优等生数学教程

高中第三册

（共四册）

上海十大名牌高中联编

直击名牌大学

主编■熊 斌 徐斌艳

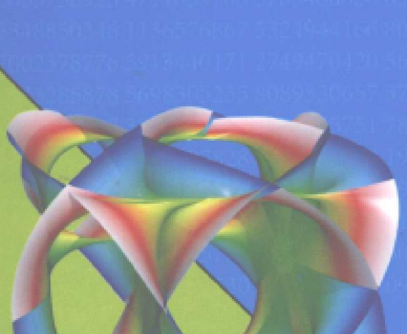
本册核心作者

况亦军（上海中学）

陈长恩（七宝中学）

田万国（建平中学）

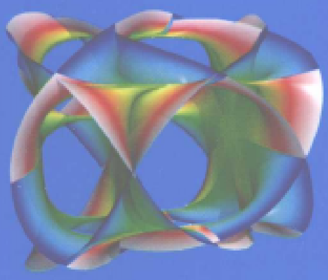
刘灿文（控江中学）



华东师范大学出版社

弦论宇宙图形

弦论（String Theory）目前是理论物理最热门的前沿研究领域，它极有可能把相对论和量子力学统一起来，形成能够解释引力、电磁力、弱力和强力这四个基本作用力的大统一理论。根据弦论，宇宙是一个10维世界，而人类只是生存于其中的四维世界（长、宽、高加上时间）中。另外六维被卷缩起来，人类无法观察到。这个卷缩的六维世界可以用微分几何中的卡拉比-丘成桐流形来描述，人们无法直观地想象它究竟是什么样子。但是，正像可以通过三维物体的平面投影或截面来了解该物体一样，我们可以通过六维世界的三维截面来理解它。左图就是弦论中看不见的六维世界在三维世界的截面。



（王善平，华东师范大学）

ISBN 978-7-5617-7011-5

9 787561 770115 >

定价：18.00元

www.ecnupress.com.cn

优等生数学

教程

高中第三册

主编■熊斌 徐斌艳

本册核心作者

况亦军（上海中学）

陈长恩（七宝中学）

田万国（建平中学）

刘灿文（控江中学）

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

优等生数学教程. 高中. 第3册/熊斌, 徐斌艳主编. 上海: 华东师范大学出版社, 2009
(优等生数学)
ISBN 978-7-5617-7011-5

Ⅰ.优… Ⅱ.①熊…②徐… Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第047906号

优等生数学教程

高中第三册

主　　编　熊　斌　徐斌艳
策　　划　倪　明(数学工作室)
组　　稿　倪　明　任念兵
审读编辑　徐慧平
装帧设计　卢晓红

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路3663号　邮编200062
电话总机　021-62450163转各部门　行政传真021-62572105
客服电话　021-62865537(兼传真)
门市(邮购)电话　021-62869887
门市地址　上海市中山北路3663号华东师范大学校内先锋路口
网　　址　www.ecnupress.com.cn

印 刷 者　江苏省句容排印厂
开　　本　787×1092　16开
插　　页　1
印　　张　10.5
字　　数　187千字
版　　次　2009年6月第一版
印　　次　2009年6月第一次
印　　数　11000
书　　号　ISBN 978-7-5617-7011-5/G·3933
定　　价　18.00元

出 版 人　朱杰人

(如发现本版图书有印订质量问题，请寄回本社客服中心调换或电话021-62865537联系)

我们的作者团队

主编

▶▶**熊斌**　魁梧而温和，有极好的合作精神。作为智优教育专家，在青年学生中的知名度是以时间为自变量单调递增的指数函数。日常喜欢做题，擅长解难题，又是高产者，成为多项数学竞赛命题委员会的不动点。多次带领中国学生参加IMO获得团体第一，为国争得荣誉。著作以百为单位，他的不少著作成为畅销书，并且是学生阅读的经典。

▶▶**徐斌艳**　貌似大学生，却是n名博士、m名硕士的导师了。这一反差成为单调递增函数的一个反例。现为教科院副院长的她，学术生涯从德国奥斯纳布吕克大学从事数学学习的认知结构差异的研究起步。如今承担了国际视野下学生数学素养研究等国家项目，成为我国数学教育研究的中坚力量。著作等身。兼任中国数学会理事，入选2007年度教育部“新世纪优秀人才支持计划”。

核心作者

（按姓氏音序排列）

曹建华（交大附中）
陈双双（华东师大二附中）
况亦军（上海中学）
刘寅（复兴高级中学）
刘云（复旦附中）
田万国（建平中学）
许敏（控江中学）
杨岚清（大同中学）
张雄（延安中学）
朱永庆（七宝中学）

本册核心作者

▶▶况亦军　平常言语不多，但往往一鸣惊人，这似乎是优秀的数学人的共同特征。上数学课时最喜欢问的问题是：“这是什么东西？”用这样的问题来引导学生思考从怎样的数学概念出发探究发现解决问题的方法。他觉得，“出乎意料之外，却在情理之中”的数学问题是对于学生最具有启迪思维价值的学习素材。这位有着20多年教龄的数学教师，现为上海中学数学教研组组长，曾教过数学班、物理班、化学班、文科班、全男（生）班，全女班……经历是那样的丰富多彩。10多年前，上海市园丁奖榜上有名，2005年被确定为上海市普教系统名师后备人选。他主编的《多功能题典·高中数学》是极有特色的畅销书。

▶▶陈长恩　细腻、平和而不失洒脱是他的个性魅力，在教学中转化为与学生交流的亲和力；严谨、缜密是他的思维习惯，显示了数学教师的优秀素养；积极、合作、高效是他的工作方式，带出了一支能打硬仗的团队。这位七宝中学数学特级教师、区优秀教师，把课堂看作思维的沃土、“思考秀”的舞台。他善于运用多媒体辅助教学，承担过国家级课题《电化教育促进中小学教学优化》的研究，现参与国家科委863高技术项目《多媒体智能应用软件系统》课题，教学技术的使用显得游刃有余。平时，他经常问学生的问题是：“你们说这道题难不难?”这是他的教学风格，更体现了以学生为本的教育理念。

▶▶田万国　一口标准的普通话，说话温文尔雅，表达简洁准确，是名校名师的典型代表。华东师范大学数学系学科教学论专业硕士研究生毕业后即到上海市建平中学任教，已有近20年的教龄。本着数学是“教会年轻人思考”的科学这样的理念，从一名普通的教师，到数学教研组长，现为课程处副主任，一步一个脚印，踏踏实实。数学竞赛是他研究生时期的研究方向，尖子生培养是他的擅长之处，因而兼任上海市中学生业余数学学校教练员，成为中国数学奥林匹克高级教练员，都显得水到渠成。2006年被确定为上海市普教系统名师培养杨浦基地学员。著述颇多。

▶▶刘灿文　一位很年轻的数学老师，在华东师大获得硕士学位后，来到控江中学任教。有学生这样评价他，“很有趣的老师啊，挺受欢迎的”，这是教师成功的一个标志。“让每位学生都喜欢听我的每一堂课”是他的座右铭。在概念课中，他善于提出启发性的、触及概念本质的问题来激发学生的积极性；在习题课中，他会充分利用一些具有思考价值的好问题来拓宽学生的思维空间，从横向类比到纵向推广，通过一题多变让学生体会解题方法的实质，并以此培养学生思维的缜密性。另外，他的竞赛辅导工作也渐入佳境，所辅导的学生，不仅在上海市的竞赛中，而且在全国联赛中也取得了优异的成绩。

前　言

亲爱的同学，如果你是一位优秀、好学、勤奋、热爱数学的学生，在学习现有教材的同时，你一定渴望有挑战自己智力又充满探究情趣的课程内容。满足你的需要是我们的义务和责任，为提高你的数学思维能力，开发你学习数学的潜力，我们组织编写了《优等生数学教程》。希望这套教程能帮助你尽快成为一名优等生。

在21世纪的钟声敲响之时，我国迎来了新一轮的数学课程改革，它首先体现在课程和教材的多样化和多元化。新一轮的课程改革鼓励我们为学有余力、学有特长的学生设计、开发专门的校本课程，让那些学生在打好扎实基础的同时，能寻找到适合他们智力水平发展的课程内容，学习到满足他们学习需求的数学内容和思想方法，作为数学教育工作者，我们应义不容辞地承担起这一任务。

在策划编写这套教程的过程中，我们特别邀请了熟悉数学课程改革目标、具有丰富教学经验、又具有较高数学专业水平的优秀教师直接参与。我们与这些优秀的编写者汇聚在一起，认真解读数学课程标准的要求，结合数学教学内容的实际需求，尤其是系统分析优秀学生的学习特点，设计出了富有特色的教程结构，然后大家通力合作、沟通协商，充分发挥自己的智慧，编写出这套教程。

这套教程包括如下几个栏目：

知识要点：为你梳理本单元涉及的知识重点和难点，提供一个知识网络。

典型例题：为你提供有代表性的数学例题，并且利用“解题指要”点拨解决每个例题的关键步骤和所包含的数学思想方法。

寻根问底：为你解答知识要点的来龙去脉，介绍相关的知识背景。

举一反三：为你提供巩固型的例题，加深对问题的理解，提高解题技能。

融会贯通：为你创设问题情境，让你充分发挥对知识的理解。

参考答案：提供解题的线索或者答案，帮助你进行学习的自我评价。

本章回顾：再次帮助你梳理所经历的概念性知识和应用性知识。

根据目前的教学情况，我们将高中的《优等生数学教程》分成四册。同时，我们还配套设计了《优等生数学习题集》，这是一个精心筛选后形成的习题库，每道习题的解答一方面检验你对数学知识的掌握程度，另一方面检验你对习题背后所涉及的思想方法的理解程度。这也是一本很适合你静静阅读、深入思考以及充分练习的"习题集"。与教程结合使用，才能达到预期的效果。

本书是这套教程中的高中第三册，适合上海市高中二年级的学生使用，其内容包括坐标平面上的直线、二次曲线、参数方程和极坐标方程、复数等四章。第十一章由上海中学的况亦军老师编写；第十二章由七宝中学的陈长恩和朱永庆老师编写；第十三章由建平中学的田万国老师编写；第十四章由控江中学的刘灿文和许敏老师编写。

对我们而言，编写主要供优等生使用的教程是一次尝试，定有不足之处，欢迎提出批评和建议，以便日臻完善。

熊　斌　徐斌艳

2009.5

目录_Contents

第11章 坐标平面上的直线

在学习一次函数的过程中，我们已经知道，一次函数的图象是直角坐标平面上的一条直线，也就是说，我们可以用一个代数式来表示一条直线，由此，我们获得了一个十分重要的启示，也许可以用方程来代表一条曲线. 将一次函数 $y = kx + b$ 写成 $kx - y + b = 0$ 的形式，便是用二元一次方程表示一种最为特殊的曲线——直线.

利用代数式的运算规则，我们可以对方程式进行变形，可以求它的解. 经过长期的研究，人们发现，二元一次方程的许多代数性质，确实是对它所描述的几何对象——直线的性质的刻画. 直线的倾斜程度，两直线的平行、垂直、相交等位置关系，以及两直线的夹角，点到直线的距离，平行线之间的距离等对于直线性质的定量描述，都可以通过直线方程比较方便地实现.

对于直线方程的研究，引领我们探索一种研究几何问题的新方法，即利用代数手段来研究几何图形的性质，从而了解一个十分重要的数学分支——解析几何.

11.1 直线的方程

平面几何知识指出，两点确定一直线. 而向量知识告诉我们，向量是刻画方向的工具. 如果一个动点与一个定点确定的向量与一个已知向量平行，那么，我们可以认为，动点的轨迹是一条与已知向量平行的直线. 因此，我们可以以平行向量间的坐标关系为切入点，通过点的坐标所应当满足的条件来描述直角坐标平面上的直线.

知识要点

直线的方向向量：与直线 l 平行的非零向量 $\vec{d}=(u,\ v)$ 称为直线 l 的方向向量.

直线的点方向式方程：如果 $\vec{d}=(u,\ v)$(其中 $u\neq 0,\ v\neq 0$)是直线 l 的方向向量，且直线 l 过点 $P(x_0,\ y_0)$，则方程 $\dfrac{x-x_0}{u}=\dfrac{y-y_0}{v}$ 称为直线 l 的点方向式方程.

直线的法向量：与直线 l 垂直的非零向量 $\vec{n}=(a,\ b)$ 称为直线 l 的法向量.

直线的点法向式方程：如果 $\vec{n}=(a,\ b)$ 是直线 l 的法向量，且直线 l 过点 $P(x_0,\ y_0)$，则方程 $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$ 称为直线 l 的点法向式方程.

典型例题

例 1 求过点 $(1,\ -2)$，方向向量为 $\vec{d}=(2,\ 4)$ 的直线方程.

解 由直线的点方向式方程，有 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{4}$，即 $2x-y-4=0$.

例 2 已知直线 m 过点 $(1,\ -2)$，法向量 $\vec{n}=(5,\ 2)$，求直线 m 的方程.

解 由直线的点法向式方程，有 $5(x-1)+2(y+2)=0$，即 $5x+2y-1=0$.

例 3 已知梯形 $ABCD$, $AD \parallel BC$, 它的三个顶点为 $A(-2, 3)$, $B(-2, 1)$, $C(6, 5)$,求中位线所在直线的方程.

解 由已知得中位线的方向向量等于 $\overrightarrow{BC}=(8, 4)$, 且中位线过 AB 中点 $(-2, 2)$,于是中位线所在直线的方程为 $\dfrac{x+2}{8}=\dfrac{y-2}{4}$,即 $x-2y+6=0$.

解题指要 利用几何性质找到所求直线经过的一个定点以及它的方向向量或法向量,是求解直线方程问题的最基本的模式.

例 4 分别写出满足下列条件的直线方程:

(1) x 轴;

(2) y 轴;

(3) 过点$(1, 2)$,且与 x 轴平行;

(4) 过点$(-3, -1)$,且与 x 轴垂直;

(5) 过点$(4, 3)$,且与 y 轴平行.

解 (1) $y=0$; (2) $x=0$; (3) $y=2$; (4) $x=-3$; (5) $x=4$.

解题指要 与坐标轴垂直(平行)的直线是一类比较特殊的直线,它们的方程要给予特别的关注.

例 5 过点 $P(0, 1)$作直线 l,使它被直线 l_1: $x-3y+10=0$ 和直线 l_2: $2x+y-8=0$ 所截得的线段的中点为 P,求 l 的方程.

解 设直线 l 与直线 l_1 和直线 l_2 分别交于点 $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$,则有

$$x_A-3y_A+10=0,\ 2x_B+y_B-8=0,\text{且}\begin{cases}\dfrac{1}{2}(x_A+x_B)=0,\\ \dfrac{1}{2}(y_A+y_B)=1,\end{cases}$$

解得$\begin{cases}x_A=-4,\\ y_A=2,\end{cases}$所以直线 l 的方向向量$\overrightarrow{AP}=(4, -1)$.

所以,直线 l 的方程为 $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y-1}{-1}$,即 $x+4y-4=0$.

例 6 求证:对任意实数 m,直线 $(m-1)x+(2m-1)y=m-5$ 都过同一个点,并指出这一点的坐标.

解 由已知得 $(x+2y-1)m=x+y-5$ 对任意的 $m\in\mathbf{R}$ 均成立,则

$\begin{cases} x+2y-1=0, \\ x+y-5=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=9, \\ y=-4, \end{cases}$ 即对任意的 $m \in \mathbf{R}$，该直线都过点 $(9,\ -4)$.

举一反三

1 过点 $(2,\ 3)$，方向向量为 $\vec{d}=(4,\ 7)$ 的直线方程是________.

2 已知直线 m 过点 $(2,\ 3)$，法向量 $\vec{n}=(8,\ 9)$，直线 m 的方程是________________.

3 已知直线 $y=kx+b$ 上两点 P，Q 的横坐标分别为 x_1，x_2，则 $|PQ|$ 为(　　).

(A) $|x_1-x_2|\sqrt{1+k^2}$　　(B) $|(x_1-x_2)k|$

(C) $\dfrac{|x_1-x_2|}{\sqrt{1+k^2}}$　　(D) $\dfrac{|x_1-x_2|}{|k|}$

4 若直线 $ax-y=a-1$，$ay-x=2a$ 相交，且交点在第二象限，则 a 的取值范围是________.

融会贯通

5 直线 l 过点 $(2,\ 3)$，它的法向量是直线 $x-y=0$ 的方向向量，求直线 l 的方程.

11.2 直线的倾斜角和斜率

在研究一次函数 $f(x)=kx+b$ 的性质时，我们知道，若 $k>0$，则此函数在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，若 $k<0$，则此函数在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减，那么，为什么会有这样的结果？对比 b 是直线在 y 轴上的截距(即直线与 y 轴交点的纵坐标)的几何意义，k 是否也是直线的某种几何性质的代数表现？在此，我们将以直线的倾斜角和斜率来论述 k 的值与直线的"走向"以及一次函数单调性的联系.

知识要点

直线的倾斜角：如果直线 l 与 x 轴相交于点 M，将 x 轴绕点 M 按逆时针方向旋转到与直线 l 重合时所形成的最小正角 α 称为直线 l 的倾斜角；如果直线 l 与 x 轴平行或重合，则规定其倾斜角 $\alpha=0$. 直线的倾斜角 α 的取值范围是 $0\leqslant\alpha<\pi$.

直线的斜率：如果直线 l 的倾斜角 $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$，则 $k=\tan\alpha$ 称为直线 l 的斜率；如果直线的倾斜角 $\alpha=\frac{\pi}{2}$，则此直线的斜率不存在(或称直线的斜率趋于无穷大).

直线的点斜式方程：如果直线 l 过点 $P(x_0,y_0)$，斜率是 k，则称方程 $y-y_0=k(x-x_0)$ 为直线 l 的点斜式方程.

直线的斜截式方程：方程 $y=kx+b$ 称为直线的斜截式方程，其中 k 是直线的斜率，b 是直线在 y 轴上的截距(若直线与 y 轴相交于点 $(0,b)$，称 b 为直线在 y 轴上的截距).

直线的两点式方程：若直线 l 过点 $P_1(x_1,y_1)$ 和点 $P_2(x_2,y_2)$，则称方程 $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ 为直线 l 的两点式方程.

直线的截距式方程：若直线 l 在 x 轴和 y 轴上的截距分别为 a 和 b(即直线 l 与 x 轴和 y 轴分别相交于点 $(a,0)$ 和 $(0,b)$)，如果 $ab\neq0$，则称方程 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 为直线 l 的截距式方程.

直线的一般式方程：方程 $Ax+By+C=0$ (其中 A，B 不同时为零)称为直线的一般式方程.

典型例题

例 1 若直线 m 过点 A、B,求直线 m 的倾斜角.

(1) $A(1,\ 2)$, $B(3,\ 4)$;

(2) $A(3,\ 6)$, $B(7,\ 14)$;

(3) $A(0,\ 3)$, $B(2,\ \sqrt{2})$;

(4) $A(3,\ 4)$, $B(5,\ 4)$;

(5) $A(4,\ 6)$, $B(4,\ 8)$;

(6) $A(a,\ 0)$, $B(0,\ b)$ $(ab\neq 0)$.

解 (1) 直线 AB 的斜率 $k=\dfrac{4-2}{3-1}=1$,所以,直线 AB 的倾斜角为 $\dfrac{\pi}{4}$.

(2) 直线 AB 的斜率 $k=2$,所以,直线 AB 的倾斜角为 $\arctan 2$.

(3) 直线 AB 的斜率 $k=-\dfrac{3-\sqrt{2}}{2}<0$,所以,直线 AB 的倾斜角为 $\pi-\arctan\dfrac{3-\sqrt{2}}{2}$.

(4) 由已知可得直线 AB 与 x 轴平行,所以,直线 AB 的倾斜角为 0.

(5) 由已知可得直线 AB 与 x 轴垂直,所以,直线 AB 的倾斜角为 $\dfrac{\pi}{2}$.

(6) 直线 AB 的斜率 $k=-\dfrac{b}{a}$,若 $ab<0$,则直线 AB 的倾斜角为 $\arctan\left(-\dfrac{b}{a}\right)$,若 $ab>0$,则直线 AB 的倾斜角为 $\pi-\arctan\dfrac{b}{a}$.

解题指要 若直线的斜率小于零,则其倾斜角是钝角,如果倾斜角不是特殊角时,其反三角形式的表达方式应给予特别的关注.

例 2 如果过点 $P(-2,\ m)$, $Q(m,\ 4)$的直线的倾斜角为 $\dfrac{\pi}{4}$,则 $m=$________.

解 由已知得直线 PQ 的斜率 $k=\dfrac{m-4}{-2-m}=\tan\dfrac{\pi}{4}=1$,解得 $m=1$.

例 3 已知 $A(3,\ 4)$, $B(-1,\ -3)$, $C(5,\ y)$共线,则 $y=$________.

解　由已知得直线 AB 的斜率等于直线 BC 的斜率，即 $\frac{4-(-3)}{3-(-1)}=\frac{y-(-3)}{5-(-1)}$，解得 $y=\frac{15}{2}$.

解题指要　过同一点的两条直线斜率相等是刻画三点共线的基本方法之一.

例 4　若直线的斜率的取值范围是 $(-1,\ 1)$，则其倾斜角的取值范围是________.

解　设直线的倾斜角为 α，则由已知得 $-1<\tan\alpha<1$，又 $0\leqslant\alpha<\pi$，所以 α 的取值范围是 $\left[0,\ \frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4},\ \pi\right)$.

例 5　如图 11－1 所示：在以 $A(0,\ 5)$，$B(5,\ 0)$，$C(-4,\ -3)$ 为顶点的三角形中，求过点 A 且与边 BC 相交的直线的斜率的取值范围.

解　线段 AC 所在直线的斜率 $k_{AC}=\frac{-3-5}{-4-0}=2$，线段 AB 所在直线的斜率 $k_{AB}=\frac{0-5}{5-0}=-1$，所以，过点 A 且与边 BC 相交的直线的斜率的取值范围是 $(-\infty,\ -1]\cup[2,\ +\infty)$.

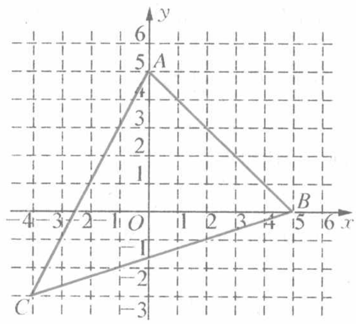


图 11－1

例 6　已知直线 m 过点 P，倾斜角为 α，写出直线 m 的点斜式方程并化成一般式方程.

(1) $P(3,\ 1)$，$\alpha=\frac{3\pi}{4}$；

(2) $P(2,\ -4)$，$\alpha=\arctan\frac{4}{7}$；

(3) $P(3,\ -1)$，$\alpha=\arccos\frac{12}{13}$；

(4) $P(1,\ 1)$，$\alpha=\pi-\arcsin\frac{4}{5}$.

解　(1) 直线 m 的斜率为 -1，所以它的点斜式方程是 $y-1=-(x-3)$，一般式方程为 $x+y-4=0$.

(2) 直线 m 的斜率为 $\frac{4}{7}$，所以它的点斜式方程是 $y+4=\frac{4}{7}(x-2)$，一般式方程为 $4x-7y-36=0$.