

龙门品牌  学子至爱

新课标

龙门
考题

不等式

高中数学

主 编 傅荣强

本册主编 张 硕



龍 門 書 局

www.Longmenbooks.com

新课标

不
等
式



高中数学

主 编:傅荣强

本册主编:张 硕

编 者:贺民兰 刘敏杰 周喜龙
方连英 刘淑琴 孙丽荣
李贵栋 张友富 杨福祥
牛明义 梁桂珍 马清琴
李洪琴 李树枫 董志录
胡佩玉 刘恒礼 张秀芝
夏福盛 王哲

龍 門 書 局

北 京

版权所有 侵权必究

举报电话:(010)64030229;(010)64034315;13501151303
邮购电话:(010)64034160

图书在版编目(CIP)数据

龙门专题:新课标·高中数学·不等式/傅荣强主编;张硕本册
主编. —北京:龙门书局,2008

ISBN 978-7-5088-0759-1

I. 龙… II. ①傅…②张… III. 数学课—高中—教学参考
资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 116976 号

责任编辑:田旭 马建丽 王涛/封面设计:耕者

龙门书局出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

www.longmenbooks.com

世界知识印刷厂印刷

科学出版社总发行 各地书店经销

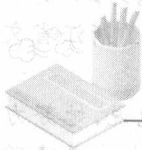
2008年7月第一版 开本:A5(890×1240)

2008年7月第一次印刷 印张:5 3/4

字数:203 000

定价:11.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)



未名湖畔，博雅塔旁。

明媚的晨光穿透枝叶，懒散地泻落在林间小道上，花儿睁开惺忪的眼睛，欣喜地迎接薄薄的雾霭，最兴奋的是小鸟，扇动翅膀在蔚蓝的天空中叽叽喳喳地欢唱起来了。微风轻轻拂动，垂柳摇曳，舒展优美的身姿，湖面荡起阵阵涟漪，博雅塔随着柔波轻快地翩翩起舞。林间传来琅琅的读书声，那是晨读的学子；湖畔小径上不断有人跑过，那是晨练的学子；椅子上，台阶上，三三两两静静的坐着，那是求索知识的学子……

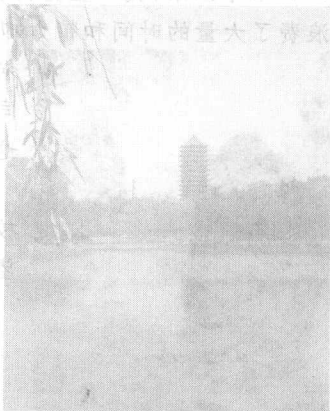
在北大，每个早晨都是这样的；在清华，每个早晨都是这样的；在复旦，在交大，在南大，在武大……其实，在每一所高校里，早晨都是一幅青春洋溢、积极进取的景象！

在过去几年时间里，我一直在组织北大、清华的高考状元、奥数金牌得主还有其他优秀的学子到全国各地巡回演讲。揭开他们“状元”的光环，他们跟我们是那么的相似，同样的普通与平凡。

是什么成就了他们的“状元”辉煌？

在来来往往带他们出差的路上，在闲来无事的聚会聊天过程中，我越来越发现，在普通平凡的背后，他们每个人都是一道亮丽独特的风景，都是一段奋斗不息、积极进取的历程，他们的成功，是偶然中的必然。

小朱，一个很认真、很可爱的女孩子，高中之前家庭条件十分优越，但学习一直平平；在她上高中前，家庭突遭变故，负债累累，用她妈妈的话说，“家里什么都没有了，一切只能靠你自己了。”她说自己只有高考一条路，只有考好了，才能为家里排忧解难。我曾经在台下听她讲自己刻苦学习的经历：“你们有谁在大年



三十的晚上还学习到深夜三点？你们又有谁发烧烧到 39 度以上还在病床上看书？……”那一年，她以总分 684 分成为了浙江省文科高考状元。

陆文，一个出自父母离异的单亲家庭的女孩，她说，她努力学习的动力就是想让妈妈高兴，因为从小她就发现，每次她成绩考得很好，妈妈就会很高兴。为了给妈妈买一套宽敞明亮的房子，她选择了出国这条路，考托福，考 GRE，最后如愿以偿，被芝加哥大学以每年 6.4 万美金的全额奖学金录取为生物方向的研究生。6.4 万美金，当时相当于人民币 52 万。

齐伟，湖南省高考第七名，清华大学计算机学院的研究生，最近被全球最大的软件公司 MICROSOFT 聘为项目经理；霖秋，北京大学数学学院的小妹，在坚持不懈的努力中完成了自身最重要的一次涅槃，昨天的她在未名湖上游弋，今天的她已在千里之外的西雅图……

还有很多很多优秀的学子，他们也都有自己的故事，酸甜苦辣，很真实，很精彩。我有幸跟他们朝夕相处，默默观察，用心感受，他们的自信，他们的执着，他们的勤奋刻苦，尤其是他们的“学而得其法”所透露出来的睿智更让人拍案叫绝，他们人人都有一套行之有效的学习方法，花同样的时间和精力他们可以更加快速高效，举一反三。我一直在想：如果当年我也知道他们的这些方法，或许我也能考个清华北大的吧？

多年以来，我一直觉得我们的高考把简单的事情搞复杂了，学生们浪费了大量的时间和精力却收效甚微；多年以来，我们也一直在研究如何将一套优良的学习方法内化在图书中，让同学们在不知不觉中轻松快速的获取高分。这，就是出版《龙门专题》的原因了。

一本好书可以改变一个人的命运！名校，是每一个学子悠远的梦想和真实的渴望。“少年心事当拿云，谁念幽寒坐鸣呃！”

龙门专题，走向名校的阶梯！



总策划

2008年7月

《 卷 之 一 》

编委会

主 编：傅荣强

编委会成员：傅荣强 方立波 于长军

张晓红 李健全 佟志军

朱 岩 张书祥 张 硕

牛鑫哲 周 萍 郭 杰

王学春 高 鹤 石铁明

石兴涛 史景辉 高 波

了... 2002 示 田

... 示 田

... 示 田

... 示 田

... 示 田

... 示 田

... 示 田

... 示 田

... 示 田

... 示 田

... 示 田

... 示 田

... 示 田

... 示 田

... 示 田

... 示 田

... 示 田

... 示 田

... 示 田

... 示 田

Contents

目录

基础篇	(1)
第一讲 不等关系与不等式	(2)
1.1 不等关系与不等式	(2)
1.2 比较大小	(12)
高考热点题型评析与探索	(24)
本讲测试题	(27)
第二讲 基本不等式	(36)
2.1 基本不等式	(36)
2.2 数学方法与不等式	(47)
高考热点题型评析与探索	(68)
本讲测试题	(74)
第三讲 不等式的解法	(86)
3.1 一元二次不等式的解法	(86)
3.2 函数与不等式	(100)
3.3 简单的线性规划	(115)
高考热点题型评析与探索	(125)
本讲测试题	(130)
综合应用篇	(141)
不等式的理论应用	(141)
一、不等式的解法的应用	(141)
二、关于一元二次方程的实根的分布问题	(148)
三、运用不等式求函数的最大(小)值	(152)
不等式的实际应用	(160)

一、运用 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 解答不等式应用题

..... (161)

二、运用 $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ 解答不等式应用题

..... (168)

三、运用“ $ax^2+bx+c \leq 0 (a \neq 0)$ ”解答不等式应用题

..... (171)

综合应用训练题 (171)



基础篇

数学是研究现实世界空间形式和数量关系的学科,简单地说它是研究“数”和“形”的学科.代数是它的侧重研究运算方法的一个分支.不等式是代数的一个节点,它的本质是研究“数量关系”中的“不等关系”,落脚点是符号“ $>$ 、 $<$ 、 \neq ”.

本书研究的基本问题有三大类:

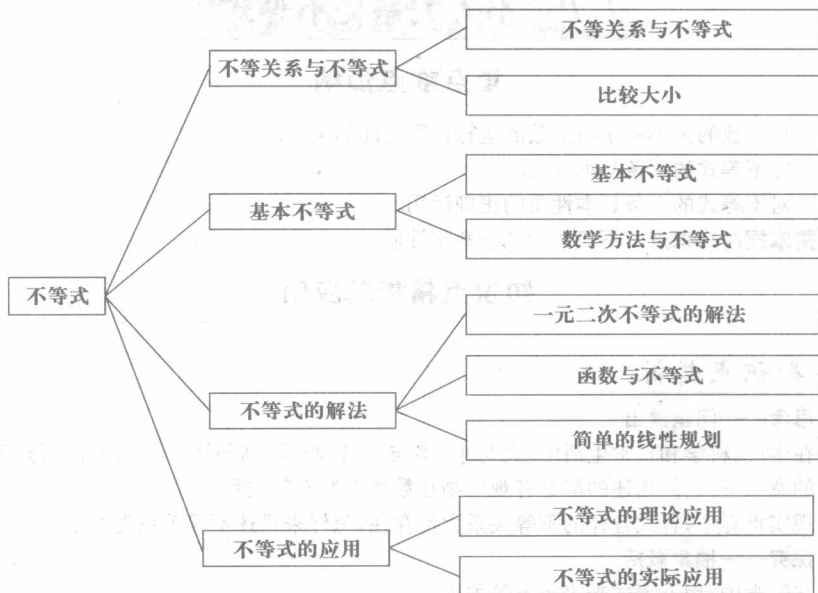
- (1)不等关系与不等式;
- (2)基本不等式;
- (3)不等式的解法.

讨论不等式成立,其理论依据是“实数的顺序性,不等式的性质,函数的单调性,基本不等式”;主要方法是“比较法、综合法、分析法”.

解不等式的总体思路有二:一是等价转化;二是套用“模型”.

解答不等式问题,最常用的数学思想是等价转化思想和分类讨论思想.

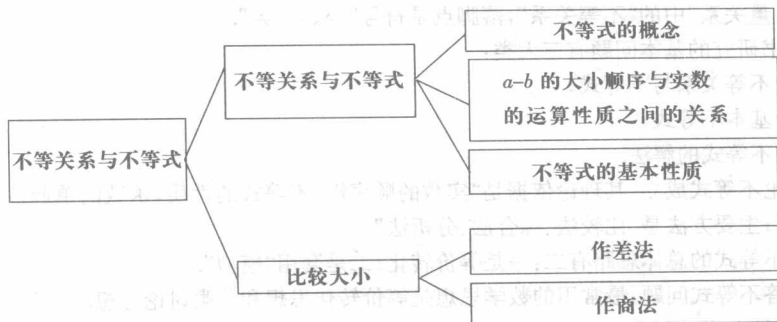
本篇知识框图





第一讲 不等关系与不等式

本讲知识框图



1.1 不等关系与不等式

重点难点归纳

重点 1. 实数的大小顺序与实数的运算性质之间的关系.

2. 不等式的 7 条基本性质.

难点 对不等式的 7 条基本性质的正确运用.

本节需掌握的知识点 不等式的 7 条基本性质.

知识点精析与应用

知识点精析

思考——问题提出

在生产、科学和日常生活中,大与小、多与少、轻与重、高与矮等都为人们所熟悉,在比较的意义下,它们描述的都是客观事物在数量上的不等关系.

现实世界中,各式各样的不等关系大量存在,怎样来描述不等关系呢?

探究——抽象概括

在数学中,用不等式来表示不等关系.

1. 不等式的概念

(1) 不等式的定义

用不等号“ $<$ ”、“ $>$ ”、“ \leq ”、“ \geq ”、“ \neq ”表示不等关系的式子叫做不等式.用“ $<$ ”或“ $>$ ”号连接的不等式,叫做严格不等式;用“ \leq ”或“ \geq ”号连接的不等式,叫做非严格不等式.

**(2) 同向、异向不等式**

$f(x) > 0$ 与 $g(x) > 0$ 叫做同向不等式； $f(x) > 0$ 与 $g(x) < 0$ 叫做异向不等式。

(3) 不等式的解集

使 $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$) 成立的 x 的集合, 叫做 $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$) 的解集。

(4) 同解不等式

若 $f(x) > 0$ 与 $g(x) > 0$ (或 $g(x) < 0$) 的解集相等, 则 $f(x) > 0$ 与 $g(x) > 0$ (或 $g(x) < 0$) 叫做同解不等式。

(5) 不等式的同解变形

一个不等式变形为与它同解的不等式, 这样的变形称为不等式的同解变形。

(6) 证明不等式

证明不等式成立的过程叫做证明不等式。

(7) 解不等式

求不等式的解集的过程叫做解不等式。

2. $a-b$ 的大小顺序 (实数的顺序性) 与实数的运算性质之间的关系

(1) 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 则

$$\textcircled{1} a-b > 0 \Leftrightarrow a > b;$$

$$\textcircled{2} a-b = 0 \Leftrightarrow a = b;$$

$$\textcircled{3} a-b < 0 \Leftrightarrow a < b.$$

(2) 设 a, b 都是正实数, 则

$$\textcircled{1} \frac{a}{b} > 1 \Leftrightarrow a > b;$$

$$\textcircled{2} \frac{a}{b} = 1 \Leftrightarrow a = b;$$

$$\textcircled{3} \frac{a}{b} < 1 \Leftrightarrow a < b.$$

3. 不等式的基本性质

(1) $a > b, b > c \Rightarrow a > c$ (传递性).

(2) $a > b \Rightarrow a + c > b + c$ (可加性).

(3) $a > b, c > d \Rightarrow a + c > b + d$.

(4) $a > b, c > 0 \Rightarrow ac > bc; a > b, c < 0 \Rightarrow ac < bc$ (可乘性).

(5) $a > b > 0, c > d > 0 \Rightarrow ac > bd$.

(6) $a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n > 0$ ($n \in \mathbf{Z}$, 且 $n > 1$).

(7) $a > b > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b} > 0$ ($n \in \mathbf{Z}$, 且 $n > 1$).

**解题方法指导**

不等式部分的练习, 要从比较 $a-b$ 与 0 的大小或 $\frac{a}{b}$ 与 1 的大小入手, 总结其中的固定步骤, 经过一段时间演练, 对各类题型也就熟悉了。

1. $a-b$ 与 0 比较类型题

[例1] 比较 $(1+\frac{\sqrt{2}}{a})^3+2$ 与 $4-(1-\frac{\sqrt{2}}{a})^3$ 的大小.

解 $\because [(1+\frac{\sqrt{2}}{a})^3+2]-[4-(1-\frac{\sqrt{2}}{a})^3]$ ← 作差, 被比较的两个数的差

$$= (1+\frac{\sqrt{2}}{a})^3 + (1-\frac{\sqrt{2}}{a})^3 - 2$$

$$= \left[(1+\frac{\sqrt{2}}{a}) + (1-\frac{\sqrt{2}}{a}) \right] \left[(1+\frac{\sqrt{2}}{a})^2 - (1+\frac{\sqrt{2}}{a})(1-\frac{\sqrt{2}}{a}) + (1-\frac{\sqrt{2}}{a})^2 \right] - 2$$

$$= 2(2+\frac{4}{a^2}-1+\frac{2}{a^2}) - 2 = 2(1+\frac{6}{a^2}) - 2$$

$$= \frac{12}{a^2} > 0,$$

← 判号, 与 0 比较, 是正? 是负? 还是零?

$\therefore (1+\frac{\sqrt{2}}{a})^3+2 > 4-(1-\frac{\sqrt{2}}{a})^3$. ← 定论, 被比较的两个数谁大, 谁小?

点评 解答本题的依据是 $a-b > 0 \Leftrightarrow a > b$. 解题步骤是: 作差, 变形, 判号, 定论.

[例2] 比较 x^2+2113 与 $3x+2110$ 的大小, 其中 $x \in \mathbf{R}$.

解 $\because (x^2+2113)-(3x+2110)$ ← 作差

$$= \left[x^2-3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \right] - \left[\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3 \right]$$

$$= \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

← 变形

$$\geq \frac{3}{4} > 0,$$

← 判号, " $\frac{3}{4} > 0$ " 这一步是在 " \geq " 的基础上加强了。因为判号是以 0 为标准的!

$\therefore x^2+2113 > 3x+2110$. ← 定论

[例3] 设 a, b 都是正实数, 比较 $(\frac{a^2}{b})^{\frac{1}{2}} + (\frac{b^2}{a})^{\frac{1}{2}}$ 与 $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ 的大小.

解 $\because a, b$ 都是正实数,

$$\therefore \left[\left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \right] - (\sqrt{a} + \sqrt{b}) = \frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} - \sqrt{a} - \sqrt{b}$$



$$= \frac{a-b}{\sqrt{b}} + \frac{b-a}{\sqrt{a}} = (a-b) \left(\frac{1}{\sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right)$$

$$= \frac{(a-b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{ab}}$$

$$= \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{\sqrt{ab}}$$

≥ 0 ,

$$\therefore \left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

分母 $\sqrt{ab} > 0$;

分子 $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$

$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \Rightarrow$

$(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0.$

你知道“=”什么时候成立吗?

【例4】 比较 $x^6 + 2019$ 与 $x^4 + x^2 + 2018$ 的大小, 其中 $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} \text{解 } x^6 + 2019 - (x^4 + x^2 + 2018) &= x^6 - x^4 - x^2 + 1 = x^4(x^2 - 1) - (x^2 - 1) \\ &= (x^2 - 1)(x^4 - 1) = (x^2 - 1)^2(x^2 + 1). \end{aligned}$$

当 $x = \pm 1$ 时, $x^6 + 2019 = x^4 + x^2 + 2018$;

当 $x \neq \pm 1$ 时, $x^6 + 2019 > x^4 + x^2 + 2018$.

点评 本题与例3比较, “=”成立的条件有些区别: 例3中“=”成立, 只要 a, b 具备“ a, b 都是正实数, $a = b$ ”这一条件; 而本题中“=”成立, 指出了 x 的具体值, 即“ $x = \pm 1$ ”.

【例5】 已知 $a, b, c, d \in \{\text{正实数}\}$, 且 $b < c$, 比较 $ab + d$ 与 $ac + bc + d$ 的大小.

$$\text{解 } (ab + d) - [ac + bc + d] = a(b - c) - bc.$$

$$\therefore b < c,$$

$$\therefore b - c < 0,$$

$$\text{又 } a > 0,$$

$$\therefore a(b - c) < 0;$$

$$\therefore b > 0, c > 0,$$

$$\therefore bc > 0, -bc < 0;$$

$$\therefore a(b - c) - bc < 0,$$

$$\therefore ab + d < ac + bc + d.$$

比较受条件限制的两个数的大小, 逻辑顺序非常重要

点评 本题与例1~例4不同的是: 例1~例4中, 被比较的两个数不受条件限制, 而本题中被比较的两个数 $ab + d$ 与 $ac + bc + d$ 受条件“ $b < c$ ”的限制.

【例6】 已知 $x > 0, x \neq 1, m > n > 0$, 比较 $x^m + \frac{1}{x^m}$ 与 $x^n + \frac{1}{x^n}$ 的大小.

分析 本题对 x 分类讨论, 即讨论 $0 < x < 1$ 和 $x > 1$ 两种情况.



$$\begin{aligned} \text{解 } x^m + \frac{1}{x^m} - \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) &= x^m - x^n + \frac{1}{x^m} - \frac{1}{x^n} = x^m - x^n + \frac{x^m - x^n}{x^{m+n}} \\ &= (x^m - x^n) \left(1 + \frac{1}{x^{m+n}}\right). \end{aligned}$$

分类讨论: $0 < x < 1$; $x > 1$

当 $0 < x < 1$ 时, 由 $m > n > 0$, 知

$$\begin{aligned} x^m &< x^n \text{ 且 } x^{m+n} < 1, \\ 1 - \frac{1}{x^{m+n}} &< 0, \end{aligned}$$

所以 $(x^m - x^n) \left(1 + \frac{1}{x^{m+n}}\right) > 0$;

当 $x > 1$ 时, 由 $m > n > 0$ 知,

$$\begin{aligned} x^m &> x^n \text{ 且 } x^{m+n} > 1, \\ 1 - \frac{1}{x^{m+n}} &> 0, \end{aligned}$$

所以 $(x^m - x^n) \left(1 + \frac{1}{x^{m+n}}\right) > 0$.

综上所述, $x^m + \frac{1}{x^m} - \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) > 0$, 即 $x^m + \frac{1}{x^m} > x^n + \frac{1}{x^n}$.

2. $\frac{a}{b}$ 与 1 比较类型题

【例 7】比较 16^{18} 与 18^{16} 的大小.

分析 本题通过两个数的商与 1 比较确定两个数的大小.

$$\text{解 } \because \frac{16^{18}}{18^{16}} = \frac{2^{72}}{2^{16} \cdot 3^{32}} = \frac{2^{56}}{3^{32}} = \left(\frac{2^7}{3^4}\right)^8 = \left(\frac{128}{81}\right)^8 > 1,$$

$$\therefore 16^{18} > 18^{16}.$$

点评 解答本题的依据是: 若 $a > 0, b > 0, \frac{a}{b} > 1$, 则 $a > b$. 当 $a < 0, b < 0$ 时, 比较 a 与 b 的大小, 可先比较 $-a$ 与 $-b$ 的大小, 然后再确定 a 与 b 的大小.

基础达标演练

一、选择题

1. 若 $f(x) = 5x^2 - x + 1, g(x) = 4x^2 + x - 1$, 则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的大小关系是 ()

- A. $f(x) > g(x)$
C. $f(x) < g(x)$

- B. $f(x) = g(x)$
D. 随 x 值的变化而变化

2. 若 $a \neq 2$ 或 $b \neq -1$, 则 $M = a^2 + b^2 - 4a + 2b + 1$ 的值与 -4 的大小关系是 ()

- A. $M > -4$

- B. $M < -4$

- C. $M = -4$

- D. 不能确定



3. 若 $a > b, c > d$, 则下列不等关系中不一定成立的是 ()
- A. $a - d > b - c$ B. $a + d > b + c$
- C. $a - c > b - c$ D. $a - c < a - d$
4. 若 $-1 < \alpha < \beta < 1$, 则下列各式中恒成立的是 ()
- A. $-1 < \alpha - \beta < 1$ B. $-2 < \alpha - \beta < -1$
- C. $-2 < \alpha - \beta < 0$ D. $-1 < \alpha - \beta < 0$

二、填空题

5. 6^8 与 8^6 的大小关系是 6^8 _____ 8^6 .
6. 设 $a > 5$, 则 $\sqrt{a-3} - \sqrt{a-4}$ 与 $\sqrt{a-4} - \sqrt{a-5}$ 的大小关系是 _____.
7. 当 _____ 时, $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} < \sqrt[3]{a-b}$.
8. 设 $0 < a < b$, 且 $a + b = 1$. 将 $a, b, \frac{1}{2}, 2ab, a^2 + b^2$ 从小到大排列, 可排列为 _____.

三、解答题

9. 比较 $a^3 - 2a + 1$ 与 $a - 2$ 的大小.
10. 比较 $\frac{2}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$ 与 $4\sqrt{n}$ 的大小 ($n \in \mathbf{N}^*$).

答案与提示

一、选择题

1. A ($f(x) - g(x) = (5x^2 - x + 1) - (4x^2 + x - 1) = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 > 0$.)
2. A ($(a^2 + b^2 - 4a + 2b + 1) - (-4) = a^2 + b^2 - 4a + 2b + 5 = (a^2 - 4a + 4) + (b^2 + 2b + 1) = (a-2)^2 + (b+1)^2$. $\because a \neq 2$ 或 $b \neq -1$, $\therefore (a-2)^2 + (b+1)^2 > 0$.)
3. B (依不等式的性质 $a - d > b - c$, 或 $a - c < a - d$ 都成立, \therefore A, D 是成立的. C 中以 $a > b$ 为前提, 两边同加 $-c$ 也成立.)
4. C ($\because -1 < \alpha < 1, -1 < \beta < 1, \therefore -1 < -\beta < 1, \therefore -2 < \alpha - \beta < 2$. 又 $\because \alpha < \beta, \therefore \alpha - \beta < 0, \therefore -2 < \alpha - \beta < 0$.)

二、填空题

5. $>$ ($\frac{6^8}{8^6} = \frac{2^8 \times 3^8}{2^{18}} = \frac{3^8}{2^{10}}$. 设 $x = \frac{3^8}{2^{10}}$, 则 $\lg x = 8\lg 3 - 10\lg 2 = 8 \times 0.4771 - 10 \times 0.3010 > 0, \therefore x > 1, \therefore 6^8 > 8^6$.)
6. $\sqrt{a-3} - \sqrt{a-4} < \sqrt{a-4} - \sqrt{a-5}$ ($\because a > 5$, 只需判断 $\sqrt{a-3} + \sqrt{a-5}$ 与 $2\sqrt{a-4}$ 的大小, 即比较 $(\sqrt{a-3} + \sqrt{a-5})^2 - (2\sqrt{a-4})^2$ 的大小, 即 $a - 3 + 2\sqrt{(a-3)(a-5)} + a - 5$ 与 $4(a-4)$ 的大小. 只需比较 $2\sqrt{(a-3)(a-5)}$ 与 $2(a-4)$ 的大小, 只需判断 $(a-3)(a-5)$ 与 $(a-4)^2$ 的大小, 只需判断 $a^2 - 8a + 15$ 与 $a^2 - 8a + 16$ 的大小.)
7. a, b 同号且 $a > b$ 或 a, b 异号且 $a < b$ (不妨先假设 $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} < \sqrt[3]{a-b}$. 通过等价变换来分析



应具备的条件,原式等价于 $a - 3\sqrt[3]{a^2b} + 3\sqrt[3]{ab^2} - b < a - b \Leftrightarrow -3\sqrt[3]{ab} \cdot (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}) < 0$, \therefore 应满足条件是 a, b 同号且 $a > b$ 或 a, b 异号且 $a < b$.)

8. $a < 2ab < \frac{1}{2} < a^2 + b^2 < b$ (由 $0 < a < b$ 且 $a + b = 1$ 可知 $0 < a < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < b < 1$, $a^2 + b^2 > 2ab$. 这样 $a < \frac{1}{2} < b$, $2ab < a^2 + b^2$. 它们两组之间什么关系呢? $\because b = 1 - a$, $(a^2 + b^2) - b = a^2 + (1 - a)^2 - (1 - a) = 2a^2 - a = a(2a - 1)$, $0 < a < \frac{1}{2}$, $\therefore 2a - 1 < 0$, $a > 0$, $\therefore a^2 + b^2 < b$. 又 $\because 2ab - \frac{1}{2} = 2a(1 - a) - \frac{1}{2} = -2a^2 + 2a - \frac{1}{2} = -2(a^2 - a + \frac{1}{4}) = -2(a - \frac{1}{2})^2 < 0$, $\therefore 2ab < \frac{1}{2}$. $a^2 + b^2 = a^2 + (1 - a)^2 = 2a^2 - 2a + 1 = 2(a - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$.)

三、解答题

9. $\because (a^2 - 2a + 1) - (a - 2) = a^2 - 2a - a + 3 = a^2 - 3a + 3 = (a - \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$, $\therefore a^2 - 2a + 1 > a - 2$.

10. $\because \frac{2}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = 2(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$, $\therefore \frac{2}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} - 4\sqrt{n} = 2(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) - 4\sqrt{n} = 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} > 0$, $\therefore \frac{2}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} > 4\sqrt{n}$.

能力拓展

释疑解难

用分类讨论思想剖析教学中的“不重不漏”

“不重不漏”,是指数学问题的解不重复,不遗漏.各类书刊杂志上,“千万要不重不漏,一定要不重不漏……”让人感到亲切,真是用心良苦啊!问题是怎样去保证一个数学问题的解不重不漏呢?这还要从分类讨论的数学思想说起.

(1) 思想是行动的指南

思想是行动的指南.数学思想当然就是数学活动的指南,它能指明你数学活动过程中的前进方向.类比指南针,南清楚了,东、西、北自然也就清楚了,上北下南左西右东很少有人不知.

(2) 分类讨论思想的理论基础

思想要有理论基础作指导,分类讨论思想的理论基础由三部分组成.

设一个数学问题的母类是集合 A ,子类是集合 A_1, A_2, \dots, A_n ,它们满足下面的三个条件:

① $A_i \neq \emptyset$, $i = 1, 2, \dots, n$;

② $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, n$;