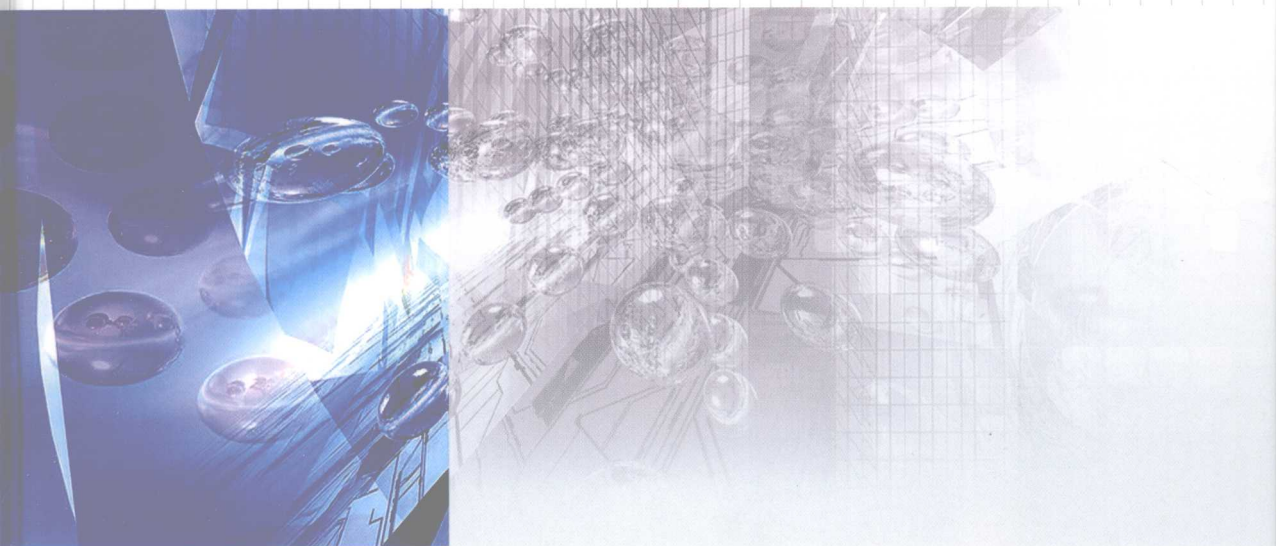




# 多相空隙介质 理论及其应用

黄 义 张引科 著



科学出版社  
[www.sciencep.com](http://www.sciencep.com)

# 多相空隙介质理论及其应用

黄 义 张引科 著

ISBN 7-03-034352-8

本书主要介绍多相空隙介质的基本理论及其在工程中的应用。

ISBN 7-03-034352-8

I. ①黄... ②张... ③黄... ④张... ⑤黄... ⑥张...

中国科学院图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 034352 号

本书主要介绍多相空隙介质的基本理论及其在工程中的应用。

科学出版社

北京

www.sciencep.com

010-64011213

科学出版社

科学出版社

科学出版社

科学出版社

科学出版社

科学出版社

科学出版社

科学出版社

科学出版社

北京

科学出版社

## 内 容 简 介

本书基于连续统物理中的混合物理论,详细地讨论了饱和、非饱和和弹性多孔介质的非线性本构方程和场方程,线性本构方程和场方程,饱和、非饱和和多孔弹性半空间动力问题及边介元方法,非饱和土的固结问题,饱和、非饱和和多孔弹性介质(土)地基与基础的动力相互作用问题以及相应数值计算结果。

本书可作为高等院校力学、土木工程和化工等专业的研究生教学参考用书,也可供相关学科科技人员参考。

### 图书在版编目(CIP)数据

多相空隙介质理论及其应用/黄义,张引科著. —北京:科学出版社, 2009

ISBN 978-7-03-024235-8

I. 多… II. ①黄…②张… III. 多相介质-研究 IV. 0357.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 034362 号

责任编辑:童安齐 陈迅 / 责任校对:耿 耘  
责任印制:吕春珉 / 封面设计:耕者设计工作室

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

双青印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2009 年 4 月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2009 年 4 月第一次印刷 印张:12 3/4

印数:1—2 000 字数:240 000

定价:38.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈双青〉)

销售部电话 010-62134988 编辑部电话 010-62137026(BZ08)

版权所有,侵权必究

举报电话:010-64030229; 010-64034315; 13501151303

## 前 言

天然的工程材料往往不是由单一的组分材料组成。它们一般是由固相、液相、气相组成,如地质材料,不论是土或是岩石,它们的共同特点是在微观结构上都具有颗粒结构、空隙、微裂纹等特征,并且在孔隙或微裂纹中往往含有流体或气体。特别是土介质,是由土固体颗粒形成土骨架结构从而构成多孔隙介质,而土骨架所形成的孔隙通常充满流体和气体,因而是一种标准的多相多孔隙介质,如非饱和土,是属于三相多孔介质;饱和土可作为固液两相多孔介质;地质工程中的油气层(岩石)则通常应属于固-油-气-水四相多孔隙介质。对于人工材料,如混凝土以及天然的生物骨骼,它们实际上也应是多相孔隙介质。因此,根据材料的形成(天然材料)和制造过程,众多的工程材料可以模拟成多相孔隙介质,其中首数岩土工程材料最具代表性且是应用广泛的工程材料。但时至今日,与之相关的岩土力学仍处于半经验半理论状态,还未形成完整的理论体系,那么建立它的数学物理模型,形成坚实的理论基础,以此研究它们的力学特性,对土木工程、水利工程、防护工程、海底隧道工程的设计、石油天然气开采、地热的利用与开发以及对学科理论的发展和工程应用都有重要意义。

岩土介质属多相孔隙介质,而多相孔隙介质的力学特性(变形与强度)是与各相的相对含量以及组分之间相互耦合的程度密切相关。它们在外力作用下,由于各相共同参与变形,各组分之间存在着强烈的相互作用和耦合运动,材料将表现出非常复杂的力学行为。正是由于各组分之间的相互作用,它们决定着多相孔隙介质的力学特性而不同于单相介质。例如,土介质中各组分相互作用和耦合运动,使土表现出非常复杂的力学行为。同时,土骨架分布的随机性、可变性以及孔隙形状的多样性,使得土的力学性质与形成土颗粒材料(单相固体)有很大的差异。土骨架的变形和孔隙中流体运动相互作用、相互耦合,又使得土在变形、强度和多种行为方面表现出与其组分物质完全不同的力学特点。显然,已有的单相介质的经典模式无法正确地描述多相孔隙介质的变形和强度。因此,如何有效地描述具有如此复杂的且无规律分布的内部结构的多相多孔隙介质的力学行为,就成为当前人们研究的热点和难点。

近些年来,随着计算机和高科技的发展的需要,物理学、数学方法越来越多地渗透到工程科学和应用基础学科,特别是随着力学学科的发展,力学与物理、数学的结合越来越紧密,从而形成了许多新的力学分支,如微、细观力学,多孔隙介质力学等。对于多相孔隙介质,事实上是由不同物性介质组合而成的混合体,由于它们

在变形和强度方面所表现出的复杂特性是受各组分之间的相互作用、相互制约的,那么采用连续统物理中的多孔介质混合物理论来建立相应的数学模型,这自然是顺理成章的事。

现代混合物理论是以连续统热力学理论和连续介质力学为基础的,是连续统物理中的一个主要的理论部分,也是理性力学的一个分支。它是用公理化体系的方法研究多组分复合介质共同运动与多种物理、化学现象的耦合。它能包容复杂因素,把运动学、动力学、热力学及本构理论融为一体。该理论的基本出发点是:将每一组分模拟为与之等效的均质连续体,将多相孔隙介质视为连续体的叠加且它们之间存在着相互作用。它们占有共同的物理空间,这样,不同组分的质点可以占有同一空间点,从而为研究不同组分的相互作用的数学描述提供了方便。由于混合物是由其组分的性质决定的,那么要描述某一组分的运动,只要适当考虑其他组分对该组分的各种作用,就可以将该组分与混合物的其他组分分离出来,每组分应服从基本物质方程,如质量守恒、动量守恒、动量矩守恒、能量守恒和热力学第二定律(熵不等式),而混合物(多相孔隙介质)的运动取决于与单相物质的运动所满足的相同的方程。因此,混合物有时又称相互作用连续介质力学。它主要包括混合物运动学(混合物运动的描述方法);混合物运动的基本规律(守恒定律,熵不等式)和混合物的本构理论(建立混合物本构方程的基本理论)。

本书以混合物理论为基础,以非饱和土为具体对象,研究非饱和多孔介质的行为规律,试图建立包括土介质在内的非饱和多孔介质的理论体系。书中将岩土介质视为多相多孔介质,将它们看作由土固体骨架、土孔隙内液体和土孔隙内气体的混合物,结合非饱和土的三种组分的物质特性,严格应用经典混合物理论建立非饱和土和饱和土的数学模型,并推导出非饱和土、饱和土的非线性(包括线性)本构方程和场方程及能量守恒方程,形成了解决非饱和土和饱和土的热力学过程的完备方程组。全书包括八章,主要内容如下。

第一章介绍了经典混合物理论的基本内容,其中包括混合物运动、混合物系统的守恒定律、混合物系统的熵不等式和混合物本构理论。

第二章论述了流体-固体混合物理论,建立了包括弹性、黏性、扩散、热传导和浮力效应以及混合物组分体积分数影响在内的流体-固体混合物理论,给出了非线性本构方程和混合物运动的场方程。Bowen的可压缩流体-固体弹性多孔介质混合物理论和不可压缩流体-固体弹性多孔介质混合物理论以及Eringen的弹性气体-黏性液体-弹性固体混合物理论是本理论的特例。

第三章论述了非饱和多孔介质混合物理论,其以混合物理论为基础,结合非饱和和多孔介质三种组分的基本特点,建立了非饱和多孔介质混合物的非线性本构方程和场方程。然后对非线性方程进行线性化,得到了各向同性非饱和多孔介质的线性粘弹性本构方程和场方程。最后把非饱和和多孔介质的线弹性本构方程和场方

程表示成与人们熟悉的 Biot 饱和多孔介质线弹性本构方程相似的形式,形成了各向同性弹性非饱和多孔介质的 Biot 型本构方程和运动场方程。

第四章中作者应用建立的非饱和多孔介质本构方程和场方程讨论了非饱和土混合物的基本特性,把本构方程和场方程简化为描述非饱和土几个基本性质的特殊规律,所得结果与土力学的试验结果及现有理论一致。

第五章叙述了非饱和多孔介质动力响应的频域边界元解法,推导出各向同性线弹性非饱和多孔介质频域动力响应的互易关系,给出了非饱和多孔介质固体位移和孔隙流体压力的积分表示,求出了频域动力响应方程的基本解,并且给出了非饱和多孔介质频域动力响应的边界元方程。

第六章论述了非饱和多孔介质的固结问题,首先建立了非饱和多孔介质固结方程,在 Laplace 变换域中求解了非饱和多孔介质的固结方程,并且给出了基本解。在此基础上也可以建立非饱和多孔介质固结问题的边界元方程。

第七章论述了非饱和多孔介质动力特性和地基板动力相互作用问题,首先使用 Hankel 变换求解了非饱和多孔介质轴对称稳态动力响应基本方程,同时用边界应力光滑条件和法向位移连续条件把地基和基础联系起来,研究了地基和基础相互作用特性,最后,还求解了非饱和多孔介质的 Lamb 问题。

第八章讨论了各向同性和横观各向同性饱和多孔介质非轴对称稳态动力响应及与基础相互作用给出的大量数值结果。

本书是系统应用现代混合物理论论述包括岩土在内的多相孔隙介质理论方面的专著。书中内容基本上是作者的研究成果,由于作者的水平所限,书中不足之处在所难免,恳请读者批评指正。

本书的主要内容获得国家自然科学基金项目(项目编号:59678003)、教育部重点科研项目(项目编号:205159)和陕西自然科学基金项目(项目编号:2007A15)资助,在此对国家自然科学基金委员会、教育部和陕西省科技厅表示感谢。

在本书撰写期间,西安建筑科技大学科技处以及理学院的领导给予了大力支持,在此向他们表示深切感谢。研究生郭春霞为本书出版做了大量工作,在此一并表示感谢。

作者

2008 年 9 月



# 目 录

|                                    |    |
|------------------------------------|----|
| 第一章 混合物理论基础                        | 1  |
| 1.1 混合物运动学                         | 1  |
| 1.2 质量守恒定律                         | 4  |
| 1.3 动量守恒定律、动量矩守恒定律和能量守恒定律          | 6  |
| 1.3.1 动量守恒定律                       | 6  |
| 1.3.2 动量矩守恒定律                      | 7  |
| 1.3.3 能量守恒定律                       | 8  |
| 1.4 混合物系统的熵不等式                     | 9  |
| 1.5 混合物系统的本构假设                     | 11 |
| 第二章 流体-固体混合物理论                     | 13 |
| 2.1 本构变量和本构方程                      | 13 |
| 2.2 非线性本构方程和场方程                    | 14 |
| 2.3 混合物运动的完备方程组                    | 18 |
| 2.4 混合物系统的能量守恒方程和热力学平衡状态           | 19 |
| 2.5 非线性本构方程和场方程的特例                 | 20 |
| 2.5.1 可压缩流体-固体混合物                  | 20 |
| 2.5.2 不可压缩流体-固体混合物                 | 21 |
| 2.5.3 弹性气体-黏性液体-弹性固体混合物            | 22 |
| 第三章 非饱和多孔介质混合物理论                   | 24 |
| 3.1 对非饱和和多孔介质的基本假设                 | 24 |
| 3.2 非饱和和多孔介质混合物的熵不等式               | 24 |
| 3.2.1 饱和混合物的熵不等式                   | 25 |
| 3.2.2 非饱和和多孔介质混合物的熵不等式             | 26 |
| 3.3 非饱和和多孔介质混合物的非线性本构方程和场方程        | 27 |
| 3.4 非饱和和多孔介质混合物的线性本构方程和线性场方程       | 30 |
| 3.4.1 本构方程耗散部分的线性化                 | 30 |
| 3.4.2 本构方程非耗散部分的线性化                | 32 |
| 3.4.3 各向同性非饱和和多孔介质混合物的线性本构方程和线性场方程 | 36 |
| 3.5 各向同性非饱和和多孔介质的 Biot 型方程         | 40 |

|                                        |     |
|----------------------------------------|-----|
| <b>第四章 非饱和土有关问题的讨论</b>                 | 44  |
| 4.1 非饱和土的有效应力和应力状态参量                   | 44  |
| 4.2 非饱和土的 Darcy 定律                     | 46  |
| 4.3 饱和多孔介质的 Biot 方程                    | 47  |
| 4.4 非饱和多孔介质本构方程中弹性系数测量方法               | 48  |
| <b>第五章 非饱和和多孔介质动力响应的频域边界元方法</b>        | 51  |
| 5.1 基本方程                               | 51  |
| 5.2 边界积分公式                             | 54  |
| 5.3 场方程的基本解                            | 57  |
| 5.4 动力响应频域边界元方程                        | 61  |
| 5.5 二维问题的基本解                           | 63  |
| 5.6 一维频域动力响应的解析解                       | 65  |
| 5.6.1 一维频域动力方程的解                       | 65  |
| 5.6.2 上表面受简谐应力激励的非饱和和多孔介质层             | 67  |
| 5.6.3 底面受简谐位移激励的非饱和和多孔介质层              | 69  |
| 5.7 非饱和和多孔介质频域动力响应数值计算结果               | 71  |
| 5.7.1 非饱和和多孔介质中波的传播速度和衰减系数             | 71  |
| 5.7.2 非饱和和多孔介质动力响应特性                   | 77  |
| 5.7.3 非饱和和多孔介质动力响应频域边界元方法的数值计算结果       | 83  |
| <b>第六章 非饱和和多孔介质固结问题</b>                | 86  |
| 6.1 非饱和和多孔介质固结问题的基本方程                  | 86  |
| 6.2 非饱和和多孔介质固结方程在 Laplace 变换域中的边界积分方程  | 87  |
| 6.2.1 Laplace 变换域中的固结方程                | 87  |
| 6.2.2 Laplace 变换域中的互易关系                | 88  |
| 6.2.3 固结方程在 Laplace 变换域的基本解            | 90  |
| 6.2.4 Laplace 变换域中二维固结问题的基本解           | 94  |
| 6.3 横向无限区域非饱和和多孔介质的轴对称固结问题             | 96  |
| 6.3.1 Laplace 变换域固结方程的 Hankel 变换解      | 96  |
| 6.3.2 半空间非饱和和多孔介质的轴对称固结问题              | 100 |
| <b>第七章 非饱和和多孔介质地基与薄板基础的轴对称稳态动力相互作用</b> | 104 |
| 7.1 非饱和和多孔介质轴对称稳态动力响应的 Hankel 变换解      | 104 |
| 7.2 圆形薄板基础与半空间非饱和和多孔介质地基轴对称稳态动力相互作用    | 108 |
| 7.3 地基和基础相互作用的数值计算结果                   | 112 |
| 7.4 非饱和和多孔介质 Lamb 问题                   | 120 |



|                                                 |     |
|-------------------------------------------------|-----|
| 第八章 各向同性和横观各向同性饱和弹性多孔介质非轴对称动力响应及其与基础相互作用.....   | 124 |
| 8.1 三维各向同性饱和多孔介质动力响应 .....                      | 124 |
| 8.1.1 三维非轴对称饱和弹性层 .....                         | 124 |
| 8.1.2 三维非轴对称饱和介质的 Lamb 问题 .....                 | 132 |
| 8.2 横观各向同性饱和弹性多孔介质非轴对称动力响应 .....                | 138 |
| 8.2.1 横观各向同性饱和弹性多孔介质 Biot 基本方程 .....            | 138 |
| 8.2.2 Biot 波动方程的非轴对称解 .....                     | 139 |
| 8.2.3 横观各向同性饱和弹性多孔介质中的应力分布 .....                | 145 |
| 8.2.4 横观各向同性饱和弹性多孔介质非轴对称动力响应边值问题的处理方法 .....     | 147 |
| 8.2.5 竖向非轴对称简谐荷载作用下半空间横观各向同性饱和弹性多孔介质的动力响应 ..... | 148 |
| 8.3 横观各向同性饱和弹性多孔介质三维非轴对称 Lamb 问题 .....          | 153 |
| 8.3.1 Biot 波动方程的变换 .....                        | 153 |
| 8.3.2 横观各向同性饱和弹性多孔介质三维波动方程的解 .....              | 155 |
| 8.3.3 横观各向同性饱和多孔介质的 Lamb 问题 .....               | 161 |
| 8.3.4 数值算例及分析 .....                             | 164 |
| 8.4 横观各向同性饱和多孔介质与基础的动力相互作用 .....                | 172 |
| 8.4.1 柱坐标下横观各向同性饱和多孔弹性介质半空间问题动力响应的解 ...         | 172 |
| 8.4.2 饱和半空间体表面受法向力作用 .....                      | 179 |
| 8.4.3 饱和多孔半空间与薄圆板的动力相互作用 .....                  | 181 |
| 参考文献.....                                       | 187 |

## 第一章 混合物理论基础

混合物(mixture)是由几种不同性质(物理性质或化学性质)的单一物质混合而成的复杂介质。这些物质的混合可以是局部和整体都均匀的混合(如混合气体和溶液等),也可以是局部不均匀但整体均匀的混合(如悬浮溶液和多孔介质等)。组成混合物的单一物质是混合物的组分(constituent),混合物组分之间不仅可能存在相对运动,而且可能存在相互作用,甚至可能存在物质转化(如相变和化学反应等)。混合物理论(mixture theory)就是研究混合物组分运动规律、相互作用规律和相互转化规律,以及混合物整体运动和变化与外界对混合物作用之间关系的理论体系。

混合物理论以热力学理论为基础,是对单一物质连续统理论<sup>[26,27]</sup>的拓展,也称为相互作用连续介质理论,具有很好的自恰性和系统性。该理论有三个基本公设:

1) 混合物的性质完全由其组分的性质决定(All properties of the mixture must be mathematical consequences of properties of the constituents)。

2) 要描述混合物某一组分的运动,只要适当考虑其他组分对该组分的作用,就可以把这个组分从混合物中分离出来(So as to describe the motion of a constituent, we may in imagination isolate it from the rest of the mixture, provided we allow properly for the actions of the other constituents on it)。

3) 混合物的运动和单一物质的运动满足相同的方程(The motion of the mixture is governed by the same equations as is a single body)。

为了使后面叙述更加方便,本章主要根据文献[6]介绍经典混合物理论(classical mixture theory)的主要内容。所谓经典混合物理论就是无微结构混合物的连续统理论。

### 1.1 混合物运动学

考虑同时处在空间某区域的  $N$  种连续介质  $B^a$  ( $a = 1, 2, \dots, N$ ) 形成的混合物。给混合物每一组分选定一个参考构形,第  $a$  种组分质点在参考构形中的坐标(物质坐标)用  $\mathbf{X}_a$  表示。各组分质点的运动构成了混合物的运动和变形。第  $a$  种组分的运动方程(motion equation)是

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}_a(\mathbf{X}_a, t) \quad (1.1.1)$$

式中,  $t$  为时间,  $\mathbf{x}$  (空间坐标) 为质点  $\mathbf{X}_a$  在  $t$  时刻的空间位置。该方程也称为第  $a$  种组分的形变函数(deformation function)。假设各组分的运动满足连续性公设, 则方程(1.1.1)在空间点  $\mathbf{x}$  处的邻域内有唯一的逆

$$\mathbf{X}_a = \mathbf{X}_a(\mathbf{x}, t) \quad (1.1.2)$$

连续性公设不仅保证每种组分的每个质点在任意时刻只能占据空间一点, 而且保证了同一组分的不同质点不能同时占据空间同一点。质点  $\mathbf{X}_a$  在  $t$  时刻的速度和加速度分别定义为

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{x}'_a = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}_a(\mathbf{X}_a, t) = \partial_t \mathbf{x}_a(\mathbf{X}_a, t) \quad (1.1.3)$$

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{x}''_a = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{x}_a(\mathbf{X}_a, t) = \partial_t^2 \mathbf{x}_a(\mathbf{X}_a, t) \quad (1.1.4)$$

$(\cdot)'_a$  表示与第  $a$  组分运动有关的物质导数。利用(1.1.2)式, 质点  $\mathbf{X}_a$  的速度和加速度还能表示为空间坐标  $\mathbf{x}$  和时间  $t$  的函数, 即

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_a(\mathbf{x}, t) \quad (1.1.5)$$

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_a(\mathbf{x}, t) \quad (1.1.6)$$

它们分别表示  $t$  时刻处在空间点  $\mathbf{x}$  处的第  $a$  组分质点运动速度和加速度。

质点  $\mathbf{X}_a$  处  $t$  时刻的形变梯度(deformation gradient)定义为线性变换

$$\mathbf{F}_a = \text{grad} \mathbf{x}_a(\mathbf{X}_a, t) \quad (1.1.7)$$

$$\det \mathbf{F}_a \geq 0 \quad (1.1.8)$$

其中

$\mathbf{F}_a = F_{akK} \mathbf{i}_k \otimes \mathbf{i}_K$  而  $F_{akK} = \partial \mathbf{x}_k / \partial \mathbf{X}_K$ , 线性变换  $\mathbf{F}_a$  的矩阵  $[\mathbf{F}_a]$  可以写成

$$[\mathbf{F}_a] = \begin{bmatrix} F_{a11} & F_{a12} & F_{a13} \\ F_{a21} & F_{a22} & F_{a23} \\ F_{a31} & F_{a32} & F_{a33} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{F}_a$  的逆变换是

$$\mathbf{F}_a^{-1} = \text{grad} \mathbf{X}_a(\mathbf{x}_a, t) \quad (1.1.9)$$

满足关系

$$\mathbf{F}_a \mathbf{F}_a^{-1} = \mathbf{F}_a^{-1} \mathbf{F}_a = \mathbf{I} \quad (1.1.10)$$

这里, “GRAD”表示关于物质坐标取梯度, “grad”表示关于空间坐标取梯度,  $\mathbf{I}$  是二阶单位张量。质点  $\mathbf{X}_a$  处的二阶变形梯度张量(second deformation gradient)为

$$\mathbf{G}_a = \text{grad} \mathbf{F}_a \quad (1.1.11)$$

$t$  时刻空间点  $\mathbf{x}$  处第  $a$  组分的速度梯度(velocity gradient)是

$$\mathbf{L}_a = \text{grad} \mathbf{v}_a(\mathbf{x}, t) \quad (1.1.12)$$

根据链式规则, 有

$$\mathbf{L}_a = \mathbf{F}'_a \mathbf{F}_a^{-1} \quad (1.1.13)$$

$\mathbf{L}_a$  还可以利用形变率张量(deformation rate tensor) $\mathbf{d}_a$  和自旋张量(spin tensor) $\mathbf{w}_a$  表示成

$$\mathbf{L}_a = \mathbf{d}_a + \mathbf{w}_a \quad (1.1.14)$$

其中

$$\mathbf{d}_a = \frac{1}{2}(\mathbf{L}_a + \mathbf{L}_a^T) \quad (1.1.15)$$

$$\mathbf{w}_a = \frac{1}{2}(\mathbf{L}_a - \mathbf{L}_a^T) \quad (1.1.16)$$

分别表示张量  $\mathbf{L}_a$  的对称部分和反对称部分,  $(\ )^T$  表示二阶张量的转置张量。

设  $\rho_a$  是第  $a$  组分的密度, 则混合物的密度就是

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \sum_{a=1}^N \rho_a(\mathbf{x}, t) \quad (1.1.17)$$

$\rho_a$  表示单位体积混合物中第  $a$  组分的质量, 称为第  $a$  组分的密度(bulk density)。单位体积第  $a$  组份物质的质量用  $\gamma_a$  表示。相对于体密度  $\rho_a$ , 把  $\gamma_a$  称为第  $a$  组分的真密度(true density)或物质密度(material density)。第  $a$  组份体密度和真密度的比值定义为第  $a$  组分的体积分数(volume fraction) $\phi_a$ , 即

$$\phi_a(\mathbf{x}, t) = \frac{\rho_a(\mathbf{x}, t)}{\gamma_a(\mathbf{x}, t)} \quad (1.1.18)$$

$\phi_a$  表示单位体积混合物中第  $a$  组分所占的体积。 $\phi_a (a = 1, 2, \dots, N)$  是混合物局部结构的粗略描述, 若

$$\sum_{a=1}^N \phi_a = 1 \quad (1.1.19)$$

则称这种混合物为饱和混合物(saturated mixture), 饱和混合物的组分之间没有空隙; 若

$$\sum_{a=1}^N \phi_a < 1 \quad (1.1.20)$$

则称这种混合物为非饱和混合物(unsaturated mixture), 这种混合物的组分之间有空隙。

如果混合物是由一种多孔固体介质(porous solid medium)形成的固体骨架(solid skeleton)和充满固体骨架孔隙的多种流体组成的多孔介质混合物, 那么该混合物的孔隙率(void ratios)为

$$n = 1 - \phi_s = \sum_{f=1}^N \phi_f \quad (1.1.21)$$

其中  $\phi_s$  是固体组分的体积分数;  $\phi_f (f = 1, 2, \dots, N)$  是  $N-1$  种孔隙流体的体积分数。 $n$  是单位体积混合物中流体组分所占体积, 也就是单位体积混合物中固体骨架孔隙体积。混合物第  $f$  种流体组分的饱和度(degree of saturation)是

$$s_f = \frac{\phi_f}{(1 - \phi_s)} \quad (f = 2, 3, \dots, N) \quad (1.1.22)$$

显然

$$\sum_f s_f = 1 \quad (f = 2, 3, \dots, N) \quad (1.1.23)$$

空间点  $\mathbf{x}$  处混合物的运动速度是组分速度的质量加权平均值, 定义为

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\rho} \sum_a \rho_a \mathbf{v}_a \quad (1.1.24)$$

第  $a$  组分扩散速度(diffusion velocity)或质心系速度(barycentric velocity) $\mathbf{u}_a$  是  $\mathbf{v}_a$  与  $\mathbf{v}$  的差值

$$\mathbf{u}_a(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}_a(\mathbf{x}, t) - \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \quad (1.1.25)$$

根据方程式(1.1.17)、式(1.1.24)和式(1.1.25), 可以证明

$$\sum_a \rho_a \mathbf{u}_a = 0 \quad (1.1.26)$$

设  $\Gamma$  是  $\mathbf{x}$  和  $t$  的函数, 它与混合物第  $a$  组分运动有关的物质导数(material derivative)定义为

$$\Gamma'_a = \partial_t \Gamma[\mathbf{x}(\mathbf{X}_a, t), t]_{\mathbf{x}_a} \quad (1.1.27)$$

还可以表示为

$$\Gamma'_a = \partial_t \Gamma(\mathbf{x}, t) + [\text{grad} \Gamma(\mathbf{x}, t)] \cdot \mathbf{v}_a(\mathbf{x}, t) \quad (1.1.28)$$

从上式推导出

$$\Gamma'_a - \Gamma'_b = [\text{grad} \Gamma(\mathbf{x}, t)] \cdot (\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b) \quad (1.1.29)$$

函数  $\Gamma$  与  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  有关的运动导数(motion derivative)定义为

$$\dot{\Gamma} = \partial_t \Gamma(\mathbf{x}, t) + [\text{grad} \Gamma(\mathbf{x}, t)] \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \quad (1.1.30)$$

从式(2.1.28)和式(2.1.30)得出关系式

$$\dot{\Gamma}'_a - \dot{\Gamma} = [\text{grad} \Gamma(\mathbf{x}, t)] \cdot \mathbf{u}_a(\mathbf{x}, t) \quad (1.1.31)$$

## 1.2 质量守恒定律

以混合物所在空间内的固定区域  $R$  为研究对象。区域  $R$  中混合物第  $a$  组分的质量守恒定律是

$$\partial_t \int_R \rho_a dv = - \oint_{\partial R} \rho_a \mathbf{v}_a \cdot d\mathbf{s} + \int_R c_a dv \quad (1.2.1)$$

式中,  $dv$  是体积元;  $d\mathbf{s}$  是区域  $R$  边界  $\partial R$  上正向向外的面元矢量;  $c_a$  是第  $a$  组分的质量供给量(growth of mass), 它表示单位混合物中单位时间内由其他组分物质转化为第  $a$  组分的质量。区域  $R$  中混合物的质量守恒定律是

$$\partial_t \int_R \rho dv = - \oint_{\partial R} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} \quad (1.2.2)$$

比较以上两式,得

$$\sum_a \int_R c_a dv = 0 \quad (1.2.3)$$

可见,混合物的质量守恒就是混合物总质量不变。

把式(1.2.2)~式(1.2.3)局部化,得出第  $a$  组分和混合物质量守恒定律的局部形式分别是

$$\partial_t \rho_a + \operatorname{div}(\rho_a \mathbf{v}_a) = c_a \quad (1.2.4)$$

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1.2.5)$$

$$\sum_a c_a = 0 \quad (1.2.6)$$

式(1.2.5)和式(1.2.6)等价。式(1.2.4)还能表示成

$$\rho'_a + \rho_a \operatorname{div} \mathbf{v}_a = c_a \quad (1.2.7)$$

$$(\rho_a |\det \mathbf{F}_a|)' = |\det \mathbf{F}_a| c_a \quad (1.2.8)$$

推导式(1.2.8)时应用了等式  $(|\det \mathbf{F}_a|)' = |\det \mathbf{F}_a| \operatorname{div} \mathbf{v}_a$ 。把式(1.2.8)表示为  $X_a$  和  $t$  的函数,再对时间积分就是

$$\rho_a = \rho_{aR} |\det \mathbf{F}_a|^{-1} \exp \int_{t_0}^t \frac{c_a}{\rho_a} dt \quad (1.2.9)$$

式中,  $\rho_{aR}$  是第  $a$  组分在  $t_0$  时刻参考构形中的体密度。式(1.2.9)表示第  $a$  组分质点  $X_a$  处体密度  $\rho_a$  与时间和介质局部变形的关系。若第  $a$  组分的质量供给量  $c_a = 0$ , 则式(1.2.9)简化为

$$\rho_a |\det \mathbf{F}_a| = \rho_{aR} \quad (1.2.10)$$

第  $a$  组分体密度的梯度(bulk density gradient)定义为

$$\mathbf{e}_a = \operatorname{grad} \rho_a \quad (1.2.11)$$

把式(1.2.10)代入,  $\mathbf{e}_a$  表示为

$$\mathbf{e}_a = |\det \mathbf{F}_a|^{-1} (\operatorname{GRAD} \rho_{aR}) \mathbf{F}_a^{-1} - \rho_a (\mathbf{F}_a^{-T} [\mathbf{G}_a]) \mathbf{F}_a^{-1} \quad (1.2.12)$$

推导过程中应用了等式  $\partial |\det \mathbf{F}_a| / \partial \mathbf{F}_a = |\det \mathbf{F}_a| \mathbf{F}_a^{-1}$ 。上式表明,体密度  $\rho_a$  在空间的变化与组分变形和初始密度分布  $\rho_{aR}$  都有关系。当初始密度在空间均匀时,  $\mathbf{e}_a$  只与组分变形有关

$$\mathbf{e}_a = -\rho_a (\mathbf{F}_a^{-T} [\mathbf{G}_a]) \mathbf{F}_a^{-1} \quad (1.2.13)$$

式中

$$\mathbf{A}[\mathbf{B}] = A_{k_1 k_2 \dots k_p} B_{k_1 k_2 \dots k_p q} \quad (1.2.14)$$

设

$$\mathbf{\Gamma}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\rho} \sum_a \rho_a \mathbf{\Gamma}_a(\mathbf{x}, t) \quad (1.2.15)$$

可以证明

$$\rho \dot{\mathbf{\Gamma}} = \sum_a [\rho_a \dot{\mathbf{\Gamma}}_a - \operatorname{div}(\rho_a \mathbf{\Gamma}_a \mathbf{u}_a)] + c_a \mathbf{\Gamma}_a \quad (1.2.16)$$



如果第  $a$  组分物质不可压缩, 则其真密度为常量。利用式 (1.1.18), 式 (1.2.7)~式 (1.2.13) 简化为关于第  $a$  组分体积分数  $\phi_a$  的方程, 它们是

$$\phi'_a + \phi_a \operatorname{div} \mathbf{v}_a = \frac{c_a}{\gamma_a} \quad (1.2.17)$$

$$(\phi_a |\det \mathbf{F}_a|)' = |\det \mathbf{F}_a| \frac{c_a}{\gamma_a} \quad (1.2.18)$$

$$\phi_a = \phi_{aR} |\det \mathbf{F}_a|^{-1} \exp \left( \frac{1}{\gamma_a} \int_{t_0}^t \frac{c_a}{\phi_a} dt \right) \quad (1.2.19)$$

$$\phi_a |\det \mathbf{F}_a| = \phi_{aR} \quad (c_a = 0) \quad (1.2.20)$$

$$\operatorname{grad} \phi_a = |\det \mathbf{F}_a|^{-1} (\operatorname{grad} \phi_{aR}) \mathbf{F}_a^{-1} - \phi_a (\mathbf{F}_a^{-T} [\mathbf{G}_a]) \mathbf{F}_a^{-1} \quad (1.2.21)$$

$$\operatorname{grad} \phi_a = -\phi_a (\mathbf{F}_a^{-T} [\mathbf{G}_a]) \mathbf{F}_a^{-1} \quad (\operatorname{grad} \phi_{aR} = 0) \quad (1.2.22)$$

这里  $\phi_{aR}$  是第  $a$  组分在  $t_0$  时刻参考构形中的体积分数。

有时描述混合物两种组分的相对运动 (如多孔介质孔隙流体相对于固体骨架的运动) 有重要意义。此时把式 (1.2.7) 改写为

$$(\det \mathbf{F}_s \rho_f)'_s = \operatorname{div} \{ \det \mathbf{F}_s \rho_f \mathbf{F}_s^{-1} (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s) \} + |\det \mathbf{F}_s| c_f \quad (1.2.23)$$

式中,  $(\det \mathbf{F}_s \rho_f)$  是在  $s$  组分参考构形单位体积中的第  $f$  组分物质质量;  $\{ \det \mathbf{F}_s \rho_f \mathbf{F}_s^{-1} (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s) \}$  是第  $f$  组分流出第  $s$  组分物质面元的质量通量 (mass flux);  $(|\det \mathbf{F}_s| c_f)$  是在  $s$  组分参考构形单位体积内第  $f$  组分的质量供给量。式 (1.2.23) 的物理意义是显而易见的, 它是在  $s$  组分参考构形中的对第  $f$  组分质量守恒定律的描述。若  $\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_s$ , 则式 (1.2.23) 对时间的积分就是

$$\rho_f = \rho_{fR} |\det \mathbf{F}_s|^{-1} \exp \int_{t_0}^t \frac{c_f}{\rho_f} dt \quad (1.2.24)$$

上式与式 (1.2.9) 结合, 有

$$\frac{\rho_f}{\rho_s} = \left( \frac{\rho_{fR}}{\rho_{sR}} \right) \exp \left[ \int_{t_0}^t \left( \frac{c_f}{\rho_f} - \frac{c_s}{\rho_s} \right) dt \right] \quad (1.2.25)$$

此式对在  $s$  组分参考构形中研究第  $f$  组分体密度随时间变化非常有用。

### 1.3 动量守恒定律、动量矩守恒定律和能量守恒定律

动量守恒定律、动量矩守恒定律和能量守恒定律是自然界的基本规律。所有物质的运动都要服从这三个守恒定律, 混合物的运动变化也不例外。

#### 1.3.1 动量守恒定律

区域  $R$  内第  $a$  组分的动量守恒定律和混合物的动量守恒定律分别表示为

$$\partial_t \int_R \rho_a \mathbf{v}_a dv = - \oint_{\partial R} \rho_a \mathbf{v}_a (\mathbf{v}_a \cdot d\mathbf{s}) + \oint_{\partial R} \mathbf{t}_a ds + \int_R (\rho_a \mathbf{b}_a + \mathbf{p}_a) dv \quad (1.3.1)$$

$$\partial_i \int_R \rho \mathbf{v} dv = - \oint_{\partial R} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}) + \oint_{\partial R} \mathbf{t} ds + \int_R \rho \mathbf{b} dv \quad (1.3.2)$$

式中,  $\mathbf{t}_a$  是第  $a$  组分的偏应力张量 (partial stress tensor), 它表示区域  $R$  外的混合物通过边界  $\partial R$  对区域  $R$  内第  $a$  组分的作用力;  $\mathbf{p}_a$  是第  $a$  组分动量供给量 (moment supply), 表示区域  $R$  内其他组分对第  $a$  组分的动量作用, 又称为局部体力 (local body force) 或内体力 (inner body force);  $\mathbf{b}_a$  是第  $a$  组分的外体力密度;  $\mathbf{t}$  是混合物的应力张量, 定义为

$$\mathbf{t} = \sum_a (\mathbf{t}_a - \rho_a \mathbf{u}_a \otimes \mathbf{u}_a) \quad (1.3.3)$$

“ $\otimes$ ”表示张量积。(1.3.3)式定义的混合物应力张量  $\mathbf{t}$  满足

$$\mathbf{t} - \rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} = \sum_a (\mathbf{t}_a - \rho_a \mathbf{v}_a \otimes \mathbf{v}_a) \quad (1.3.4)$$

混合物应力张量的内部部分 (inner part) 是

$$\mathbf{t}_i = \sum_a \mathbf{t}_a \quad (1.3.5)$$

混合物外体力密度  $\mathbf{b}$  与第  $a$  组分的外体力密度  $\mathbf{b}_a$  的关系是

$$\rho \mathbf{b} = \sum_a \rho_a \mathbf{b}_a \quad (1.3.6)$$

应用式(1.2.4), 动量守恒定律式(1.3.1)和式(1.3.2)的局部形式分别是

$$\rho_a \dot{\mathbf{v}}_a + c_a \mathbf{v}_a = \text{div} \mathbf{t}_a + \rho_a \mathbf{b}_a + \mathbf{p}_a \quad (1.3.7)$$

$$\rho \dot{\mathbf{v}} = \text{div} \mathbf{t} + \rho \mathbf{b} \quad (1.3.8)$$

比较以上两式, 得

$$\sum_a \mathbf{p}_a = 0 \quad (1.3.9)$$

式(1.3.9)说明: 各组分之间的相互作用对混合物整体运动没有影响。式(1.3.8)和式(1.3.9)等价, 都是混合物动量守恒的表述。

### 1.3.2 动量矩守恒定律

区域  $R$  内第  $a$  组分的动量矩守恒定律和混合物的动量矩守恒定律分别表示为

$$\begin{aligned} \partial_i \int_R \rho_a \mathbf{x}_0 \times \mathbf{v}_a dv = & - \oint_{\partial R} \rho_a (\mathbf{x}_0 \times \mathbf{v}_a) \mathbf{v}_a \cdot d\mathbf{s} + \oint_{\partial R} \mathbf{x}_0 \times (\mathbf{t}_a ds) \\ & + \int_R \mathbf{x}_0 \times (\rho_a \mathbf{b}_a + \mathbf{p}_a) dv + \int_R \mathbf{m}_a dv \end{aligned} \quad (1.3.10)$$

$$\partial_i \int_R \rho \mathbf{x}_0 \times \mathbf{v} dv = - \oint_{\partial R} \rho (\mathbf{x}_0 \times \mathbf{v}) (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}) + \oint_{\partial R} \mathbf{x}_0 \times (\mathbf{t} ds) + \int_R \mathbf{x}_0 \times \rho \mathbf{b} dv \quad (1.3.11)$$

式中,  $\mathbf{x}_0$  是点  $\mathbf{x}$  处对某固定点的矢径;  $\mathbf{m}_a$  是对第  $a$  组分的动量矩供给量, 反映了对

该组分的偶应力(couple stress)作用。 $\int_R (\mathbf{x}_0 \times \mathbf{p}_a + \mathbf{m}_a) dv$  表示区域  $R$  内其他组分对第  $a$  组分的动量矩作用。式(1.3.9)和式(1.3.10)的局部形式分别是

$$\mathbf{t}_a - \mathbf{t}_a^T = \mathbf{M}_a \quad (1.3.12)$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}^T \quad (1.3.13)$$

张量  $\mathbf{M}_a$  是与矢量  $\mathbf{m}_a$  对应的反对称张量,它是一个线性变换。对任意矢量  $\mathbf{x}_0$ ,  $\mathbf{M}_a$  满足

$$\mathbf{M}_a \mathbf{x}_0 = \mathbf{m}_a \times \mathbf{x}_0 \quad (1.3.14)$$

$\mathbf{M}_a$  的分量是

$$\begin{aligned} M_{a11} = M_{a22} = M_{a33} = 0, \quad M_{a23} = -M_{a32} = m_{a1} \\ M_{a31} = -M_{a13} = M_{a2}, \quad M_{a12} = -M_{a21} = m_{a3} \end{aligned} \quad (1.3.15)$$

从式(1.3.11)可以看出:组分偏应力张量  $\mathbf{t}_a$  是非对称张量。当对第  $a$  组分的偶应力作用为零时,其偏应力张量才是对称张量。但混合物应力张量  $\mathbf{t}$  及其内部部分  $\mathbf{t}_i$  总是对称张量,这一点能从式(1.3.3)和式(1.3.12)得到证明。另外还有

$$\sum_a \mathbf{M}_a = 0 \quad (1.3.16)$$

这也是混动量矩守恒定律的表述形式,与式(1.3.12)等价。

### 1.3.3 能量守恒定律

区域  $R$  内第  $a$  组分的能量守恒定律和混合物的能量守恒定律分别表示为

$$\begin{aligned} \partial_t \int_R \rho_a \left( \epsilon_a + \frac{1}{2} v_a^2 \right) dv = - \oint_{\partial R} \rho_a \left( \epsilon_a + \frac{1}{2} v_a^2 \right) \mathbf{v}_a \cdot d\mathbf{s} + \oint_{\partial R} (\mathbf{t}_a^T \mathbf{v}_a - \mathbf{q}_a) \cdot d\mathbf{s} \\ + \int_R (\rho_a \mathbf{r}_a + \rho_a \mathbf{v}_a \cdot \mathbf{b}_a + \epsilon_a) dv \end{aligned} \quad (1.3.17)$$

$$\partial_t \int_R \rho \left( \epsilon + \frac{1}{2} v^2 \right) dv = - \oint_{\partial R} \rho \left( \epsilon + \frac{1}{2} v^2 \right) \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} + \oint_{\partial R} (\mathbf{t}^T \mathbf{v} - \mathbf{q}) \cdot d\mathbf{s} + \int_R (\rho r + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{b}) dv \quad (1.3.18)$$

式中,  $\epsilon_a$  是第  $a$  组分的内能密度(inner energy density)(不包括动能);  $\mathbf{q}_a$  是第  $a$  组分的偏热流通量矢量(partial heat flux vector);  $\mathbf{r}_a$  是第  $a$  组分的外热供给量;  $\epsilon_a$  是对第  $a$  组分的能量供给量,  $\epsilon$  是混合物的能量密度, 定义为

$$\epsilon = \frac{1}{\rho} \sum_a \left( \rho_a \epsilon_a + \frac{1}{2} \rho_a u_a^2 \right) \quad (1.3.19)$$

满足

$$\rho \left( \epsilon + \frac{1}{2} v^2 \right) = \sum_a \rho_a \left( \epsilon_a + \frac{1}{2} v_a^2 \right) \quad (1.3.20)$$