普通高等教育“十一五”国家级规划教材

计算机数学基础

○主编　王信峰

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

计算机数学基础

主编　王信峰

高等教育出版社

内容提要

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材，是在“CEAC国家信息化培训认证”指定教材的基础上编写而成的。主要内容涉及一元微积分、矩阵、概率、初等数论、布尔代数、图论与数据结构等相关知识，还在开篇介绍了数值计算与算法基础。作为一本基础课程教材，本书在内容选择上遵照“必须够用”的原则，体现了面向专业、为专业人才培养服务的理念。

本书可作为高职高专院校计算机、信息等专业的教材，也可供工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

计算机数学基础/王信峰主编. —北京：高等教育出版社，2009.2

ISBN 978-7-04-025756-4

Ⅰ.计… Ⅱ.王… Ⅲ.电子计算机-数学基础-高等学校-教材 Ⅳ.TP301.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第003564号

策划编辑 邓雁城 **责任编辑** 张耀明 **封面设计** 王凌波 **责任绘图** 尹 莉
版式设计 马敬茹 **责任校对** 杨雪莲 **责任印制** 尤 静

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100120	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京铭成印刷有限公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×1092 1/16	**版　　次**	2009年2月第1版
印　　张	17.5	**印　　次**	2009年2月第1次印刷
字　　数	390 000	**定　　价**	24.50元

物料号　25756-00

前　言

计算机数学是计算机专业的一门基础课程，它不仅应为计算机专业其他课程的学习提供必要的数学知识，为计算机应用提供必要的数学思想，也应为计算机专业学生数学素养的养成提供必要的环境。

这本教材就是为计算机数学课程编写的。它遵循“以应用为目的，以必须、够用为度”的原则，在内容取舍与编排上，注意与计算机专业的实际应用相结合，注重实践性教学环节的设计，特别是算法设计与编程实践，注重数学基本概念与数学基本思想的讲解，特别是注重学生利用计算机解决实际问题能力的培养。针对计算机专业人才培养目标，本书在“内容设计与专业结合、教学设计贴近学生、教学设计也利于教师教”的编写思路指导下，在以下几方面做了努力：

考虑到计算机数学应用的基础就是算法，本书以算法设计为主线，在注意内容依据数学专业需求取舍的同时，本书大量使用了N-S流程图，借以突出数学思想的计算机应用，使得数学与计算机应用有机地融为一体。

本书注意到了理论与实践——算法设计与计算机编程的结合。首先，考虑到教材的适用面，在编写中，尽量做到主体内容与编程实践分离，将数学软件的相关内容放在每章之后以及将软件简介放在附录中，都是基于此考虑的，这样做也同时照顾了在实际教学中有编程实践时间与没有编程实践时间的差异，也利于熟悉其他计算机语言，如MATLAB、高级语言C、Java等，并给学生充分自我发挥的空间。其次，考虑到学生已比较熟悉计算机，为通过算法体现数学思想，体现数学的应用，本书大量使用数学软件Mathematica进行编程实践，这是希望学生通过自学体验编程实践中出现的新命令，激发他们去尝试使用软件，去查阅资料了解软件，甚至使用高级语言进行编程实践等，这对他们今后的学习与生活都是有益的。另外，将算法与数值计算的简单知识介绍放在第一、二两章，通过介绍算法与动画设计的基础知识，利用它们来实现各内容间的连接与沟通，也进一步体现直观的数学表述，这是传统的数学课程所没有或很少涉及的。最后，设计这些内容目的不仅仅在于突出本书的算法设计特色，更主要地是从数学应用的角度说明数学在计算机应用中的地位，借以提高学生学习数学的积极性与主动性；同时，由于这两部分数学内容深度较浅，对于大众化教育形势下的学生而言，更可打消学生对数学的惧怕心理、增加学生学好数学的信心，促成他们对数学由敬畏感到亲近感的转化！

本书第3、4章整合了一元微积分的基本内容；第5章在随机数学基础的内容中增加了计算机模拟的内容；第7章在介绍初等数论的基础上更增加了数论在密码收发方面的应用；第8章也在介绍数理逻辑，布尔代数的内容的基础上，增加了开关电路与门电路有关方面的应用内

容；第 9 章在给出图论基本内容的基础上更多地介绍了二叉树及数据结构的有关内容。这种编排思路都是全新的，也正迎合了计算机各专业对数学知识的要求。

最后，本书顺序地从第 3 章——偏重数学的内容逐步转向第 9 章——偏重计算机应用的数学内容，这也是有意安排的，这样做的目的是使学生掌握相关数学内容的同时，也使学生对计算机数学基础的内容有一个更全面、更逐步贴近应用的了解。

参加本书编写的人员有：王信峰、冯远福、胡琳、杨静、刘大莲、顾英、王笛、贾文敬、徐尚文。高等教育出版社邓雁城编辑在本书的编排过程中提供了不少帮助和支持，北京建筑工程学院代西武副教授对本书进行了仔细的审阅，提出了中肯的修改意见，在此一并表示衷心感谢。

由于时间仓促，也限于编者的水平，对这种教材编写模式认识尚浅，错误之处在所难免，恳请使用本教材的广大师生提出宝贵意见，以利于进一步的修改与提高。

编　者
wangxf728@263.net
2008 年 12 月

目　录

第1章　数值计算与算法基础 …… 1

1.1　计算的有效性 …… 1

1.1.1　误差的概念 …… 1

1.1.2　有效数字 …… 3

1.1.3　数值计算应注意的几个问题 …… 4

习题1.1 …… 5

1.2　算法的编程实现 …… 6

1.2.1　算法与N-S流程图 …… 6

1.2.2　数值计算算法的收敛性与稳定性 …… 9

1.2.3　算法实现举例 …… 12

习题1.2 …… 13

第2章　数制与动画设计 …… 15

2.1　数制 …… 16

2.1.1　进位计数制 …… 16

2.1.2　二进制运算 …… 17

2.1.3　二进制数与十进制数 …… 17

2.1.4　二进制数与八进制、十六进制数间的转换 …… 19

2.2　图形配色方案 …… 21

2.2.1　图形配色的基本概念 …… 21

2.2.2　颜色的RGB编码 …… 22

2.2.3　笛卡儿坐标与屏幕坐标 …… 24

2.3　动画基础与游戏程序设计 …… 25

2.3.1　动点的制作与显示 …… 25

2.3.2　动画与动画设计 …… 26

2.3.3　游戏与游戏程序设计 …… 27

2.4　本章有关实验 …… 29

2.4.1　数制间相互转换 …… 29

2.4.2　图形及其着色 …… 30

2.4.3　几个动画实现 …… 31

2.4.4 游戏设计中的 Mathematica 程序 …… 33
习题 2 …… 33
第 3 章 应用微分学 …… 36
3.1 极限与逼近算法 …… 37
3.1.1 数列极限及其逼近趋势 …… 37
3.1.2 逼近的算法及其实现 …… 38
3.1.3 函数的变化趋势 …… 41
习题 3.1 …… 46
3.2 函数的连续性 …… 47
3.2.1 函数连续性的概念 …… 47
3.2.2 二分法及其算法实现 …… 48
习题 3.2 …… 51
3.3 导数及其应用 …… 51
3.3.1 导数及其几何意义 …… 51
3.3.2 函数求导法 …… 53
3.3.3 导数应用 …… 56
3.3.4 微分及其应用 …… 59
习题 3.3 …… 60
3.4 本章有关实验 …… 61
3.4.1 求极限 …… 61
3.4.2 二分法的编程实现 …… 63
3.4.3 导数与微分有关的实验 …… 63
习题 3.4 …… 66
第 4 章 求和与积分 …… 67
4.1 有限和与无穷和 …… 68
4.1.1 有限和及其表示 …… 68
4.1.2 无穷和及其收敛 …… 69
习题 4.1 …… 73
4.2 定积分 …… 73
4.2.1 定积分的概念与几何意义 …… 73
4.2.2 从无穷累加到牛顿－莱布尼茨公式 …… 77
4.2.3 积分计算 …… 78
4.2.4 无穷区间上的反常积分 …… 82
习题 4.2 …… 83
4.3 定积分应用 …… 84

4.3.1 微元法及其应用 …… 84
4.3.2 微分方程及其求解 …… 86
习题 4.3 …… 89
4.4 本章有关实验 …… 90
4.4.1 求和算法与求和实现 …… 90
4.4.2 定积分的命令实现与编程计算 …… 92
4.4.3 微分方程的求解 …… 96
习题 4.4 …… 97
第 5 章 随机事件与概率应用 …… 98
5.1 数据的简单描述 …… 98
5.1.1 均值 …… 99
5.1.2 方差 …… 100
5.1.3 频率直方图 …… 101
习题 5.1 …… 104
5.2 随机事件及其概率 …… 105
5.2.1 随机事件 …… 105
5.2.2 不相容事件与对立事件 …… 106
5.2.3 概率与古典概型 …… 107
5.2.4 条件概率 …… 109
习题 5.2 …… 110
5.3 随机变量及其数字特征 …… 111
5.3.1 随机变量的有关概念 …… 111
5.3.2 随机变量的分布 …… 111
5.3.3 随机变量的数字特征 …… 114
习题 5.3 …… 119
5.4 随机数及其应用 …… 120
5.4.1 随机模拟的过程 …… 120
5.4.2 随机数的抽取 …… 122
5.4.3 随机模拟举例 …… 128
5.4.4 蒙特卡罗积分 …… 130
习题 5.4 …… 131
5.5 本章有关实验 …… 131
5.5.1 描述数据的几个 Mathematica 命令 …… 131
5.5.2 正态分布的概率计算 …… 133
5.5.3 几个模拟问题的编程实现 …… 134

习题 5.5 …… 135
第 6 章 矩阵与线性方程组 …… 136
6.1 高斯消元法与初等行变换 …… 136
6.1.1 高斯消元法与矩阵 …… 136
6.1.2 初等变换 …… 139
6.1.3 初等行变换的算法与编程实现 …… 143
习题 6.1 …… 143
6.2 矩阵的运算 …… 144
6.2.1 几种特殊矩阵 …… 144
6.2.2 矩阵的基本运算 …… 145
习题 6.2 …… 150
6.3 初等矩阵和逆矩阵 …… 150
6.3.1 初等矩阵 …… 150
6.3.2 方阵求逆 …… 152
6.3.3 应用举例 …… 154
习题 6.3 …… 154
6.4 矩阵与图形变换 …… 155
6.4.1 齐次坐标和齐次变换矩阵 …… 155
6.4.2 几何变换的齐次变换矩阵 …… 156
6.4.3 平面图形变换举例 …… 157
习题 6.4 …… 158
6.5 本章有关实验 …… 159
6.5.1 矩阵有关实验 …… 159
6.5.2 线性方程组及其解 …… 163
习题 6.5 …… 165
第 7 章 初等数论 …… 167
7.1 整除 …… 168
7.1.1 整数与整除 …… 168
7.1.2 素数与合数 …… 169
7.1.3 最大公约数与最小公倍数 …… 170
习题 7.1 …… 173
7.2 带余除法 …… 173
7.2.1 辗转相除法 …… 173
7.2.2 同余 …… 174
习题 7.2 …… 176

7.3 数论在密码中的应用 …… 176
7.3.1 素数的验证 …… 176
7.3.2 一种不定方程 …… 180
7.3.3 密码通讯 …… 181
习题 7.3 …… 183
7.4 本章有关实验 …… 183
7.4.1 相关命令 …… 183
7.4.2 部分算法的实现 …… 184
习题 7.4 …… 184
第 8 章 命题逻辑与布尔代数 …… 185
8.1 命题逻辑的基本概念 …… 185
8.1.1 命题与真值表 …… 186
8.1.2 等值演算 …… 191
8.1.3 析取范式 …… 193
习题 8.1 …… 195
8.2 布尔代数 …… 196
8.2.1 布尔逻辑基础 …… 196
8.2.2 逻辑函数的化简 …… 199
习题 8.2 …… 201
8.3 应用举例及本章有关实验 …… 202
8.3.1 布尔代数与门电路 …… 202
8.3.2 计算机信息检索 …… 205
习题 8.3 …… 206
8.4 本章有关实验 …… 206
习题 8.4 …… 207
第 9 章 图论基础与数据结构初步 …… 208
9.1 图 …… 208
9.1.1 图的基本概念 …… 209
9.1.2 图的矩阵表示 …… 213
9.1.3 最短路问题 …… 216
习题 9.1 …… 218
9.2 数据结构初步 …… 219
9.2.1 概述 …… 219
9.2.2 线性数据结构 …… 222
9.2.3 树的基本概念 …… 225

习题 9.2 …… 228
9.3 图和树的应用举例 …… 229
9.3.1 网络路由选择 …… 229
9.3.2 排序和查找 …… 229
习题 9.3 …… 233
附录 1 Mathematica 系统简介 …… 234
F1.1 Mathematica 的功能简介 …… 234
F1.2 Mathematica 语句的基本规范 …… 235
F1.3 Mathematica 编程 …… 245
附录 2 Mathematica 命令汇总 …… 249
F2.1 数值计算 …… 249
F2.2 代数计算 …… 252
F2.3 数学函数 …… 254
F2.4 表和矩阵 …… 256
F2.5 图形 …… 259
F2.6 流程 …… 262
F2.7 输入与输出 …… 264
F2.8 统计 …… 265
附录 3 标准正态分布表 …… 266

第 1 章　数值计算与算法基础

要求

- 掌握数值计算与算法的基本概念
- 掌握算法表示的 N－S 流程图

知识点

- 了解误差来源及算法设计的意义
- 了解结构化程序设计及其方法
- 理解绝对误差、相对误差及有效数字的概念
- 理解数值计算中应注意的几个问题
- 理解算法与表示算法的 N－S 流程图
- 理解算法收敛性及稳定性的概念

技能点

- 熟练绘制简单问题算法的 N－S 流程图
- 熟练使用递归函数进行算法设计，并绘制相应 N－S 流程图

重点和难点

- 算法的 N－S 流程图

本章介绍误差及有效数字的概念、算法的概念、算法表示的 N－S 流程图、结构化程序设计的概念及算法的收敛法与稳定性概念．在学习时，建议学习者结合相关的编程实践学习体验，以达到学习的实效．

1.1　计算的有效性

1.1.1　误差的概念

一、误差

一个量的实际值通常称为真值，不妨用 x 表示．通常情况下，由于数学描述、测量工具、

算法设计、计算工具等的限制会使得到的值(不妨记为 x^*)与真值往往会有一定的差异，这种差异称为误差．不难看出，误差是不可避免的，描述并估计误差就成为了数学所要研究的一个课题．由于篇幅与知识所限，在此我们仅能考虑算法设计与计算所带来的某些误差．

数值计算中，常以“四舍五入”规则来截断一些计算工具所无法表示的数．例如，按“四舍五入”规则在计算器上输入圆周率 $\pi=3.141\,592\,653\,589\cdots$，八位计算器上应输为 3.141 592 7，九位计算器上应输为 3.141 592 65. 本书我们约定：总以“四舍五入”规则来截断数．

下面，我们给出误差有关概念的数学描述．

二、绝对误差与相对误差

定义 1 设某量的准确值为 x，x^* 是经截断所得的 x 的近似值，称 $e(x^*)=x^*-x$ 为用 x^* 替代 x 所产生的绝对误差(简称近似值 x^* 的绝对误差). 如果 $|e(x^*)|=|x^*-x|\leqslant\varepsilon$，则称 ε 为 x^* 的绝对误差限.

当 $|e(x^*)|\leqslant\varepsilon$ 时，可得 $x^*-\varepsilon\leqslant x\leqslant x^*+\varepsilon$，在应用上常记为 $x=x^*\pm\varepsilon$.

注意：上述的 $e(x^*)$可正可负，当绝对误差为正时近似值偏大，称为强近似值；当绝对误差为负时近似值偏小，称为弱近似值．

定义 2 绝对误差与准确值的比值称为相对误差，即相对误差 $e_r(x^*)=\dfrac{x^*-x}{x}=\dfrac{e(x^*)}{x}$. 如果 $|e_r(x^*)|=\left|\dfrac{x^*-x}{x}\right|\leqslant\delta$，则称 δ 为 x^* 的相对误差限．

例 1 设 $\pi=3.141\,592\,6\cdots$，用四舍五入法取 4 位小数得近似数 $\pi^*=3.141\,6$，求 x^* 的绝对误差限．显然有

$$|e(\pi^*)|=|\pi-\pi^*|\leqslant 0.5\times10^{-4}.$$

例 2 设 $x_1=1.234$，$x_2=0.002$，$x_1^*=1.235$，$x_2^*=0.003$，估计近似数 x_1^*，x_2^* 的绝对误差及相对误差．

解 显然 $e(x_1^*)=x_1^*-x_1=10^{-3}$，$e(x_2^*)=x_2^*-x_2=10^{-3}$，这两个近似数的绝对误差都是 10^{-3}，两数的相对误差分别为

$$e_r(x_1^*)=\frac{10^{-3}}{1.234}\approx 8.1\times10^{-4}=0.81\%,\quad e_r(x_2^*)=\frac{10^{-3}}{0.002}=0.5=50\%.$$

可以看出，x_1^* 是 x_1 一个较好的近似值，而 x_2^* 不是 x_2 的一个较好近似值．因此，近似数的相对误差是近似数精确度的基本度量，一个近似数 x^* 的相对误差越小，说明近似数越精确．

注：(1) 相对误差是个无名数，它没有量纲．

(2) 误差估计中，常将 $e_r^*(x^*)=\dfrac{x^*-x}{x^*}=\dfrac{e(x^*)}{x^*}$ 作为 x^* 的相对误差．事实上，当 $e_r^*(x^*)=\dfrac{e(x^*)}{x^*}$ 较小时，有

$$\frac{e(x^*)}{x}-\frac{e(x^*)}{x^*}=\frac{e^2(x^*)}{xx^*}=\frac{e^2(x^*)}{x^*(x^*-e(x^*))}=\frac{\left(\frac{e(x^*)}{x^*}\right)^2}{1-\frac{e(x^*)}{x^*}}\approx 0.$$

（3）一般情况下，由于精确值未知，因此相对误差限 δ 是未知的，但可以确定．

1.1.2 有效数字

一、通俗说法

如果 x^* 是 x 的按四舍五入规则得到的近似数，则从左边第一个非零数字开始向右到最后舍入后的那个数字结束的每一个数字都称为有效数字，当有效数字个数为 n 时，则称 x^* 具有 n 位有效数字．

例如，设 $\pi=3.141\,592\,6\cdots$，按四舍五入原则可得到数 $x_1^*=3.14$，$x_2^*=3.141\,6$，则 x_1^* 具有 3 位有效数字，x_2^* 具有 5 位有效数字，容易知道它们分别满足

$$|\pi-x_1^*|\leqslant 0.5\times 10^{-2},\quad |\pi-x_2^*|\leqslant 0.5\times 10^{-4}.$$

又如，设 $x=8.000\,033$，它的具有 5 位有效数字的近似值为 $x^*=8.000\,0$. 注意：这一结果通常不能写成 $x^*=8$. 规定：$x^*=8$ 只表示这个近似值具有 1 位有效数字．

另一方面，如果将一个精确值 x 写成 $x=\pm(0.a_1a_2\cdots a_na_{n+1}\cdots)\times 10^m$（$m,n$ 为整数），其中 $a_1\neq 0$，每个 $a_i(i=1,2,\cdots,n+1)$ 都表示 0 ~ 9 十个数字中的某一个．又 x^* 是 x 的第 $n+1$ 位数字 a_{n+1} 按四舍五入原则得到的近似数，则依照前述，x^* 具有 n 位有效数字．此时必有

$$|x^*-x|\leqslant 0.5\times 10^{m-n}.$$

据此，我们可以给出有效数字的一个更精确定义．

二、数学描述

定义 3 设 x 为准确值，x^* 为 x 的近似值，将 x^* 表示为 $x^*=\pm(0.a_1a_2\cdots a_n)\times 10^m$（$m,n$ 为整数），其中 $a_1\neq 0$，$a_1\sim a_n$ 均为 $0,1,\cdots,9$ 中的某一个数字．如果 x^* 的误差满足

$$|x^*-x|\leqslant 0.5\times 10^{m-n},$$

即 x^* 误差不超过某位的半个单位．则称该位数字到 x^* 的第一位非零数字均为 x^* 的有效数字，即 x^* 有 n 位有效数字．

注： 有效数字的位数不能仅考虑 $|x^*-x|\leqslant 0.5\times 10^{m-n}$，还要看 x^* 本身．

例如，设 $x=8.000\,033$，其近似值 $x_1^*=8.000\,0$ 与 $x_2^*=8$ 都满足 $|x_i^*-x|\leqslant 0.5\times 10^{-4}$，但 $x_1^*=8.000\,0$ 具有 5 位有效数字，$x_2^*=8$ 具有 1 位有效数字．

1.1.3 数值计算应注意的几个问题

正如前面所述，误差是不可避免的．在实际计算中，计算次序与计算方式等，都会对计算结果产生影响．以下我们列出在数值计算中要注意的几个常见问题．

一、要避免除数的绝对值远远小于被除数的绝对值的除法

原因：当除数 y 的绝对值很小时（接近于零），两数商的绝对值的误差 $|e(|x/y|)|$ 可能很大.

例 3 计算 $\dfrac{1}{10-\sqrt{99}}$（精确值 19.949 874 37…）时，取 6 位有效数字，则 $\sqrt{99}\approx 9.949\ 87$. 直接计算的结果为

$$\frac{1}{10-\sqrt{99}}\approx\frac{1}{10.000\ 0-9.949\ 87}\approx 19.948\ 1,$$

这一结果仅具有 4 位有效位数！仍取 $\sqrt{99}$ 的 6 位有效数字，将计算方式改为

$$10+\sqrt{99}\approx 10.000\ 0+9.949\ 87\approx 19.949\ 9,$$

计算结果仍具有 6 位有效数字，没有丧失有效位数．

二、要避免两相近数相减

原因：当 x 与 y 同号，且 $x-y\neq 0$ 时，则由误差计算公式有

$$e_r(x^*-y^*)=\frac{x^*-y^*-(x-y)}{x-y}=\frac{x}{x-y}\frac{x^*-x}{x}-\frac{y}{x-y}\frac{y^*-y}{y}=\frac{x}{x-y}e_r(x^*)-\frac{y}{x-y}e_r(y^*).$$

当 $x\approx y$ 时，$\left|\dfrac{x}{x-y}\right|$，$\left|\dfrac{y}{x-y}\right|$ 至少有一个会变得很大．这时，x^*，y^* 的误差就会对计算结果 $A^*=x^*-y^*$ 产生较大的影响．

例 4 求方程 $x^2-16x+1=0$ 的小正根（保留 3 位有效数字）.

解 由求根公式得 $x_{1,2}=\dfrac{16\pm\sqrt{16^2-4}}{2}=8\pm\sqrt{63}$，从而可知小正根为 $x_2=8-\sqrt{63}$. 取 $\sqrt{63}\approx 7.94$，则 $x_2\approx 8-7.94=0.060\ 0$.

现改用另一种算法：$x_2=8-\sqrt{63}=\dfrac{1}{8+\sqrt{63}}\approx\dfrac{1}{15.94}\approx 0.062\ 7$，不难检验这一结果更精确．

所以，在计算过程中要尽量避免两个相近数相减的运算，否则产生的结果误差较大．

例 5 用四位数学用表计算 $A=10^7(1-\cos 2°)$（$\cos 2°\approx 0.999\ 4$，$\sin 1°\approx 0.017\ 5$）. 直接计算与用公式 $A=10^7(1-\cos 2°)=10^7\times 2\sin^2 1°$ 计算的结果分别为 6×10^3，6.13×10^3，后者有更多的有效位数．

三、应避免出现“大数吃小数”

数值计算中参加运算的数有时数量级差别比较大，而计算机位数的限制，使得不注意运算次序时就可能出现大数吃小数的现象，从而影响计算结果的可靠性．

例 6 在 4 位计算器上计算和 $1\ 234+0.4+0.3+0.2+0.1$.

由于计算器要先对阶后计算，对阶时数 $0.4=0.000\ 04\times10^4$ 在 4 位计算器上表示为机器 0，从而得到

$$1\ 234+0.4=0.123\ 4\times10^4+0.000\ 04\times10^4\approx0.123\ 4\times10^4=1\ 234$$

重复其余计算，显然最后的计算结果为 1 234. 这里的大数把所有小数都“吃掉”了．但如果采用以下次序计算就不会出现上述问题，即

$$0.4+0.3+0.2+0.1+1\ 234=1\ 235.$$

可见，适当调换计算次序可以避免大数吃小数现象的发生．

四、简化计算步骤，减少运算次数

通常，为节省计算机的运算时间、减小误差对计算结果的影响，要遵从选用计算量较少的运算次序的数值计算原则．

例 7 计算多项式 $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 的值．

解 (a) 如果直接计算每一项再求和，显然，计算 a_kx^k 需要作 k 次乘法，因此，计算 $P_n(x)$ 值就需要作 $n+(n-1)+\cdots+2+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$ 次乘法及 n 次加法运算．

(b) 若采用如下算法：

$$P_n(x)=(\cdots((a_nx+a_{n-1})x+a_{n-2})x+\cdots+a_1)x+a_0.$$

可以写成如下公式形式：

$$\begin{cases}S_n=a_n,\\ S_{k-1}=x\cdot S_k+a_{k-1},\quad(k=n,n-1,\cdots,2,1).\end{cases}$$

由 S_n 算出 S_{n-1}，再由 S_{n-1} 算出 S_{n-2}，$\cdots$，最后则有 $S_0=P_n(x)$. 这种算法称为秦九韶算法．

容易看到，采用秦九韶算法计算 $P_n(x)$ 值只需作 n 次乘法和 n 次加法运算．

习题 1.1

1. 下列各数都是经过四舍五入得到的近似值，试指出它们具有几位有效数字：

$$x_1^*=1.102\ 2,\ x_2^*=0.002\ 2,\ x_3^*=50.220,\ x_4^*=50.22.$$

2. 求方程 $x^2-56x+1=0$ 的两个根，使它至少具有 4 位有效数字($\sqrt{783}\approx27.982$).
3. 试给出数学常数 e $=2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 4\cdots$ 具有 3、6、13、14 位有效数字的近似值．
4. 计算 $f=(\sqrt{2}-1)^6$，取 $\sqrt{2}\approx1.4$，利用下列各式计算，哪一个得到的结果最好？

$$\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^6},\ \frac{1}{(3+2\sqrt{2})^3},\ \frac{1}{99+70\sqrt{2}},\ (\sqrt{2}-1)^6,\ (3-2\sqrt{2})^3,\ 99-70\sqrt{2}.$$

1.2 算法的编程实现

1.2.1 算法与 N－S 流程图

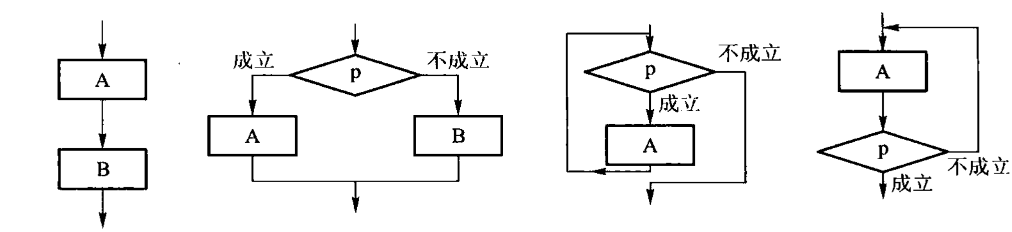
一、算法的概念

做任何事情都有一定的顺序，一定的步骤．如旅游则要遵循次序：订票、乘车、游玩等．容易想见，次序或步骤错了就可能导致混乱，甚至做错事．

定义 4 为解决一个问题而采取的方法和步骤就是“算法”．或者说，由给定的一些数据，按照某种规定的顺序进行运算的一个运算序列，称为算法．

一般来讲，一个算法应具有如下五个性质：有穷性(即保证有限步可以完成)、确定性(即保证每一步都不可有不同的解释)、有零个或多个输入、有一个或多个输出、有效性(每步都可有效的执行而得出确定结果)．有穷性、确定性和有效性是保证算法可以实现的最基本条件；而有零个或多个输入、有一个或多个输出则是保证算法可以接受信息和解决相应问题不可缺少的基本要素．

通常，算法包含三种结构：顺序结构、选择结构、循环结构．顺序结构是指按顺序执行完一步后再执行下一步的执行结构，它是最简单的一种结构，如图 1－1(1)；选择结构也称分支结构，它先按条件进行判断，然后再根据条件成立与否选择执行相应步骤．可简单表示为：当 p 成立时执行 A，不成立时执行 B，其中 p 表示条件、A 与 B 表示要执行的步骤，如图 1－1(2)；循环结构又称重复结构，顾名思义即反复执行某一部分的操作．有两种类型的循环结构：当型结构与直到型结构．当型结构即指当条件 p 成立时反复执行步骤 A，直到条件 p 不再成立为止，如图 1－1(3)；直到型结构指反复执行步骤 A，直到条件 p 成立为止，如图 1－1(4)．



(1) 顺序结构　(2) 选择结构　(3) 当型循环结构　(4) 直到型循环结构

图 1－1

注意：解决问题的方法往往不止一种．通常我们总希望采用简单的和运算步骤少的方法．因此，在解决问题时，不仅要保证算法正确性，更要考虑算法的质量，选择合适的算法．