cap I_1|>|I_0\cap I_1|$ 故 $(I_0\cup\{e\})\setminus\{\tilde{e}\}\notin\mathcal{D}$，否则与 I_0 的假设矛盾。因此，存在 $e^*\in I_1\setminus I'$，其中 $I'=(I_0\cup\{e\})\setminus\{\tilde{e}\}$，使得 $I'\cup\{e^*\}\in\mathcal{I}$. 因 $I'\cup\{e^*\}\cup\{\tilde{e}\}=I_0\cup\{e\}\cup\{e^*\}$ 最多含有一个圈，但 $I_0\cup\{e\}\supseteq C_0$. 这就意味着 $e^*\notin C_0$，那么 $I_0\cup\{e^*\}$ 就不包含圈，即 $I_0\cup\{e^*\}\in\mathcal{I}$ 这与 $I_0\in\mathcal{D}$ 矛盾。故必有 $\mathcal{D}=\Phi$.

3. 定义2 $\Longrightarrow$ 定义5：

设 $M=(E,\mathcal{I})$ 是一拟阵，对 $\forall S\subseteq E$，定义支撑映象 φ：

$$\varphi(S)=S\cup\{e\mid e\in E,\ I\cup\{e\}\notin\mathcal{I}\}=\bar{S}$$

其中 I 为 S 的极大独立集.

显然，$S\subseteq\bar{S}$. 因 I 为 S 的极大独立集，由 φ 定义立即可得 $\bar{I}=\bar{S}$，由 $\bar{S}$ 的定义知 I 也是 $\bar{S}$ 的极大独立集，从而有 $\bar{I}=\bar{\bar{S}}$，这就推得 $\bar{\bar{S}}=\bar{S}$. 因此，若 $S\subseteq S'$，就有 $\bar{S}\subseteq\bar{S'}=\bar{S'}$. 这就证明了 φ 满足（Ⅳ.1）和（Ⅳ.2）。下面我们来证 φ 也满（Ⅳ.3）.

设 I 为 S 的极大独立集，则 $\bar{I}=\bar{S}$，若 $e\notin\bar{S}$ 而 $e\in\overline{S\cup\{e'\}}$，i.e. $\bar{I}\neq\overline{S\cup\{e'\}}$，因此 I 不是 $S\cup\{e'\}$ 的极大独立集，可以证明 $I\cup\{e'\}$ 是 $S\cup\{e'\}$ 的极大独立集。因此 $e\in\overline{S\cup\{e'\}}=\overline{I\cup\{e'\}}$，因 $e\notin I$，$e\notin\bar{S}$，故按 φ 的定义 $I\cup\{e'\}\cup\{e\}\notin\mathcal{I}$，而 $I\cup\{e\}\in\mathcal{I}$. 这就意味着 $e'\in\overline{I\cup\{e\}}\subseteq\overline{S\cup\{e\}}$，i.e. 满足(Ⅳ.3)，从而 $M=(E,\varphi)$ 也是拟阵。

4. 定义5 $\Longrightarrow$ 定义3

设 $M=(E,\varphi)$ 为拟阵，定义 E 的子集簇 $\mathcal{B}$ 如下：

$$\mathcal{B}=\{B\mid B\subseteq E,\ \bar{B}=E,\ \forall e\in B \text{ 有 } \overline{B\setminus\{e\}}\neq E\}$$

设 B_1，$B_2\in\mathcal{B}$. 若 $B_1\subseteq B_2$，则 $B_1=B_2$. 若不然 $B_1\subset B_2$，设 $e\in B_2\setminus B_1$，则 $B_1\subset B_2\setminus\{e\}$. 因 $E=\bar{B_1}\subseteq\overline{B_2\setminus\{e\}}$，从而 $\overline{B_2\setminus\{e\}}=E$. 这与 $B_2\in\mathcal{B}$ 矛盾. 因此 $B_1=B_2$，这就意味着 $\forall S\subset B_2$ 就有 $S\notin\mathcal{B}$

设 B_1, $B_2\in\mathcal{B}$, $\forall e\in B_1$，则有 $B_2\setminus\overline{(B_1\setminus\{e\})}\neq\phi$

设 $e'\in B_2\setminus\overline{(B_1\setminus\{e\})}$ 因 $e'\notin\overline{B_1\setminus\{e\}}$ 而 $e'\in\overline{B_1}$ 由(V.3)知 $e\in\overline{(B_1\setminus\{e\})\cup\{e'\}}$，从而 $B_1\subseteq\overline{(B_1\setminus\{e\})\cup\{e'\}}$, i.e. $\overline{(B_1\setminus\{e\})\cup\{e'\}}=E$，我们只要证明 $\forall\tilde{e}\in(B_1\setminus\{e\})\cup\{e'\}$ 有 $\overline{\{(B_1\setminus\{e\})\cup\{e'\}\}\setminus\{\tilde{e}\}}\neq E$ 即可. 假如不然，则存在 $\phi\neq S\subset B_1\setminus\{e\}$ 使得

$\overline{(B_1\setminus(S\cup\{e\}))\cup\{e'\}}=E$ 而 $\forall\tilde{e}\in\{(B_1\setminus S\cup\{e\})\cup\{e'\}\}$ 有 $\overline{\{(B_1\setminus S\cup\{e\})\cup\{e'\}\}\setminus\{\tilde{e}\}}\neq E$，令 $B'=(B_1\setminus S\cup\{e\})\cup\{e'\}$，那么 $B'\in\mathbb{B}$ 若 $B'\neq B_2$ 则以 B' 代替 B_1 重复上述过程，直至有 $B'\subseteq B_2$ 为止. 因 $S\neq\phi$，那么 $|B_1|>|B'|$ 又因 $B'\in\mathbb{B}$，故有 $B'=B_2$ i.e. $|B_1|>|B_2|$。

交换 B_1 与 B_2 的位置，然后重复上述过程，则可得 $|B_2|\geq|B_1|$ 从而产生矛盾。因此 $S=\phi$. 这就证明了 $(B_1\setminus\{e\})\cup\{e'\}\in\mathbb{B}$. 即(Ⅲ.2)成立。$M=(E,\mathbb{B})$ 是拟阵.

5. 定义3 $\Longrightarrow$ 定义1

设 $M=(E,\mathbb{B})$ 是一拟阵 对 $\forall S\subseteq E$，定义

$$r(S)=\max_{B\in\mathbb{B}}|S\cap B|$$

显然有 $r(\phi)=0$，而 $\forall S\subseteq E$，$e\in E$ 有 $r(S\cup\{e\})\geq r(S)$ 且 $r(S\cup\{e\})\leq r(S)+1$ ie $r(S\cup\{e\})-r(S)\in\{0,1\}$

$\forall S\subseteq E$, $e_1,e_2\in E$ 设 $r(S\cup\{e_1\})=r(S\cup\{e_2\})=r(S)$，因 $r(S\cup\{e_1,e_2\})-r(S\cup\{e_1\})\in\{0,1\}$，若 $r(S\cup\{e_1,e_2\})>r(S)$，则 $r(S\cup\{e_1,e_2\})=r(S)+1$