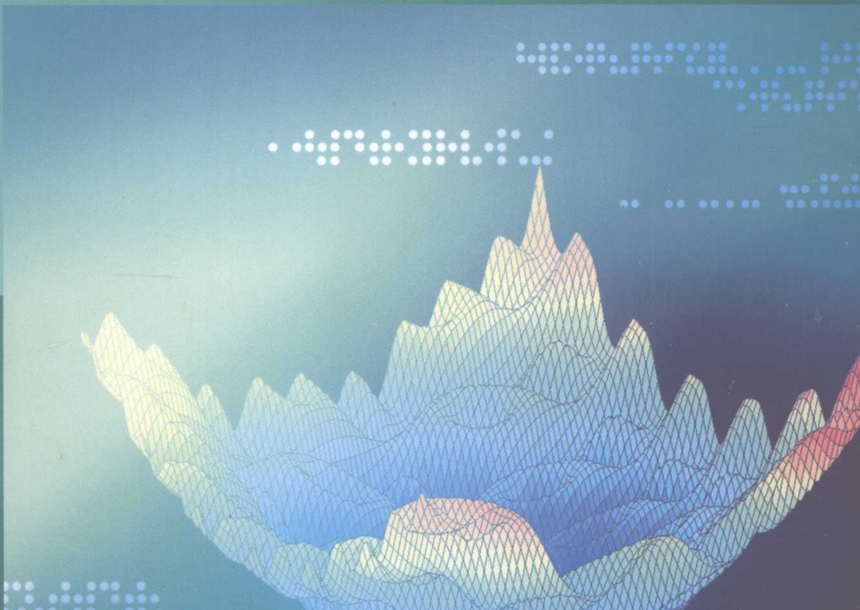
普通高等学校信息与计算科学专业系列丛书

微分方程数值解法（第四版）

李荣华　刘　播



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等学校信息与计算科学专业系列丛书

微分方程数值解法

（第四版）

李荣华　刘　播

高等教育出版社

内容提要

本书是编者在《微分方程数值解法》(第三版) 的基础上修订而成的。本次修订的宗旨是加强方法及其应用, 考虑到不同院校的需要, 仍然保留常微分方程数值解法这一章。为了更方便教学, 采取先介绍有限差分法, 后介绍 Galerkin 有限元法, 去掉原来的第七章, 将离散方程的有关解法与椭圆方程的差分法和有限元法合并, 同时增设了一些数值例子, 适当删减部分理论内容, 突出应用, 降低难度。本书包括六章, 第一章为常微分方程数值解法, 第二章至第四章为椭圆、抛物和双曲偏微分方程的有限差分法, 第五章、第六章为 Galerkin 有限元法。

本书是为信息与计算科学专业编写的教材, 也可以作为数学与应用数学、力学及某些工程科学专业的教学用书, 对于从事科学技术、工程与科学计算的专业人员也有参考价值。

图书在版编目(CIP)数据

微分方程数值解法/李荣华,刘播 .—4 版 .—北京:高等教育出版社,2009.1

ISBN 978-7-04-024863-0

Ⅰ.微… Ⅱ.①李…②刘… Ⅲ.微分方程-数值计算-高等学校-教材 Ⅳ.O241.8

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 191694 号

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100120	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京印刷一厂	**畅想教育**	http://www.widedu.com
		版　　次	1980 年 3 月第 1 版
开　　本	787×960　1/16		2009 年 1 月第 4 版
印　　张	18.25	**印　　次**	2009 年 1 月第 1 次印刷
字　　数	340 000	**定　　价**	25.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有　侵权必究

物料号　24863-00

前　言

微分方程数值解法在数值分析中占有重要的地位, 它以逼近论、数值代数等学科为基础, 反过来又推动这些学科向前发展。微分方程数值解法在科学计算、工程技术等领域有极其广泛的应用。自上世纪 40 年代以来, 它已发展成一门庞大的计算技术学科, 并早已列为原来计算数学和应用数学专业的基础课之一。与此同时, 国内外出版了不少有关专著和教材。在我国, 编者受上海理科教材会议 (1977 年) 委托, 于 1980 年与冯果忱合作为计算数学专业编写出版过第一本教材《微分方程数值解法》, 1989 年修改后出版了第二版, 1996 年经编者较大修改后又出版了第三版。1998 年高校专业目录有了调整, 原计算数学专业更名为信息与计算科学专业, 教学计划和内容也有些改变 (如有些院校建议将常微分方程数值解法合并到逼近论中去讲)。编者根据新情况, 特别是微分方程数值解法的新进展, 于 2005 年编写出版了《偏微分方程的数值解法》(高等教育出版社)。原以为这就可以满足本专业的需要了, 但实际上, 设有信息与计算科学专业的院校分布面很广, 不少院校, 主要是一些非理科院校仍采用《微分方程数值解法》(第三版), 将常微分方程和偏微分方程的数值解法并为一门课讲授。

第三版出版以来, 又过去了十二年, 笔者在教学实践中感到这个版本仍有不少缺点。例如原书在应用方面强调不够, 特别是缺少说明方法应用的例子。再如原书内容虽已做过精选, 但一些院校反映内容仍然偏多, 给教学带来一定困难。我希望趁这次再版机会, 对这些问题尽可能加以补正和调整。首先, 选材以方法为主, 指出方法如何在实际中应用, 并有针对性地选编了一些数值应用例子。为此我们还参考了 J. W. Thomas 的书: Numerical Partial Differential Equations (1995)。其次, 对原书的理论部分 (如收敛性和误差估计) 做了适当删减, 这些内容在原书中也不属于必学范围。第三, 在体系上我们也做了较大变动, 将差分法放在 Galerkin 有限元法前面, 删去原书第七章离散化方程的解法, 将主要解法与椭圆方程差分法及有限元法各章合并。这样调整后也许更便于教学。

本书选材的基本原则是少而精和可接受性, 力求选材基本, 以及涵盖对本学科发展有重要影响的内容。由于我国开设信息与计算科学专业的院校很多, 各院校的情况和要求差别又很大, 所以教师在讲授时可根据情况适当删减部分内容, 除文中打星号的节外, 其他部分也可进一步精减, 只要无损于书的整体结构。

这次修订编者虽然付出了不少努力, 但一定还有不少缺点甚至错误, 望广大师生和读者指正。最后我要感谢帮助过本书成书的同志。大连理工大学吴微同

志从工科角度提出过一些有益意见。数值例子是由吉林大学官成春同志,研究生廖丰恒、吕超、黄冬冬等计算完成的。研究生郭玉坤帮我把手稿输入计算机。高等教育出版社张长虹编辑为本书出版和编辑加工付出了辛勤劳动。谨此对以上各位同志表示谢意!

李荣华

2008 年 8 月 22 日于长春

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

目　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第一章　常微分方程初值问题的数值解法

§1　引　　论

1.1　一阶常微分方程初值问题

设 $f(t,u)$ 在区域 $G: 0 \leqslant t \leqslant T, |u| < \infty$ 上连续, 求 $u = u(t)$ 满足

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = f(t,u), 0 < t \leqslant T, \tag{1.1.1$_1$}$$

$$u(0) = u_0, \tag{1.1.1$_2$}$$

其中 u_0 是给定的初值, 这就是一阶常微分方程的初值问题. 为使问题 $(1.1.1)_{1-2}$ 的解存在、唯一且连续依赖初值 u_0, 即初值问题 $(1.1.1)_{1-2}$ 适定, 还必须对右端 $f(t,u)$ 加适当限制, 通常要求 f 关于 u 满足 Lipschitz 条件: 存在常数 L, 使

$$|f(t,u_1) - f(t,u_2)| \leqslant L\,|u_1 - u_2| \tag{1.1.2}$$

对所有 $t \in [0,T]$ 和 $u_1, u_2 \in (-\infty, +\infty)$ 成立 (参看 [1]). 本章总假定 f 满足上述条件.

虽然初值问题 $(1.1.1)_{1-2}$ 对很大一类右端函数有解, 但求出所需的解绝非易事. 事实上, 除了极特殊情形外, 人们不可能求出它的精确解, 只能用各种近似方法得到满足一定精度的近似解. 读者在常微分方程教程中已经熟悉了级数解法和 Picard 逐步逼近法, 这些方法可以给出解的近似表达式, 称为近似解析方法. 另一类近似方法只给出解在一些离散点上的近似值, 称为数值方法. 由于后一类方法应用范围更广, 特别适合用计算机计算, 所以本章只讨论初值问题的数值解法.

1.2　Euler 法

最简单的数值解法是 Euler 法. 将区间 $[0,T]$ 作 N 等分, 小区间的长度 $h = T/N$ 称为步长, 点列 $t_n = nh (n = 0, 1, \cdots, N)$ 称为节点, $t_0 = 0$. 由已知初值 $u(t_0) = u_0$, 可算出 $u(t)$ 在 $t = t_0$ 的导数值 $u'(t_0) = f(t_0, u(t_0)) = f(t_0, u_0)$. 利

用 Taylor 展式

$$
\begin{aligned}
u(t_1) &= u(t_0+h) = u(t_0) + hu'(t_0) + \frac{h^2}{2}u''(t_0) + \frac{h^3}{6}u'''(\zeta) \\
&= u_0 + hf(t_0, u_0) + R_0,
\end{aligned}
\tag{1.1.3}
$$

其中 $\zeta \in (t_0, t_1)$, 并略去二阶小量 R_0, 得

$$
u_1 = u_0 + hf(t_0, u_0).
$$

u_1 就是 $u(t_1)$ 的近似值. 利用 u_1 又可算出 u_2, 如此下去可算出 u 在所有节点上的近似值, 一般递推公式为

$$
u_{n+1} = u_n + hf(t_n, u_n), \quad n = 0, 1, \cdots, N-1,
\tag{1.1.4}
$$

这就是 Euler 法.

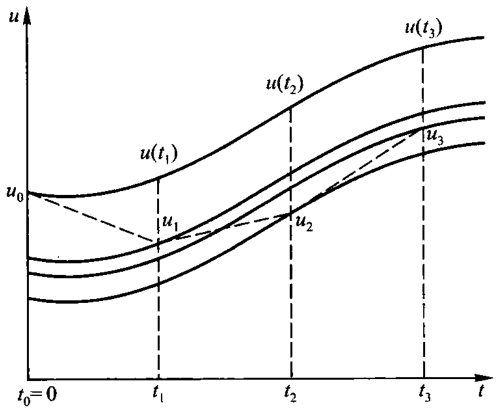


图 1.1

Euler 法有明显的几何意义. 实际上, $(1.1.1)_1$ 的解是 t, u 平面上的积分曲线族, 过任一点恰有一积分曲线通过. 按 Euler 法, 过初始点 (t_0, u_0) 作经过此点的积分曲线的切线 (斜率为 $f(t_0, u_0)$), 沿切线取点 (t_1, u_1) (u_1 按 (1.1.4) 计算) 作为 $(t_1, u(t_1))$ 的近似, 然后过 (t_1, u_1) 做一经过此点的积分曲线的切线, 沿切线取点 (t_2, u_2)(u_2 按 (1.1.4) 计算) 作为 $(t_2, u(t_2))$ 的近似. 如此下去. 即得一以 (t_n, u_n) 为顶点的折线, 这就是用 Euler 法得到的近似积分曲线 (图 1.1 中的虚折线). 从几何上看, h 越小, 此折线逼近积分曲线越好, 因此也称 Euler 法为 Euler 折线法.

现在用数值积分法推导 Euler 法. 将问题 $(1.1.1)_{1-2}$ 写成等价的积分形式:

$$
u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, u(\tau))\mathrm{d}\tau \quad (t_0 = 0),
\tag{1.1.5}
$$

特别

$$u(t_1) = u_0 + \int_{t_0}^{t_1} f(\tau, u(\tau))\mathrm{d}\tau \quad (t_0 = 0).$$

用左矩形公式近似右端积分, 并用 u_1 代替 $u(t_1)$ 即得 $u_1 = u_0 + hf(t_0, u_0)$, 这就是 Euler 法 (1.1.4). 我们也可用梯形公式近似上述积分, 仍用 u_1 替代 $u(t_1)$, 得

$$u_1 = u_0 + \frac{h}{2}\left[f(t_0, u_0) + f(t_1, u_1)\right].$$

一般而言,

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}\left[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1})\right], n = 0, 1, \cdots, N-1, \tag{1.1.6}$$

称之为改进的 Euler 法. 显然改进的 Euler 法比 Euler 法精度更高, 但每步计算要解非线性方程 (1.1.6) (关于 u_{n+1}), 这可用如下迭代公式:

$$u_{n+1}^{[k+1]} = u_n + \frac{h}{2}\left[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1}^{[k]})\right], \quad k = 0, 1, \cdots. \tag{1.1.7}$$

取初值为 $u_{n+1}^{[0]} = u_n$, 一般只需迭代几步即可收敛.

现在分析一下 Euler 法误差的来源. 为使问题简化, 我们不考虑因计算机字长限制引起的舍入误差. 注意 (1.1.3) 或其一般的递推式

$$u(t_{n+1}) = u(t_n) + hf(t_n, u(t_n)) + R_n \tag{1.1.8}$$

是精确方程, 其中

$$R_n = \frac{h^2}{2}u''(t_n) + \frac{h^3}{6}u'''(\zeta), \zeta \in (t_n, t_{n+1}). \tag{1.1.9}$$

由 (1.1.8) 到 Euler 法 (1.1.4) 的唯一差别是舍去了余项 R_n. 令

$$L[u_n; h] = u_{n+1} - u_n - hf(t_n, u_n), \tag{1.1.10}$$

取 $u_n = u(t_n)$, 则 $R_n = L[u(t_n); h] = u(t_{n+1}) - u(t_n) - hu'(t_n)$. 今后称 R_n 为**局部截断误差**. 显然 Euler 法的局部截断误差的阶为 $O(h^2)$.

将 $t \in [t_n, t_{n+1}]$ 表成 $t = t_n + \tau h, 0 \leqslant \tau \leqslant 1$. 由线性插值的余项公式, 我们有

$$\begin{aligned} f(t, u(t)) &= u'(t) = u'(t_n + \tau h) \\ &= u'(t_n) + \tau[u'(t_{n+1}) - u'(t_n)] + \frac{h^2}{2}\tau(\tau - 1)u'''(t_n + \theta h), (0 \leqslant \theta \leqslant 1) \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, u(t))\mathrm{d}t &= \int_0^1 \left[u'(t_n) + \tau(u'(t_{n+1}) - u'(t_n))\right] h\mathrm{d}\tau + \\ &\quad \frac{h^3}{2}\int_0^1 \tau(\tau - 1)u'''(t_n + \theta h)\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{h}{2}\left[u'(t_n) + u'(t_{n+1})\right] - \frac{h^3}{12}u'''(\zeta), \quad \zeta \in (t_n, t_{n+1}). \end{aligned}$$

足见改进 Euler 法的局部截断误差为

(1.1.11) $$R_n^{(1)} = -\frac{h^3}{12}u'''(\zeta),$$

其阶为 $O(h^3)$, 比 Euler 法高一阶.

当然我们更关心的是近似解的误差, 即

$$e_n = u(t_n) - u_n,$$

称为**整体误差**. 将 (1.1.4) 和 (1.1.8) 相减, 知 e_n 满足误差方程:

(1.1.12) $$e_{n+1} = e_n + h\left[f(t_n, u(t_n)) - f(t_n, u_n)\right] + R_n.$$

因 $f(t,u)$ 关于 u 满足 Lipschitz 条件 (1.1.2), 故

$$\begin{aligned}|e_{n+1}| &\leqslant |e_n| + Lh\,|e_n| + R\\ &= (1+Lh)\,|e_n| + R,\end{aligned}$$

其中 $R = \max\limits_n |R_n|$. 以此递推, 得

$$\begin{aligned}|e_n| &\leqslant (1+Lh)\,|e_{n-1}| + R \leqslant (1+Lh)^2|e_{n-2}| + (1+Lh)R + R\\ &\leqslant \cdots \leqslant (1+Lh)^n\,|e_0| + R\sum_{j=0}^{n-1}(1+Lh)^j\\ &= (1+Lh)^n\,|e_0| + \frac{R}{Lh}[(1+Lh)^n - 1].\end{aligned}$$

注意 $t_n = t_0 + nh \leqslant T, n = (t_n - t_0)/h$, 于是

(1.1.13) $$|e_n| \leqslant e^{L(T-t_0)}|e_0| + \frac{R}{Lh}(e^{L(T-t_0)} - 1), \quad n = 1, \cdots, N.$$

右端依赖初始误差 e_0 和局部截断误差的界 R. 对 Euler 法, 可取 $R = Ch^2$ (C 是与 n 无关的常数). 若 $e_0 = 0$ (取 $u_0 = u(t_0)$), 则

(1.1.14) $$|e_n| \leqslant CL^{-1}e^{L(T-t_0)}h.$$

所以 $e_n = O(h)$, 比局部截断误差低一阶. 用同样方法可以证明改进的 Euler 法的整体误差的阶为 $O(h^2)$, 也比局部截断误差低一阶.

在实际计算中, 初值 u_0 往往不能精确给出 (例如, 包含测量误差, 舍入误差等等), 其误差将依次传递下去. 如果传递误差能够被控制, 精确说来, 传递误差连续依赖初始误差, 则说算法稳定; 否则就说不稳定. 显然不稳定的算法是不能

用的. 我们考察 Euler 法. 设从初值 u_0 和 v_0 算出的节点值分别为 $\{u_n\}$ 和 $\{v_n\}$, 则

$$u_n = u_{n-1} + hf(t_{n-1}, u_{n-1}),$$
$$v_n = v_{n-1} + hf(t_{n-1}, v_{n-1}), n = 1, 2, \cdots, N.$$

两式相减并令 $e_n = u_n - v_n$, 得

$$e_n = e_{n-1} + h\left[f(t_{n-1}, u_{n-1}) - f(t_{n-1}, v_{n-1})\right],$$

从而

$$\begin{aligned}|e_n| &\leqslant |e_{n-1}| + Lh\,|e_{n-1}| = (1 + Lh)\,|e_{n-1}| \\ &\leqslant \cdots \leqslant (1 + Lh)^n\,|e_0| \\ &\leqslant e^{LT}\,|e_0| \qquad (\text{因 } nh \leqslant T).\end{aligned}$$

这说明 e_n 连续依赖初始误差 e_0, 即 Euler 法稳定. 同样可证改进的 Euler 法也稳定.

1.3　线性差分方程

设 $a_0(n), a_1(n), \cdots, a_k(n)$ 和 $b_n(n = 0, 1, \cdots)$ 已知,$a_0(n) \neq 0, a_k(n) \neq 0$. 称序列 $\{u_n\}$ 满足的方程

(1.1.15)　$$a_k(n)u_{n+k} + a_{k-1}(n)u_{n+k-1} + \cdots + a_0(n)u_n = b_n, n = 0, 1, 2, \cdots$$

为 k 阶线性差分方程, 序列 $\{u_n\}$ 是差分方程的解. 当右端 $b_n = 0(n = 0, 1, \cdots)$ 时, 称为齐方程. 为确定差分解, 需给定 k 个初值 $u_0, u_1, \cdots, u_{k-1}$.

记 $\Delta_+ u_n = u_{n+1} - u_n$, 称为向前差分, 则 $u_{n+1} = u_n + \Delta_+ u_n$, 即 u_{n+1} 可用 u_n 的一阶差分表示. 又二阶差分

$$\Delta_+^2 u_n = \Delta_+ u_{n+1} - \Delta_+ u_n = u_{n+2} - u_{n+1} - \Delta_+ u_n = u_{n+2} - u_n - 2\Delta_+ u_n,$$

故 $u_{n+2} = u_n + 2\Delta_+ u_n + \Delta_+^2 u_n$, 即 u_{n+2} 可用 u_n 的一阶和二阶差分表示. 依次类推, 可知 u_{n+j} 能用 u_n 的一阶、二阶直至 j 阶差分表示. 所以差分方程 (1.1.15) 的最高阶为 k. k 阶线性差分方程是 k 阶线性常微分方程的离散模拟, 二者有许多平行的基本性质. 例如:

(1) 齐方程的解具有可加性和齐次性. 若 $\{u_n\}$ 和 $\{v_n\}$ 都是齐方程的解, α 和 β 是任意常数, 则 $\{\alpha u_n + \beta v_n\}$ 也是它的解.

(2) k 阶齐方程存在 k 个线性无关的解. k 个解 $\{u_n^{(j)}\}(j = 0, 1, \cdots, k-1)$ 说是线性无关的, 如果方程

$$\sum_{j=0}^{k-1} c_j u_n^{(j)} = 0, \quad n = 0, 1, \cdots$$

仅当 $c_0 = c_1 = \cdots = c_{k-1} = 0$ 时成立. 由于任一解 $\{u_n^{(j)}\}(n = 0, 1, \cdots)$ 可表为初值 $u_0^{(j)}, \cdots, u_{k-1}^{(j)}$ 的一次组合, 所以 k 个解 $\{u_n^{(j)}\}(n = 0, 1, \cdots, k-1)$ 线性无关的充要条件是初始向量 $\left(u_0^{(j)}, \cdots, u_{k-1}^{(j)}\right)^{\mathrm{T}}$ (T 表示转置, $j = 0, 1, \cdots, k-1$) 线性无关, 即行列式

$$\begin{vmatrix} u_0^{(0)} & u_0^{(1)} & \cdots & u_0^{(k-1)} \\ u_1^{(0)} & u_1^{(1)} & \cdots & u_1^{(k-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{k-1}^{(0)} & u_{k-1}^{(1)} & \cdots & u_{k-1}^{(k-1)} \end{vmatrix} \neq 0.$$

由此进一步推出, k 阶齐方程恰有 k 个线性无关的解, 且任一解可表示成这些解的线性组合.

(3) 非齐方程的通解等于齐方程的通解与非齐方程一特解之和.

今考虑常系数差分方程:

(1.1.16)
$$\sum_{j=0}^{k} a_j u_{n+j} = b_n, \quad n = 0, 1, \cdots,$$

其齐方程为

(1.1.17)
$$\sum_{j=0}^{k} a_j u_{n+j} = 0, \quad n = 0, 1, \cdots.$$

考虑齐方程形如 $u_n = \zeta^n$ (ζ 待定) 的解, 以之代到 (1.1.17), 知 ζ 应满足

$$a_k \zeta^k + a_{k-1} \zeta^{k-1} + \cdots + a_1 \zeta + a_0 = 0,$$

即 ζ 应是代数方程

(1.1.18)
$$a_k \lambda^k + a_{k-1} \lambda^{k-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

的根. 反之, 若 ζ 是 (1.1.18) 的任一根, 则 $u_n = \zeta^n$ 必为 (1.1.17) 的解. 分几种情况:

(i) 方程 (1.1.18) 有 k 个互异的实根 $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_k$, 则 $\zeta_1^n, \zeta_2^n, \cdots, \zeta_k^n$ 是差分方程 (1.1.17) 的 k 个线性无关解, 通解为

$$u_n = \sum_{j=1}^{k} c_j \zeta_j^n, \quad n = 0, 1, \cdots.$$

(ii) 方程 (1.1.18) 有 m 个互异实根 $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_m$, ζ_j 的重数是 r_j, $r_1 + \cdots + r_m = k$, 则

$$\zeta_j^n, n\zeta_j^n, \cdots, n^{r_j - 1}\zeta_j^n, n = 0, 1, \cdots$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com