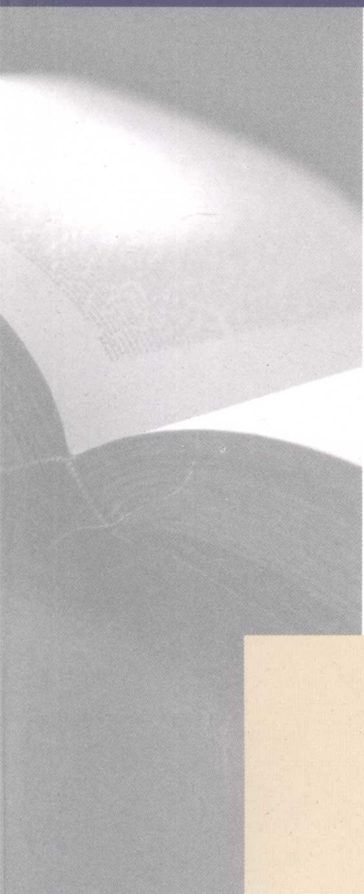
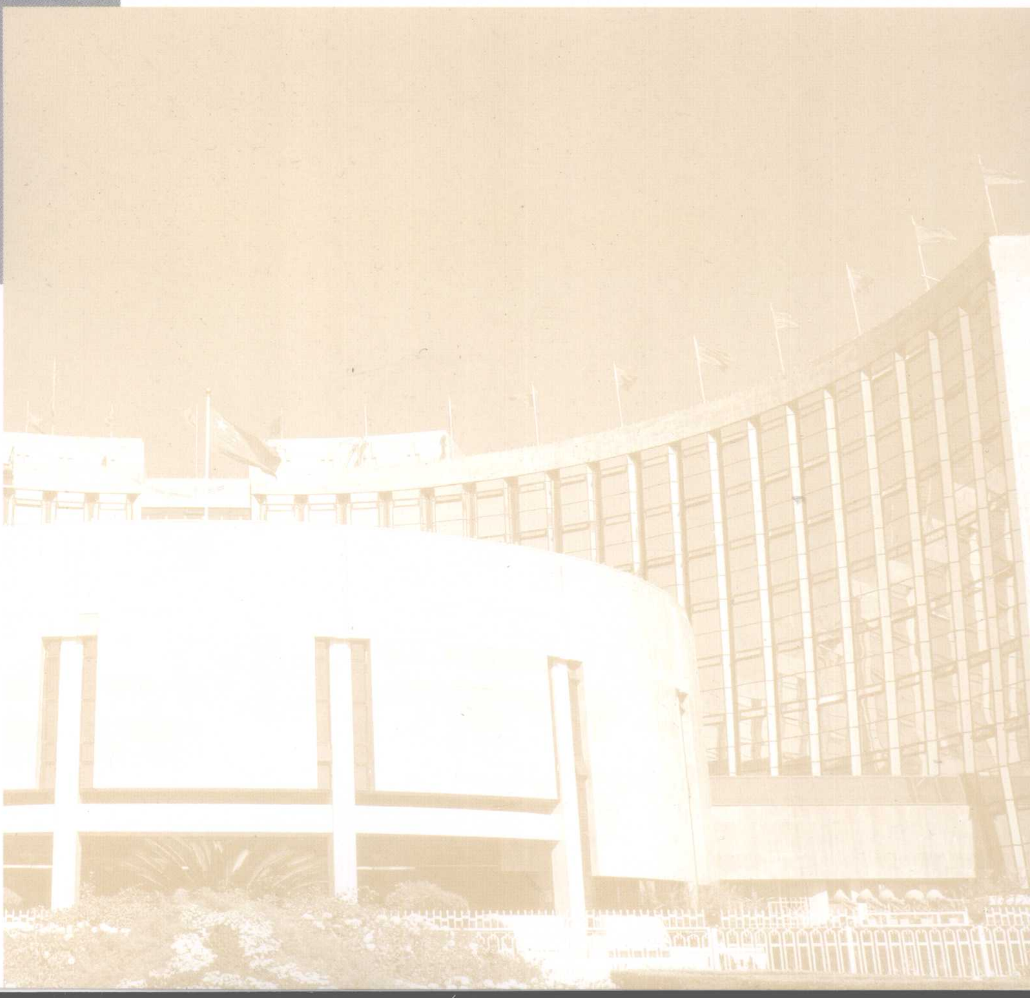
高等院校经济学管理学系列教材
GAODENG YUANXIAO JINGJIXUE GUANLIXUE XILIE JIAOCAI



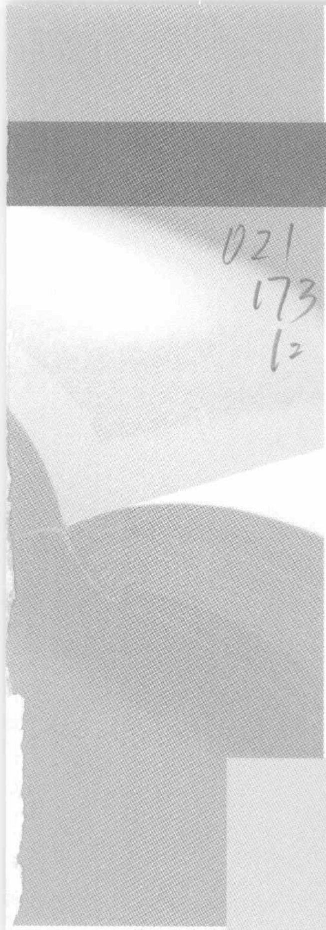
概率论与数理统计

GAILÜLUN YU SHULITONGJI

叶中行 王蓉华
徐晓岭 白云芬 ⊙编



北京大学出版社



概率论与数理统计

GAILÜLUN YU SHULITONGJI

叶中行 王蓉华
徐晓岭 白云芬 ⊙编

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/叶中行等编. 一北京:北京大学出版社,2009.1
(高等院校经济学管理学系列教材)
ISBN 978-7-301-14847-1

Ⅰ. 概… Ⅱ. 叶… Ⅲ. ①概率论-高等学校-教材 ②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ. O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 204762 号

书　　名:概率论与数理统计
著作责任者:叶中行　王蓉华　徐晓岭　白云芬　编
责 任 编 辑:朱梅全　王业龙
标 准 书 号:ISBN 978-7-301-14847-1/O·0773
出 版 发 行:北京大学出版社
地　　址:北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　址:http://www.pup.cn　电子邮箱:law@pup.pku.edu.cn
电　　话:邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62752027
　　　　　出版部 62754962
印 刷 者:世界知识印刷厂
经 销 者:新华书店
　　　　　730 毫米×980 毫米　16 开本　29.5 印张　562 千字
　　　　　2009 年 1 月第 1 版　2009 年 1 月第 1 次印刷
定　　价:48.00 元

前　　言

《概率论和数理统计》是大学理工类本科生必修的数学基础课。近年来经济、金融和管理领域对定量分析的需求越来越多，要求学生强化数学基础，但国内适用于经济、金融和管理类的《概率论和数理统计》专用教材偏少，且内容相对陈旧，没有反映出近一二十年来经济数学、金融数学和管理数学的新进展。

这次应北京大学出版社之邀，新编一本适用于经济学、管理学专业的《概率论与数理统计》，对全书的内容、例题和习题等的选择作了新的编排，特别是将最近一二十年来经济数学、金融数学和管理数学的一些新成果融入教材，使之适用性更加广泛。上海交通大学设有国家工科数学教学基地，《概率论与数理统计》已入选上海市精品课程，本教材是该课程拟编写的系列教材之一，将面向全国各高校经济、金融和管理类专业的同名课程使用。

本书的编排分两部分，第一章到第五章是概率论，第六章到第十章是数理统计。考虑到不同院校的需要，有些方面的内容相当丰富，教师可以根据学生的实际情况取舍，未在课内讲授的内容可作必要时备查。每章后面都附有阅读材料及习题，它们有的是正文的补充和扩展，有的是帮助学生掌握正文的内容，教师可以选择部分作教学材料，我们建议读者仔细阅读这些材料，必有所获。全书最后是常见的分布函数与分布表，供读者备查。

本书是上海交通大学的叶中行、上海师范大学的王蓉华、上海对外贸易学院的徐晓岭和石家庄学院的白云芬四位作者通力合作完成的，四位作者长期从事概率统计的教学工作，并在科学研究特别是经济、金融和管理数学方面有了相当的积累，经过多年的教学实践，充分学习和借鉴国内外的优秀教材，并对过去编写过的同名教材使用情况进行了认真的总结，经过近一年时间的撰写，终于在2008北京奥运会期间完成了全书的编写工作。

本书由叶中行组织和统筹编写，其中叶中行编写了第一、四、五章，白云芬编写了第二、三章，王蓉华编写了第六、七章，徐晓岭编写了第八、九、十章，叶中行和徐晓岭对全书进行了统稿。本书还得到上海交通大学数学系、上海师范大学数理信息学院、上海对外贸易学院商务信息学院部分研究生的帮助，顾蓓青提供了部分阅读材料并负责全书的编排，雷平、庄瑞鑫、洪杰和陈翔提供了部分习题解答和阅读材料，吴慧玲、於嵩和颜爱帮助录入部分章节。

本书的写作得到北京大学出版社的大力支持和帮助，同时费鹤良教授通读了全文并提出了宝贵的修改意见，在此一并表示深切的感谢。

由于我们水平有限，本书一定存在不少缺点，欢迎读者和专家批评指正。

作者

2008 年 8 月于上海

目　录

第一章　随机事件与概率

在现实生活中，有的过程产生的结果是确定的，例如，在标准大气压下水加热到 100℃一定会沸腾，到 0℃一定会结冰；超过第一宇宙速度运行，火箭就会摆脱地球引力而飞出地球，这些都是确定性现象，亦称必然现象. 微积分学、线性代数等研究的对象就是“确定性对象”.

有的过程会产生多种可能的结果，但究竟会出现哪个结果却是不确定的，这种现象被称为随机现象. 譬如掷一枚硬币，结果有可能正面向上，也可能反面向上，这一结果纯属偶然，是随机现象. 由 5 位数组成彩票的号码，彩票开出某个号码为中奖号码也是随机现象，因为在相同条件下任何一个号码都有可能被选中. 此外，记录某网站一分钟内受到的点击次数，在一批灯泡中任取一只以测其寿命，其结果都不是确定的.

概率论将对随机现象的观察或为观察随机现象而进行的试验称作随机试验. 在现实生活中存在大量随机试验的例子，抛掷硬币的过程和工厂生产零件的过程可以看成是在进行随机试验，靠碰运气决定胜负的游戏也是一种随机试验，因为在游戏前并不知道游戏的结果. 发射火箭和举办销售活动等也是随机试验的例子，因为发射火箭是否成功和商品销售的数量都是不确定的. 妇女怀孕后生男孩还是女孩，也是不确定的.

虽然随机现象“纯属偶然”，但大量重复相同的试验会发现其结果还是有一定的规律可循，概率论与数理统计正是研究与揭示随机现象的定量规律性的一门数学分支. 本章将介绍概率论的一系列最基础的概念，并讨论一些特殊场合下的概率计算问题，使读者对概率有一个初步但又准确的认识，为学习下面的章节打好基础.

§1.1　随 机 事 件

1.1.1　随机试验与样本空间

概率论约定为研究随机现象所作的随机试验应具备以下三个特征：

(1) 在相同条件下试验是可重复的；

(2) 试验的全部可能结果不止一个，且都是事先可以知道的；

(3) 每一次试验都会出现上述可能结果中的某一个结果，至于是哪一个结

果则事前无法预知.

为简单计，今后凡是随机试验皆简称试验，并记之以英文字母 E. 称试验的每个可能结果为样本点，并称全体样本点的集合为试验的样本空间，分别用希腊字母 ω 和 Ω 表示样本点和样本空间.

必须指出的是，这个样本空间并不完全由试验所决定，它部分地取决于实验的目的. 假设抛掷一枚硬币两次，出于某些目的，也许只需要考虑三种可能的结果就足够了，即两次都是正面，两次都是反面，一次是正面一次是反面. 于是这三种结果就构成了样本空间 Ω. 但是，如果要知道硬币出现正反面的精确次序，那么样本空间 Ω 就必须由四个可能的结果组成：正面—正面、反面—反面、正面—反面、反面—正面. 如果还考虑硬币降落的精确位置，它们在空中旋转的次数等事项，则可以获得其他可能的样本空间.

一般来说，比绝对必要的样本空间较大的样本空间会较常被采用，因为它便于使用. 比如在前面的例子中，由四种可能结果组成的样本空间便于问题的讨论，因为对于一枚"均匀"的硬币这四种结果是"等可能"的，尽管这在有三种结果的样本空间内是不对的.

例 1.1.1 E_1：从最简单的试验开始，这些试验只有两种结果. 在抛掷硬币这一试验中会出现"正面"或"反面"；在检查零件质量时，结果可能是"合格"或"不合格"；当用来模拟电子产品旋转的方向时，结果可能是"左边"或者"右边". 在这些情况下样本空间 Ω 简化为：$\Omega=\{$正面，反面$\}$.

E_2：更复杂一些，有的试验会产生多种可能的结果，比如掷一颗骰子，观察出现的点数. 样本空间为：$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$.

E_3：掷两枚硬币(或者观察两个零件或两个电子产品)，可以得到

$$\Omega=\{(\text{正面},\text{正面}),(\text{反面},\text{反面}),(\text{正面},\text{反面}),(\text{反面},\text{正面})\}$$

读者可以将其推广到掷 n 个硬币，样本空间里有多少样本点？

E_4：再复杂一些，一名射手向某目标射击，直至命中目标为止，观察其命中目标所进行的射击次数. 从理论上讲，只要不能击中目标，射手就必须一直射下去，故样本空间为

$$\Omega=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$$

其中含无穷多个样本点. 这也适用于商品销售，假设商场可以无限量地销售某种商品，每天销售的该商品数的样本空间为 $\Omega=\{0,1,2,\cdots\}$.

E_5：在人类学研究中"随机抽取一个人"并测量他的身高和重量，电梯设计师能利用这些资料设计电梯的空间和载重，对于中国人，身高(单位：米)的样本空间取 $\Omega=\{\omega,\omega\in[0,2.5]\}$ 就足够了，体重(单位：公斤)的样本空间取 $\Omega=\{\omega,\omega\in[0,200]\}$ 也许就足够了. 在大部分实际的设计问题中，设计师有时会同时考虑电梯使用者的所有可能的身高和体重，更具体地说，设计者通常会对同时

提供了可能使用者身高和体重的结果感兴趣. 因此, 样本空间是

$$\Omega=\{\omega=(\omega_1,\omega_2)=(\text{高度},\text{重量})\in[0,2.5]\times[0,200]\}\quad\square$$

在大多数应用中可以将样本空间分为三类:

(a) 样本空间只可能包含有限个结果. 和试验相关的样本空间是有限样本空间. 如在投掷一枚硬币的实验中只有两种可能的结果, 掷一颗骰子, 观察出现的点数, 只有六种可能的结果.

(b) 如上述试验 E_4, 就射手首中目标所需的射击次数, 一次销售活动就出售商品的数量而言, 可以理想化地认为样本空间是由全部非负的整数组成. 可以把这些试验的结果与可以计数的整数一一对应, 因此, 这样的样本空间可以说是可数无穷的.

(c) 制造零件和测量它的强度的试验、测量人体身高或体重的试验中, 可以想象试验结果落在一个充分大的实数区间里, 实数区间是不能按顺序一一列举的(甚至是无穷序列), 这样理想化的样本空间可说是不可数无穷的, 或连续的.

在许多情况下, 不必要区分有限样本空间和可数无穷的样本空间. 因此, 如果样本空间是有限的或是可数无穷的, 称它是可数的样本空间. 习惯上, 把可数样本空间当做离散的样本空间, 而将不可数样本空间当做连续的样本空间.

此外要注意的是, 即使看似相同的试验, 不同的试验目的要求的样本空间也可能不一样, 具体见下例:

例 1.1.2　假设生产线上下来 5 个产品, 编号为 1,2,3,4,5, 现从中抽取三个进行检查, 如果不计抽取的次序, 抽到产品的编号组成的样本空间包括以下 10 种可能的结果: 123, 124, 125, 134, 135, 145, 234, 235, 245, 345.

如果考虑抽取的次序, 将会有 60 种可能的结果(为什么?). 比如, 包括产品 1,2 和 3 的样本可有以下 6 种顺序被抽中: 123, 132, 213, 312, 231, 321.

应该使用哪个样本空间取决于试验方法和评价, 如果在没有限制的条件下连续地检验产品, 但只选取包含两个及两个以上不合格品的样本, 则显然应该使用第二个样本空间.

在这种情况下要注意的是, 如果选择和被测试的前两件产品被发现都合格或都不合格, 为了作出决定而去选择第三件产品是不必要的. □

1.1.2　随机事件

随机试验的结果称为随机事件, 简称事件, 并以大写英文字母 A,B,C,D, …记之. 例如, 上述例 1.1.1 的试验 E_1 中, 若以 A 表示"掷出正面"的结果, 则 A 是一个事件, 它含有一个样本点{正面}; 令 B 表示"掷出反面", 则 B 亦是试验 E_1 的一种结果, 从而亦是一个事件. 在试验 E_3 中若以 C 表示"掷出两个正面"的结果, 则 C 是一个事件, 它含有一个样本点(正, 正); 令 D 表示"至少掷出一个反

面”,显然 D 含有 3 个样本点(反,反),(正,反),(反,正).又如,在例 1.1.1 的试验 E_2 中,若以 F 表示结果“掷出奇数点”,则 F 是一个事件.由于当且仅当掷出 1,3,5 三种点数的任何一种时,事件 F 发生,所以 F 含有 3 个样本点“1”,“3”,“5”.再如,在 E_4 中,若以 G 表示“至少射击 3 次才会命中目标”这一结果,则 G 是一个事件.这一结果意味着该试验的射击次数是 3,4,5,…,这表明事件 G 含有的样本点是“3”,“4”,“5”,….

上述分析表明,描述试验结果的事件,就是试验的样本空间的子集,上述 A,B,C,D,F,G 这 6 个事件都是相应样本空间的子集.

$$A=\{\text{正面}\},\quad B=\{\text{反面}\}$$
$$C=\{(\text{正},\text{正})\},\quad D=\{(\text{反},\text{反}),(\text{正},\text{反}),(\text{反},\text{正})\}$$
$$F=\{1,3,5\},\quad G=\{3,4,5,\cdots\}$$

事实上,对于含有有限个或可数个样本点的样本空间,可以将其任意一个子集称作事件.而对于含有不可数个样本点的试验而言,作为试验结果的事件,同样是试验的样本空间的子集.例如,在上述 E_5 中,若令 F 表示“身高在 1.50 至 1.80 米之间”这一集合,则 F 显然也是 Ω 的一个子集:$F=\{\omega,\omega\in[1.5,1.8]\}$.

但对于具有不可数个样本点的样本空间,其子集要比通常想象的复杂,因此不能够将其任意子集都称作事件,对这一问题的深入讨论要用到测度论的知识,这里不再探讨.

1.1.3　事件与集合的对应以及它们的运算

通常用希腊字母 Ω 表示样本空间,ω 表示样本点.称“ω 是 Ω 的成员”或者“ω 属于 Ω”,或者“ω 是 Ω 的元素”,记为 $\omega\in\Omega$.

如果 ω 不是试验的一种可能结果,那么 ω 不是 Ω 的元素,则记为 $\omega\notin\Omega$.

一个事件对应于样本空间的一个子集,因此某事件发生当且仅当它对应的子集中的某个元素(即样本点)在试验中出现.用 $A\subset\Omega$ 表示事件 A 是 Ω 的子集.事件的相互关系与集合论中集合的包含、相等以及集合的运算等概念对应.以下就是这些对应关系与运算.为简化起见,以下均假设涉及的集合 $A,B,A_1,A_2,\cdots,A_n$ 等都是 Ω 的子集,而不再每次申明.

1. 事件的包含—集合的包含

集合 $A\subset B$ 即“A 包含于 B”,意为 A 中元素都在 B 中,或说如果 $\omega\in A$,必有 $\omega\in B$.对应于事件,表示 A 的样本点都在 B 中,即当 A 的样本点出现于试验结果 B 之中,即 A 发生时,B 当然也就发生了,或说“A 的发生必导致 B 的发生”.

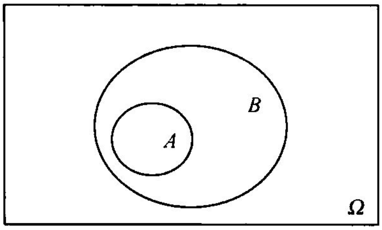


图 1.1　$A\subset B$ 的文氏图

2. 事件的相等—集合的相等

称集合 A 和 B 相等，并记为 $A=B$，是说“$A\subset B$ 且 $B\subset A$”. 对应于事件，称 A 和 B 相等，记为 $A=B$，就是“如果 A 发生，则 B 必然发生，同样如果 B 发生，则 A 必然发生”. 相等的事件含有相同的样本点.

3. 事件的并(和)—并集

集合 A 和 B 的并集记为 $A\cup B$，它的元素或者属于 A，或者属于 B(当然有的可能同时属于 A 和 B)，即 $A\cup B=\{\omega:\omega\in A$ 或 $\omega\in B\}$. 对应事件的并 $A\cup B$ 表示“A 或 B 至少有一个发生”.

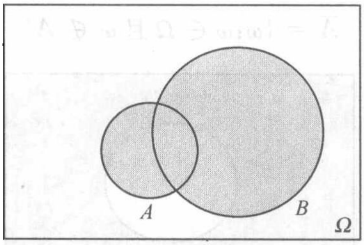


图 1.2　$A\cup B$ 的文氏图

并的概念可以推广到 n 个事件和可数个事件，$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的并 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 表示“$A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 中至少有一个发生”；可数个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的并 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cdots$ 表示“$A_i(i=1,2,\cdots,n,\cdots)$ 中至少有一个发生”.

4. 事件的交(积)—交集

两个集合 A 和 B 的交集记为 $A\cap B$，它是由既属于 A 又属于 B 的元素构成的集合，即

$$A\cap B=\{\omega:\omega\in A \text{ 且 } \omega\in B\}$$

对应于事件的交 $A\cap B$ 表示“A 和 B 同时发生”. $A\cap B$ 常简记作 AB.

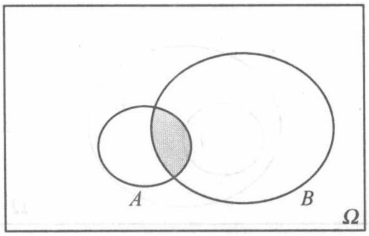


图 1.3 $A\cap B$ 的文氏图

类似地,交的概念也可以推广到 n 个事件的交,$\bigcap_{i=1}^{n}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 表示"n 个事件 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$同时发生",可数个事件的交 $\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\cap\cdots$表示"可数个事件 $A_i(i=1,2,\cdots,n,\cdots)$同时发生".

5. 逆事件(对立事件)—补集

Ω 的子集 A 的补集记为 $\overline{A}$,它是由属于 Ω(样本空间)但不属于 A 的元素构成的集合,因为仅牵涉到属于 Ω 的点,集合 $\overline{A}$ 就是由那些不属于 A 元素组成的.记为

$$\overline{A}=\{\omega:\omega\in\Omega\text{ 且 }\omega\notin A\}$$

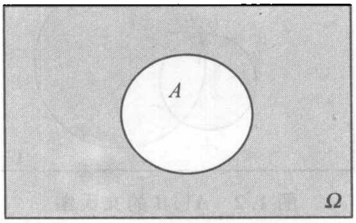


图 1.4 $\overline{A}$ 的文氏图

对应于事件,$\overline{A}$ 发生当且仅当 A 不发生,称作事件 A 的逆事件.利用上述事件的并和交的运算符号,有

$$A\cup\overline{A}=\Omega \quad\text{及}\quad A\overline{A}=\varnothing$$

6. 事件的差—差集

集合 A 与 B 的差集 $A-B$ 由 A 中那些不属于 B 的元素全体组成.对应地,事件的差 $A-B$ 表示"A 发生而 B 不发生",即 $A-B=A\overline{B}$.

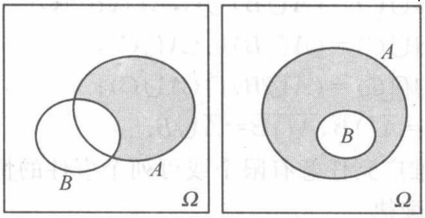


图 1.5　$A-B$ 的文氏图

7. 互斥(或不相容)—事件不交集

在集合论中,若 $AB=\varnothing$,则表明 A,B 没有公共元素,它们互不相交.对应于事件,若 $AB=\varnothing$,则表明 A,B 不同时发生,称 A 与 B 互斥(或不相容).

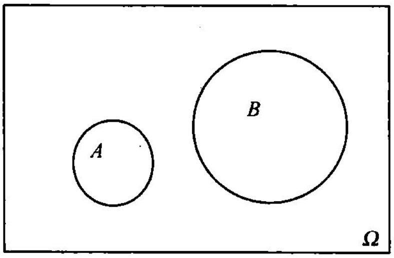


图 1.6　$AB=\varnothing$ 的文氏图

8. 必然事件和不可能事件—样本空间和空集

有两个特殊的集合需要特别讨论,一个是样本空间本身,从集合的定义容易推断出 Ω 是它自身的子集,从包含关系 $\Omega\subset\Omega$ 的左边取一个元素使它不在右边集合中,显然是不可能的,因此 $\Omega\subset\Omega$. 又假设存在集合 $\varnothing$,该集合不包含任何元素(空的集合),$\varnothing$ 必定是每一个集合的子集,对任何子集 A,要从 $\varnothing$ 中找到一个元素不在 A 中,显然是不可能的,因为 $\varnothing$ 没有元素,因此,$\varnothing\subset A$ 成立.

对应于事件,称试验必然会出现的结果为必然事件.例如,例 1.1.1 的 E_2 中"点数小于 7"应是一种结果,其发生是必然的.显然,必然事件含有样本空间的全部样本点,因此用样本空间的字母 Ω 表示必然事件是很自然的.此外,将不可能出现的结果称作不可能事件,记作 $\varnothing$,它对应于集合论中的空集.如 E_4 中"射击次数小于 0"就是一个不可能事件.显然,不可能事件不含有样本点.

注意到以下等式总是成立的

$$\overline{\Omega}=\varnothing,\quad \overline{\varnothing}=\Omega,\quad \Omega\cup A=\Omega,\quad \Omega\cap A=A$$

$$A\cup\overline{A}=\Omega,\quad A\cap\overline{A}=\varnothing,\quad \overline{(\overline{A})}=A$$

上述事件间的关系与运算可由集合论中的文氏图予以展示.

与集合运算一样,事件的运算亦有如下的运算律:

1. 交换律:$A\cup B=B\cup A,AB=BA$;

2. 结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$；

3. 分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

4. 对偶律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

上述运算律亦可推广到任意有限个或可列个事件的情况.例如，对 n 个事件 $B_i(i=1,2,\cdots,n)$ 有分配律

$$A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n}B_i\right)=\bigcup_{i=1}^{n}(A\cap B_i),\quad A\cup\left(\bigcap_{i=1}^{n}B_i\right)=\bigcap_{i=1}^{n}(A\cup B_i)$$

对偶律留给读者自行写出.

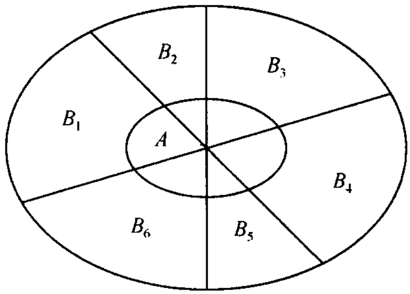


图 1.7 n 个事件的关系图

对可列个事件 $A_i(i=1,2,\cdots,n,\cdots)$ 的分配律也留给读者，此处给出对偶律

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcap_{i=1}^{\infty}\overline{A}_i$$

及

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{A}_i$$

为帮助读者熟悉事件的运算，以三个集合为例，A、B 和 C 的并集，如图 1.8 的文氏图是有用的.根据图 1.8，请读者检验这些等式：

$$A\cap B\cap C\subset A\cap B\subset A,\quad A\subset A\cup B\subset A\cup B\cup C$$

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

例 1.1.3 设 $\Omega=\{1,2,\cdots,20\}$ 是 1 到 20 二十个数字组成的集合，O 表示 Ω 中全体奇数的集合，E 表示 Ω 中偶数的集合，令 A 表示"Ω 中能被 3 整除的数"，B 表示"Ω 中能被 5 整除的数"，C 表示"Ω 中能被 15 整除的数"，则

$$A=\{3,6,9,12,15,18\},\quad B=\{5,10,15,20\},\quad C=\{15\}$$

于是

$$O\cup E=\Omega,\quad O\cap E=\varnothing,\quad \overline{O}=E,\quad A\cap E=\{6,12,18\}$$

$$A\cap B=C,\quad B\cap O=\{5,15\},\quad C\subset A,\quad C\subset B$$

$$A\cup B=\{3,5,6,9,10,12,15,18,20\}$$

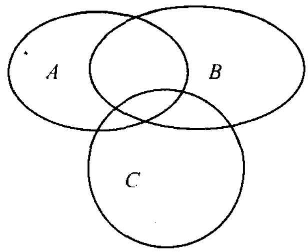


图 1.8 三个事件的关系图

$$A-B=\{3,6,9,12,18\},\quad B-A=\{5,10,20\}$$ □

例 1.1.4 已知一批机器螺钉中含有许多次品，随机抽取三个并检验. 令 A,B,C 分别表示其第一、二、三次所抽到的螺钉是次品的事件. 试用 A,B,C 及其运算表示下列事件：(1) 第三次抽到正品；(2) 只有第三次抽到次品；(3) 恰有一次抽到次品；(4) 至少有一次抽到次品；(5) 不止一次抽到次品(或至少抽到两个次品)；(6) 没有抽到次品.

解 (1) $\overline{C}$. (2) $\overline{A}\overline{B}C$. (3) $A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C$.

(4) $A\cup B\cup C$. (5) $AB\cup AC\cup BC$. (6) $\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}=\overline{A\cup B\cup C}$. □

§1.2 概 率

概率是定量地来描述随机事件发生的可能性的数值度量. 然而在概率论发展过程中，对概率的定义足足经历了三百余年的探索，在经历了古典概率、几何概率、统计概率等版本的概率定义之后，人们最终接受了苏联数学家柯尔莫戈洛夫于 1933 年建立的概率公理化体系. 目前多数概率论教科书都采用概率的公理化定义，这要从随机事件的频率谈起.

1.2.1 频率与概率

如前所述，概率是事件发生可能性大小的度量，那么什么样的数能够准确地描述事件发生可能性的大小?

考虑一系列在相同条件下重复做的相同实验. 在实验的最初 n 次重复试验中，假设 n_A 表示事件 A 发生的次数，那么 n_A/n 的比值则给出了在最初 n 次试验中事件 A 发生的比例. 例如，如果是投掷硬币的实验，若事件 A 相对应“正面(即头像那面)”，那么 n_A/n 给出了在最初 n 次投掷中正面的次数. 直观上感觉随着 n 的增加，n_A/n 的比值应该稳定且接近某些可以测量事件 A 发生可能性的固定数值. 这样，可以用下面的方式来指定事件的概率：

$$P(A)=\lim_{n\to\infty}\frac{n_A}{n}\tag{1.2.1}$$