高等数学引论

（第四册）

华罗庚 著

王元 校

高等教育出版社

高等数学引论

（第四册）

华罗庚 著
王元 校

教育出版社

内容提要

《高等数学引论》是我国著名数学家华罗庚在上世纪 60 年代编写的教材, 曾在中国科学技术大学讲授. 全书共分四册, 包含了微积分、高等代数、常微分方程、复变函数论等内容. 全书反映了作者的 “数学是一门有紧密内在联系的学问, 应将大学数学系的基础课放在一起来讲” 的教学思想, 还包括了作者的 “要埋有伏笔”、“生书熟讲, 熟书生温” 等教学技巧, 书中还介绍了数学理论的不少应用. 这使得本套书不同于许多现行的教科书, 是一套有特色、高水平的高等数学教材.

第一册包括实数极限理论、微分和积分及其应用、级数理论、方程的近似解等内容; 第二册包括多元函数的微积分、多重级数理论、曲线及曲面、场论、Fourier 级数、常微分方程组等内容; 第三册主要介绍复变函数论的一般理论; 第四册主要介绍代数矩阵论的基本理论及其应用.

本书再版时得到王元院士的认真修订.

本书可作为高等院校理工科各专业学习高等数学的系统教科书或教学参考书, 也可供自学者使用参考.

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学引论. 第 4 册/ 华罗庚著. —北京: 高等教育出版社, 2009.4

ISBN 978-7-04-025840-0

I.高... II.华... III.高等数学 - 高等学校 - 教材 IV.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 043258 号

策划编辑 赵天夫 **责任编辑** 赵天夫 **封面设计** 刘晓翔
责任印制 陈伟光

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100120	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	涿州市星河印刷有限公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×1092　1/16	**版　　次**	2009 年 4 月第 1 版
印　　张	14.75	**印　　次**	2009 年 4 月第 1 次印刷
字　　数	300 000	**定　　价**	29.00 元

物 料 号　25840-00

华罗庚与“高等数学引论”

王 元

(中国科学院数学与系统科学研究院)

一

1958 年秋, 中国科学技术大学成立. 按照“全院办校, 所系结合”的方针, 华罗庚与中科院的著名学者吴有训、严济慈、钱学森等均到科大兼职或亲自授课.

华罗庚出任应用数学系 (后改为数学系) 主任. 他倡导了数学系的所谓“一条龙”教学法. 他始终认为数学是一门有紧密内在联系的学问, 所以将大学数学系的基础课分成微积分、高等代数、复变函数论等分科来讲授是将数学人为地割裂开来了. 因此, 华罗庚决定将所有的基础课放在一起来教三至四年.

说实在话, 要写出这样一部“一条龙”教科书就必须由一位对数学有相当全面与深刻理解的数学家来承担. 华罗庚无疑是很适当的人选, 这是由于他对很多数学领域都有过卓越的贡献, 从而他对数学的一些内在联系有独到的洞察与理解.

就已经出版的四册书来看, 有以下特点:

首先, 作为大学数学基础课中的重要基本概念, 华罗庚是反复多次由浅入深地加以讲述的. 他形象地描述道: “我也喜欢生书熟讲, 熟书生温的方法. 似乎是在温熟书, 但把新东西讲进去了, 这是因为一般讲来, 生书比旧课, 真正原则性的添加并不太多的缘故, 找另一条线索把旧的东西重新贯穿起来, 这样的温习方法容易发现我们究竟有哪些主要环节没有懂透”. “‘数’与‘形’的‘分’和‘合’, ‘抽象’与‘具体’的‘分’和‘合’都是反复又反复的过程中不断提高的”.

第二, 在数学工具足够的情况下, 凡是可能讲的内容, 不论属于哪个领域, 都尽可能地放在一起加以讲述.

第三, 华罗庚是一位非常勤奋的数学家. 他不轻视所谓容易的东西. 他积累了不少这类“练拳”式的研究, 将它们放在教材里构成了很好地灵活运用数学理论的材料, 使读者感到数学的灵活, 有趣与有力, 但又不是高不可攀的.

第四, 华罗庚的数学风格是他的“直接法”, 即用简单初等的工具解决困难的数学问题. 他不从抽象的定义出发, 而是从具体的例子入手, 再得出一般的结论. 在这部书的写作中, 他都贯穿了这个风格. 定理的证明都不长, 基本上是一、二页而已. 这对读者来说是易于接受的.

二

第一册和第二册①以普通微积分或高等微积分 (高等分析) 为其基本内容. 第一章就讲到实数理论. 华罗庚用十进位无穷小数来定义实数, 虽带有描述性, 但却是严格的. 然后引进传统的 ε-N 概念讲法及柯西 (Cauchy) 序列的定义. 在第一章的“补充”里, 华罗庚除了讲电脑里用的二进位制外, 还证明了有理数的充要条件为它是一个循环小数, 更讲到实数的有理逼近论中的“连分数”方法. 这些通常是“初等数论”的内容. 他还将连分数法用于计算闰年、闰月、月蚀及火星大冲等天文学的计算.

由于“极限”是由中学的直观数学进入大学数学教育首先碰到的一个难关, 所以华罗庚在第四章又一次讲到数列的极限, 再进一步讲到上极限、下极限的概念, 并进一步延伸到连续趋限的问题, 即 ε-δ 理论. 关于极限的概念以后还要再讲. 总之, 通过这样逐步地讲解, 读者应该较易于接受.

第二章讲述了向量代数. 这里主要讲欧氏空间的一些几何量的向量表示, 并在该章的“补充”中讲述了球面三角学及向量表示在牛顿 (Newton) 力学中的应用.

有了连续趋限的讲述之后, 微分学与积分学的讲述就是很自然的应用了. 在第十章中讲述了欧拉 (Euler) 求和公式:

命 $\varphi(x)$ 为 $[a,b]$ 内有连续微商的函数. 则

$$\sum_{a<n\leqslant b}\varphi(n)=\int_a^b\varphi(x)dx+\int_a^b\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\varphi'(x)dx$$
$$+\left(a-[a]-\frac{1}{2}\right)\varphi(a)-\left(b-[b]-\frac{1}{2}\right)\varphi(b),$$

其中 $[x]$ 表示 x 的整数部分.

华罗庚首先由欧拉公式推出斯特林 (Stirling) 公式, 然后由欧拉公式导出普通书上关于近似计算定积分的矩形法、梯形法与辛普森 (Simpson) 法的误差估计, 这与通常的讲法不同, 除了用欧拉公式将上述内容都统一起来外, 读者可以看到欧拉公式的优点在于将余项用积分形式表示了出来.

作者在第十三章带变量的序列中, 再一次将极限的概念加以深入讲解. 他讲到一致收敛的概念与一些判别法则及应用、无穷乘积、积分号下求微分及交换积分次

①本书新版的第一册和第二册即为老版第一卷的一、二分册, 第三册为第二卷第一分册, 第四册为余篇.

序等. 在这里顺带讲述了一些微分方程与积分方程的知识, 包括压缩映像原理及用幂级数求解常微分方程与偏微分方程 (柯西–柯瓦列夫斯卡娅 (Kovalewskaya) 定理) 等, 通常属于微分方程课的内容.

在第十五章重积分的 "补充" 中, 作者讲述了求面积、求容积与求表面积的一些实用方法. 这些方法来自于地理学家与矿业学家的书 "矿体几何学", 在那里, 他们是用初等几何来表述各种计算方法的, 十分繁琐. 作者将这些方法用柱面坐标来表述并得到一些理论分析结果, 只用了十几页篇幅.

第十四章与第十八章为微分几何学. 由于已经讲了微分方程, 所以可以讲微分几何的局部性质, 包括高斯 (Gauss) 的第一、第二微分型, 曲率, 张量, 高斯方程与科达齐 (Codazzi) 方程等, 就是通常微分几何课的内容.

第十九章的傅里叶 (Fourier) 级数, 相当于通常傅里叶级数课的内容.

第二十章为常微分方程组. 作者介绍了人造卫星的轨道方程, 第一、二、三宇宙速度的计算, 及质点组——多体问题. 这些材料来自前苏联发射第一颗地球人造卫星之后, 作者做的一个有趣的练习.

三

第三册主要讲述 "复变函数论", 但内容也不止于此. 作者首先讲了复平面的几何, 其中引进了默比乌斯 (Möbius) 变换群、广义线性群、诺依曼 (Neumann) 球、交比、调和点列等概念. 最后, 证明了射影几何的基本定理, 即冯 · 施陶特 (von Staudt) 定理:

将一维射影 (复) 空间一一连续地变为自身, 并使调和点列变为调和点列的变换必为广义线性变换.

这一重要定理在矩阵空间之类似的研究就是作者关于矩阵几何学的研究内容.

第二章为非欧几何学. 作者介绍了抛物几何学 (欧氏几何)、球面几何学 (椭圆几何) 与双曲几何学 (罗巴切夫斯基 (Lobachevskiĭ) 几何). 在这里, 读者可以看到有各种不同的 "距离" 定义.

第三章为解析函数与调和函数. 作者引入了极为重要的黎曼 (Riemann) 映射定理:

任何一个单连通域 D, 其边界多于一点, z_0 是其一内点, 并且在此点有一方向向量, 则存在唯一的保角变换将 D 一一变为单位圆内部, 将 z_0 变为原点, 方向向量变为 x-轴的正方向.

华罗庚写道:"因为它把一般单连通域的问题一变而为单位圆的问题了". "这告诉我们, 如果单位圆研究清楚了, 更一般的定理也就在望了".

这是由于在单位圆内, 函数往往可以展开成收敛的幂级数, 所以多了一个强有

力的工具. 在本册书的讲述中, 我们看到作者在不停地发挥这一优势.

嘉当 (Cartan) 曾证明过:

在解析映射之下, 只有六类不可约、齐性、有界对称域, 其中四类称为典型域, 两类称为例外域.

典型域可以看作单位圆在多复变空间的类似, 所以其重要性是不言而喻的. 华罗庚建立了典型域的调和分析 (完整正交系), 从而他得到了典型域的柯西核、泊松 (Poisson) 核等. 这就构成了他关于多复变函数论的研究, 其背景即在于他对单位圆之深刻理解.

应用黎曼定理, 使复变函数论中很多重要定理的证明变得简单易懂了.

第五章中, 作者引入了距离函数及用它定义极限的定义. 这就再一次将极限的概念推得更广. 诚如他在第一、二册的序言中所说的 "生书熟温".

这一册除复变函数论外, 作者还讲了不少其他东西. 第十一章的求和法, 讲了某些发散级数可求和的途径, 如切萨罗 (Cesàro) 法、赫尔德 (Hölder) 法、博雷尔 (Borel) 法及阿贝尔 (Abel) 求和法. 本章还讲了一些陶伯 (Tauber) 型定理. 这些材料通常属于傅里叶级数的高级教程内容.

第十二章讲了一些偏微分方程的求解问题, 如黎曼-希尔伯特 (Hilbert) 问题与混合型偏微分方程等.

第十三章魏尔斯特拉斯 (Weierstrass) 椭圆函数论与第十四章雅可比 (Jacobi) 椭圆函数论的内容在近代数论研究中的重要性已是众所周知的了. 在大学数学教程里就包括这些内容应该是很难得的.

四

第四册主要讲代数矩阵论, 但内容不止于此.

第四章为常系数差分方程与常微分方程, 第五章为解的渐近性质, 即将矩阵方法用于常微分方程求解, 其中包括李亚普诺夫 (Lyapunov) 方法的讲述.

第八章为体积. 作者讲述了 m 维流形的体积元素, 特别地, 作者算出了正交群的总体积等. 这些材料是作者典型域研究中有独立兴趣且不涉及较多知识的结果.

第九章为非负矩阵. 这是作者研究计量经济学的一些数学背景知识与结果, 一般教材基本不涉及这个方面.

这一册尚未写完, 作者指出以后接下去的三章应该是讲 n 维空间的微分几何学. 作者指出应以第二册中空间曲线的微分几何为模型, 运用正交群下斜对称方阵的分类而获得 n 维空间曲线的微分性质.

五

在第一、二册的序言里, 作者写道, 这两本书 “既是急就章, 又是拖沓篇”. “读者可能发现一些其他书上所没有的材料, 也可能发现一些稍有不同的处理方法, 但毕竟太少了”. “感到空虚, 并且诚恐会错误百出”. “辗转传抄的已经成熟的材料, 错误还有时难免, 何况第一次写下来的东西, 那更使人担心了”. “特别是一些高的内容放低了, 繁的内容化简了的部分更希望大家指正”.

这些话充分反映了华罗庚一贯的严谨学风. 第一、二册还是写得比较详细的. 第三、四册中就有不少地方, 作者用了 “类似地, 不难证明 $\cdots$” 这一类的话. 对于像作者这样具有高度数学功底与洞察力的数学家来说, 这是可以做得到的. 但对于一般初学读者, 即使像我这样在他身边工作多年的人来说, 亦非轻而易举. 所以在学习的时候, 应特别注意自己多做些推演工作.

这四册书共一千多页. 作为教材, 对于一般学生来说, 材料显然是多了一些, 老师宜根据具体情况作些取舍. 作者也指出过这一点. 但对于教师本人, 我觉得通读一遍还是很有好处的. 对于程度很好的学生, 他们可以在老师的指导下, 选读一些章节.

除第一册的第四章 §3 的定理 7 作了改写外, 每次重印这部书时, 都只作笔误与印刷错误之改正. 这样做当然可以更好地保持原著的风貌. 但另一方面, 要作较多改写, 需有认真的论证, 及较多教学实践的积累才行. 现在也做不到.

例如, 第三册第十章讲到了单叶函数中著名的比贝巴赫 (Bieberbach) 猜想:

单位圆中的单叶函数 $f(z)=z+a_2z^2+\cdots, |z|<1$, *其系数满足估计*:

$$|a_n| \leqslant n, \quad n=2,3,\cdots.$$

书上讲了李特尔伍德 (Littlewood) 的估计 $|a_n| \leqslant en$, 及奈凡林那 (Nevanlinna)、迪厄内 (Dieudonné)、罗戈森斯基 (Rogosinski) 在某些附加条件下, 对于比贝巴赫猜想的证明. 但这一猜想已由德 · 布朗基 (L. de Branges) 于 1985 年完全解决了. 这部分材料应如何处理, 就值得商榷.

更为重要的是, 华罗庚曾有一个雄心勃勃的写作计划, 即写一部六、七卷的书, 但他从未向他身边工作的人讲过他的计划纲要, 似乎也没有人询问过这件事. 现在看来, 抽象代数、代数拓扑、勒贝格 (Lebesgue) 测度与积分论及在此基础上的概率理论等, 似乎都应包括在他的这部著作之中.

早在上世纪五十年代初, 华罗庚就曾多次向我们讲到狄利克雷 (Dirichlet) 与戴德金 (Dedekind) 的师生关系. 十九世纪, 狄利克雷写过一本数论书. 以后每次再版, 戴德金都为他写一些附录, 后来附录的篇幅比原著还要厚.

华罗庚鼓励我们要不停地对他的著作进行修改与补充. 他生前, “数论导引” 的几次重印时, 萧文杰 (P. Shiu) 与我曾为该书写过附录, 这得到了华罗庚本人的认可.

但“高等数学引论”这部书涉及的面要广得多，按我的学术水平与健康状况，要撰写附录已无能为力了.

随着时光的流逝，最早听他讲课的大学生现在都已是古稀老人，早已退休，已无力做这件事了. 如果要作修改及续写，只能等待下一代或再下一代了. 但我对前途仍充满了信心，我深信在中国总会有有志的年轻数学家会把华罗庚的香火继续下去.

2010 年是华罗庚百年华诞及仙逝二十五周年，承高等教育出版社热心再版重印这部书，并且做了很好的排版与编辑校订工作. 与此同时，他们正在积极地筹备出版英文版，这是十分有眼光及令人激动的一件大好事.

回想起五十年前，我作为学生与助手，有幸协助华罗庚老师在科大讲授与撰写这部书的第一、二册. 当时的一切情景，还清晰地历历在目，令人永铭于心. 在这部书重印之际，我愿意借这个机会，衷心祝愿这部书的出版将为我国的数学发展与人才培养作出新的重要贡献.

序　言

原来准备写一部《高等数学引论》, 共六、七卷. 其中第一卷第一、二分册已于 1963 年问世. 但其他手稿大部分已经遗失, 所剩无几了. 于 1981 年出版了第二卷第一分册. 本拟鼓其余勇完成原来计划, 但实事求是地估计之后, 看来所散失的手稿归来无望, 重新补写完成全书, 诚恐是时不我待, 力不从心的愿望了. 无已, 作两步打算, 先把 1962 年在中国科技大学讲授过的, 铅印而未逸散的部分出版, 以后, 再就力所能及进行写作, 陆续出版 (在同一或不同书名下).

好在这一部分是有它的独立性的, 讲授时的客观情况是: 既要照顾到初学同学的水平, 又要使前者不越级, 后者不觉得是简单重复, 总的原则是重用矩阵, 实现 "1, 2, 3; n; ∞" 讲授法的第二步. 即, 准备前几卷是讲一、二、三个变量, 一、二、三维空间; 而这一卷是讲 n 个变量或 n 维空间. 本卷原稿缺第十、十一、十二章, 据回忆这三章是讲 n 维空间微分几何学的, 原稿虽失, 但读者不妨以第一卷空间曲线的微分几何为模型, 运用正交群下斜对称方阵的分类而获得 n 维空间曲线的微分性质. 这是一个好习题, 如果能做得出, 则可把正交群改为其他群, 而研究其微分不变性质.

岁月无多, 不得不计日图效, 错谬之处请读者指正.

华罗庚

1981 年 10 月 11 日

当年, 在科技大学编写此书时, 龚升同志给我许多帮助, 在寻找遗失稿件时, 他还多方尽力.

对龚升同志和负责校对的裴定一同志, 我在此敬致谢忱.

华罗庚

1983 年 9 月 9 日

目　录

①*表示第三章的补充.

第一章　线性方程组与行列式 (复习提纲)

§1. 线性方程组

考虑齐次方程组:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n, \tag{1}$$

这里 a_{ij} 是复数 (或实数), $x_1, \cdots, x_n$ 是未知数. 方程组 (1) 显然有一个解

$$x_1 = \cdots = x_n = 0. \tag{2}$$

这个解称为显见解.

研究齐次方程组的基本问题是: 除显见解外, (1) 是否还有其他解? 能否定出所有的解来?

非齐次方程组

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{3}$$

的基本问题是: (3) 是否有解? 能否定出所有的解来?

如果 (3) 有一个解 $(x_1^0, \cdots, x_n^0)$, 即

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^0 = b_i,$$

则

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j - x_j^0) = 0.$$

命 $y_j = x_j - x_j^0$, 则 y_j 是 (1) 的解. 所以解非齐次方程组的问题一变而为两个: 首先是是否有解, 其次定出齐次方程组 (1) 的所有的解来.

关于是否有解有下列重要结果:

如果 (1) 有非显见解, 则 (3) 不能对所有的 $b_1, \cdots, b_n$ 都有解.

如果 (1) 仅有显见解, 则 (3) 对任意的 $b_1, \cdots, b_n$ 都有解.

§2. 消去法

解线性方程组 (3) 的方法我们着重复习一下 Gauss 消去的原则. 以四个未知数、四个方程为例

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = a_{15}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = a_{25}, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = a_{35}, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = a_{45}. \end{cases} \tag{1}$$

将 (1) 中的第一个方程除以系数 a_{11} (它叫做 "主导" 元素) 并令

$$b_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}} \quad (j > 1), \tag{2}$$

则得到一个新的方程

$$x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{14}x_4 = b_{15}. \tag{3}$$

再由方程 (3) 及 (1) 中的后面三个方程消去 x_1, 这样便得到了一个辅助方程组, 它包括具有三个未知数的三个方程, 此种消去法易于施行, 只须顺次将方程 (3) 乘以 a_{21}, a_{31}, a_{41} (也就是乘以第二、第三和第四行的 "主导" 元素), 再由 (1) 中的对应方程减去此式即可, 消去一个未知数以后所得的新方程组, 其系数用 $a_{ij,1}$ 代表:

$$a_{ij,1} = a_{ij} - a_{i1}b_{1j} \quad (i, j \geqslant 2). \tag{4}$$

其次将新方程组中的第一式除以它的 "主导" 元素 $a_{22,1}$, 则得方程

$$x_2 + b_{23,1}x_3 + b_{24,1}x_4 = b_{25,1}. \tag{5}$$

其中

$$b_{2j,1} = \frac{a_{2j,1}}{a_{22,1}} \quad (j > 2), \tag{6}$$

然后仿照前面的方法继续进行, 我们便得到了一组具有两个未知数的两个方程, 它们的系数呈如下的形式:

$$a_{ij,2} = a_{ij,1} - a_{i2,1}b_{2j,1} \quad (i, j \geqslant 3). \tag{7}$$