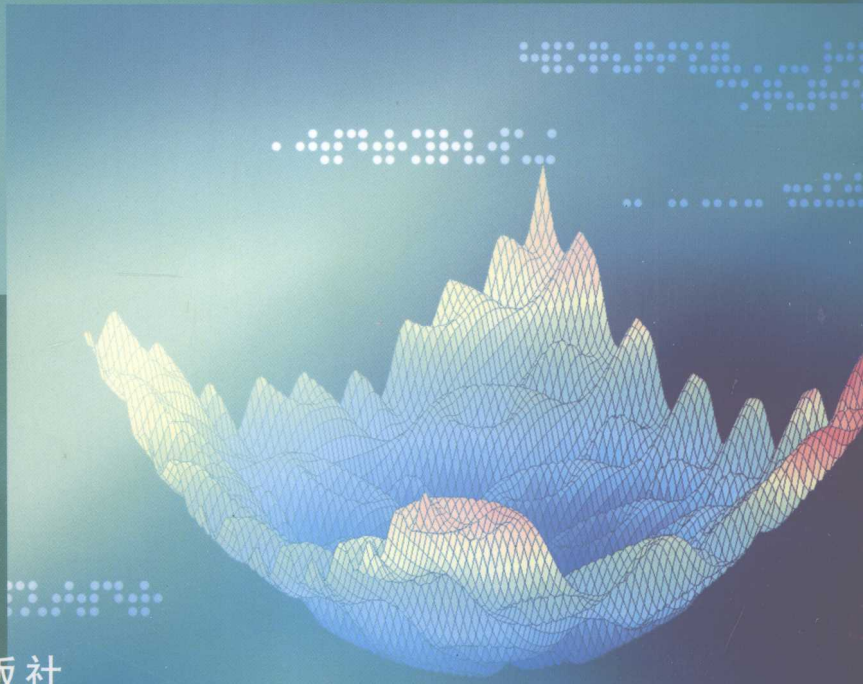


● 普通高等学校信息与计算科学专业系列丛书

微分方程 数值解法 (第四版)

■ 李荣华 刘 播



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等学校信息与计算科学专业系列丛书

微分方程数值解法

(第四版)

李荣华 刘 播

高等教育出版社

内容提要

本书是编者在《微分方程数值解法》(第三版)的基础上修订而成的。本次修订的宗旨是加强方法及其应用,考虑到不同院校的需要,仍然保留常微分方程数值解法这一章。为了方便教学,采取先介绍有限差分法,后介绍 Galerkin 有限元法,去掉原来的第七章,将离散方程的有关解法与椭圆方程的差分法和有限元法合并,同时增设了一些数值例子,适当删减部分理论内容,突出应用,降低难度。本书包括六章,第一章为常微分方程数值解法,第二章至第四章为椭圆、抛物和双曲偏微分方程的有限差分法,第五章、第六章为 Galerkin 有限元法。

本书是为信息与计算科学专业编写的教材,也可以作为数学与应用数学、力学及某些工程科学专业的教学用书,对于从事科学技术、工程与科学计算的专业人员也有参考价值。

图书在版编目(CIP)数据

微分方程数值解法/李荣华,刘播.—4版.—北京:
高等教育出版社,2009.1

ISBN 978-7-04-024863-0

I. 微… II. ①李…②刘… III. 微分方程-数值
计算-高等学校-教材 IV. O241.8

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 191694 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100120	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	http://www.landracom.com
印 刷	北京印刷厂		http://www.landracom.com.cn
		畅想教育	http://www.widedu.com
开 本	787×960 1/16	版 次	1980年3月第1版
印 张	18.25		2009年1月第4版
字 数	340 000	印 次	2009年1月第1次印刷
		定 价	25.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 24863-00

前 言

微分方程数值解法在数值分析中占有重要的地位,它以逼近论、数值代数等学科为基础,反过来又推动这些学科向前发展。微分方程数值解法在科学计算、工程技术等领域有极其广泛的应用。自上世纪 40 年代以来,它已发展成一门庞大的计算技术学科,并早已列为原来计算数学和应用数学专业的基础课之一。与此同时,国内外出版了不少有关专著和教材。在我国,编者受上海理科教材会议(1977 年)委托,于 1980 年与冯果忱合作为计算数学专业编写出版过第一本教材《微分方程数值解法》,1989 年修改后出版了第二版,1996 年经编者较大修改后又出版了第三版。1998 年高校专业目录有了调整,原计算数学专业更名为信息与计算科学专业,教学计划和内容也有些改变(如有些院校建议将常微分方程数值解法合并到逼近论中去讲)。编者根据新情况,特别是微分方程数值解法的新进展,于 2005 年编写出版了《偏微分方程的数值解法》(高等教育出版社)。原以为这就可以满足本专业的需要了,但实际上,设有信息与计算科学专业的院校分布面很广,不少院校,主要是一些非理科院校仍采用《微分方程数值解法》(第三版),将常微分方程和偏微分方程的数值解法并为一门课讲授。

第三版出版以来,又过去了十二年,笔者在教学实践中感到这个版本仍有不少缺点。例如原书在应用方面强调不够,特别是缺少说明方法应用的例子。再如原书内容虽已做过精选,但一些院校反映内容仍然偏多,给教学带来一定困难。我希望趁这次再版机会,对这些问题尽可能加以补正和调整。首先,选材以方法为主,指出方法如何在实际中应用,并有针对性地选编了一些数值应用例子。为此我们还参考了 J. W. Thomas 的书: Numerical Partial Differential Equations (1995)。其次,对原书的理论部分(如收敛性和误差估计)做了适当删减,这些内容在原书中也不属于必学范围。第三,在体系上我们也做了较大变动,将差分法放在 Galerkin 有限元法前面,删去原书第七章离散化方程的解法,将主要解法与椭圆方程差分法及有限元法各章合并。这样调整后也许更便于教学。

本书选材的基本原则是少而精和可接受性,力求选材基本,以及涵盖对本学科发展有重要影响的内容。由于我国开设信息与计算科学专业的院校很多,各院校的情况和要求差别又很大,所以教师在讲授时可根据情况适当删减部分内容,除文中打星号的节外,其他部分也可进一步精减,只要无损于书的整体结构。

这次修订编者虽然付出了不少努力,但一定还有不少缺点甚至错误,望广大师生和读者指正。最后我要感谢帮助过本书成书的同志。大连理工大学吴微同

志从工科角度提出过一些有益意见。数值例子是由吉林大学官成春同志, 研究生廖丰恒、吕超、黄冬冬等计算完成的。研究生郭玉坤帮我把手稿输入计算机。高等教育出版社张长虹编辑为本书出版和编辑加工付出了辛勤劳动。谨此对以上各位同志表示谢意!

李荣华

2008年8月22日于长春

目 录

第一章 常微分方程初值问题的数值解法	1
§1 引论	1
1.1 一阶常微分方程初值问题	1
1.2 Euler 法	1
1.3 线性差分方程	5
1.4 Gronwall 不等式	9
习题	10
§2 线性多步法	10
2.1 数值积分法	11
2.2 待定系数法	17
2.3 预估 - 校正算法	19
2.4 多步法的计算问题	21
习题	21
§3 相容性、稳定性和误差估计	22
3.1 局部截断误差和相容性	22
3.2 稳定性	23
3.3 收敛性和误差估计	28
习题	29
§4 单步法和 Runge - Kutta (龙格 - 库塔) 法	30
4.1 Taylor 展开法	30
4.2 单步法的稳定性和收敛性	31
4.3 Runge - Kutta 法	33
习题	37
§5 绝对稳定性和绝对稳定域	38
5.1 绝对稳定性	38
5.2 绝对稳定域	40
5.3 应用例子	41
习题	44

§6	一阶方程组和刚性问题	44
6.1	对一阶方程组的推广	44
6.2	刚性问题	46
6.3	A 稳定性	48
6.4	数值例子	50
*§7	外推法	51
7.1	多项式外推	51
7.2	对初值问题的应用	53
7.3	用外推法估计误差	53
	习题	54
第二章	椭圆型方程的有限差分法	55
§1	差分逼近的基本概念	55
§2	一维差分格式	60
2.1	直接差分化	60
2.2	有限体积法	62
2.3	待定系数法	65
2.4	边值条件的处理	66
	习题	67
§3	矩形网的差分格式	67
3.1	五点差分格式	68
3.2	边值条件的处理	72
3.3	极坐标形式的差分格式	74
	习题	75
§4	三角网的差分格式	76
	习题	80
*§5	极值定理和敛速估计	80
5.1	差分方程	80
5.2	极值定理	83
5.3	五点格式的敛速估计	84
	习题	85
§6	迭代法	86
6.1	一般迭代法	89
6.2	SOR 法 (逐次超松弛法)	91
	习题	93
§7	交替方向迭代法	94
	习题	98

§8	预处理共轭梯度法	98
8.1	共轭梯度法	98
8.2	预处理共轭梯度法	100
	习题	104
§9	数值例子	104
第三章	抛物型方程的有限差分法	107
§1	最简差分格式	107
	习题	112
§2	稳定性与收敛性	113
2.1	稳定性概念	113
2.2	判别稳定性的直接估计法 (矩阵法)	115
2.3	收敛性与敛速估计	119
	习题	121
§3	Fourier 方法	121
	习题	127
§4	判别差分格式稳定性的代数准则	127
	习题	132
*§5	变系数抛物方程	132
	习题	136
§6	分数步长法	136
6.1	ADI 法	137
6.2	预-校法	139
6.3	LOD 法	140
	习题	141
§7	数值例子	141
7.1	一维抛物方程的初边值问题	141
7.2	二维抛物方程的初边值问题	143
7.3	舍对流项的抛物方程	145
第四章	双曲型方程的有限差分法	150
§1	波动方程的差分逼近	150
1.1	波动方程及其特征	150
1.2	显格式	151
1.3	稳定性分析	153
1.4	隐格式	157
1.5	数值例子	157

	习题	158
§2	一阶线性双曲方程组	159
	2.1 双曲型方程组及其特征	159
	2.2 Cauchy 问题、依存域、影响域和决定域	162
	2.3 初边值问题	164
	习题	165
§3	初值问题的差分逼近	166
	3.1 迎风格式	166
	3.2 积分守恒差分格式	169
	3.3 粘性差分格式	171
	3.4 其他差分格式	173
	习题	174
§4	初边值问题和对流占优扩散方程	175
	4.1 初边值问题	175
	4.2 对流占优扩散方程	177
	4.3 数值例子	179
	习题	181
第五章	边值问题的变分形式与 Ritz-Galerkin 法	183
§1	二次函数的极值	183
	习题	185
§2	Sobolev 空间初步	185
	2.1 弦的平衡	185
	2.2 一维区间上的 Sobolev 空间 $H^m(I)$	187
	2.3 平面域上的 Sobolev 空间 $H^m(G)$	191
	习题	192
§3	两点边值问题	192
	3.1 极小位能原理	192
	3.2 虚功原理	197
	习题	198
§4	二阶椭圆边值问题	198
	4.1 极小位能原理	198
	4.2 自然边值条件	202
	4.3 虚功原理	203
	习题	204
§5	Ritz-Galerkin 方法	205
	习题	211

§6 谱方法	211
6.1 三角函数逼近	212
6.2 Fourier 谱方法	214
6.3 拟谱方法 (配置法)	218
第六章 Galerkin 有限元法	221
§1 两点边值问题的有限元法	221
1.1 从 Ritz 法出发	222
1.2 从 Galerkin 法出发	226
1.3 收敛性和误差估计	229
习题	231
§2 一维高次元	231
2.1 一次元 (线性元)	232
2.2 二次元	232
2.3 三次元	234
习题	237
§3 解二维问题的矩形元	237
3.1 Lagrange 型公式	237
3.2 Hermite 型公式	240
习题	242
§4 三角形元	242
4.1 面积坐标及有关公式	243
4.2 Lagrange 型公式	245
4.3 Hermite 型公式	246
习题	247
*§5 曲边元和等参变换	247
§6 二阶椭圆方程的有限元法	252
6.1 有限元方程的形成	252
6.2 矩阵元素的计算	253
6.3 边值条件的处理	255
6.4 举例: Poisson 方程的有限元法	257
6.5 数值例子	260
习题	262
*§7 多重网格法	262
7.1 差分形式的二重网格法	263
7.2 有限元形式的二重网格法	266
7.3 多重网格迭代和套迭代技术	267

§8 初边值问题的有限元法.....	268
8.1 热传导方程.....	269
8.2 波动方程.....	271
名词索引	273
参考文献	277

第一章 常微分方程初值问题的数值解法

§1 引 论

1.1 一阶常微分方程初值问题

设 $f(t, u)$ 在区域 $G: 0 \leq t \leq T, |u| < \infty$ 上连续, 求 $u = u(t)$ 满足

$$(1.1.1)_1 \quad \frac{du}{dt} = f(t, u), 0 < t \leq T,$$

$$(1.1.1)_2 \quad u(0) = u_0,$$

其中 u_0 是给定的初值, 这就是一阶常微分方程的初值问题. 为使问题 (1.1.1)₁₋₂ 的解存在、唯一且连续依赖初值 u_0 , 即初值问题 (1.1.1)₁₋₂ 适定, 还必须对右端 $f(t, u)$ 加适当限制, 通常要求 f 关于 u 满足 Lipschitz 条件: 存在常数 L , 使

$$(1.1.2) \quad |f(t, u_1) - f(t, u_2)| \leq L |u_1 - u_2|$$

对所有 $t \in [0, T]$ 和 $u_1, u_2 \in (-\infty, +\infty)$ 成立 (参看 [1]). 本章总假定 f 满足上述条件.

虽然初值问题 (1.1.1)₁₋₂ 对很大一类右端函数有解, 但求出所需的解绝非易事. 事实上, 除了极特殊情形外, 人们不可能求出它的精确解, 只能用各种近似方法得到满足一定精度的近似解. 读者在常微分方程教程中已经熟悉了级数解法和 Picard 逐步逼近法, 这些方法可以给出解的近似表达式, 称为近似解析方法. 另一类近似方法只给出解在一些离散点上的近似值, 称为数值方法. 由于后一类方法应用范围更广, 特别适合用计算机计算, 所以本章只讨论初值问题的数值解法.

1.2 Euler 法

最简单的数值解法是 Euler 法. 将区间 $[0, T]$ 作 N 等分, 小区间的长度 $h = T/N$ 称为步长, 点列 $t_n = nh (n = 0, 1, \dots, N)$ 称为节点, $t_0 = 0$. 由已知初值 $u(t_0) = u_0$, 可算出 $u(t)$ 在 $t = t_0$ 的导数值 $u'(t_0) = f(t_0, u(t_0)) = f(t_0, u_0)$. 利

用 Taylor 展式

$$(1.1.3) \quad \begin{aligned} u(t_1) &= u(t_0 + h) = u(t_0) + hu'(t_0) + \frac{h^2}{2}u''(t_0) + \frac{h^3}{6}u'''(\zeta) \\ &= u_0 + hf(t_0, u_0) + R_0, \end{aligned}$$

其中 $\zeta \in (t_0, t_1)$, 并略去二阶小量 R_0 , 得

$$u_1 = u_0 + hf(t_0, u_0).$$

u_1 就是 $u(t_1)$ 的近似值. 利用 u_1 又可算出 u_2 , 如此下去可算出 u 在所有节点上的近似值, 一般递推公式为

$$(1.1.4) \quad u_{n+1} = u_n + hf(t_n, u_n), \quad n = 0, 1, \dots, N-1,$$

这就是 Euler 法.

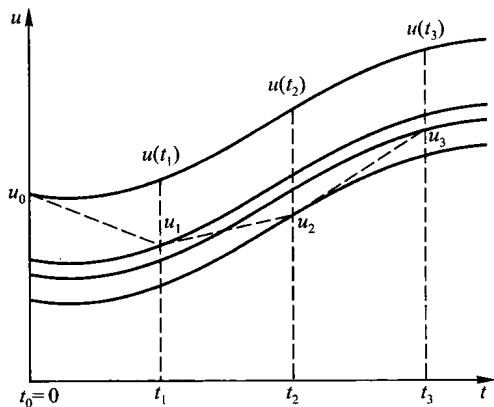


图 1.1

Euler 法有明显的几何意义. 实际上, (1.1.1)₁ 的解是 t, u 平面上的积分曲线族, 过任一点恰有一积分曲线通过. 按 Euler 法, 过初始点 (t_0, u_0) 作经过此点的积分曲线的切线 (斜率为 $f(t_0, u_0)$), 沿切线取点 (t_1, u_1) (u_1 按 (1.1.4) 计算) 作为 $(t_1, u(t_1))$ 的近似, 然后过 (t_1, u_1) 做一经过此点的积分曲线的切线, 沿切线取点 (t_2, u_2) (u_2 按 (1.1.4) 计算) 作为 $(t_2, u(t_2))$ 的近似. 如此下去, 即得一以 (t_n, u_n) 为顶点的折线, 这就是用 Euler 法得到的近似积分曲线 (图 1.1 中的虚折线). 从几何上看, h 越小, 此折线逼近积分曲线越好, 因此也称 Euler 法为 Euler 折线法.

现在用数值积分法推导 Euler 法. 将问题 (1.1.1)₁₋₂ 写成等价的积分形式:

$$(1.1.5) \quad u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, u(\tau))d\tau \quad (t_0 = 0),$$

特别

$$u(t_1) = u_0 + \int_{t_0}^{t_1} f(\tau, u(\tau)) d\tau \quad (t_0 = 0).$$

用左矩形公式近似右端积分, 并用 u_1 代替 $u(t_1)$ 即得 $u_1 = u_0 + hf(t_0, u_0)$, 这就是 Euler 法 (1.1.4). 我们也可用梯形公式近似上述积分, 仍用 u_1 替代 $u(t_1)$, 得

$$u_1 = u_0 + \frac{h}{2} [f(t_0, u_0) + f(t_1, u_1)].$$

一般而言,

$$(1.1.6) \quad u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2} [f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1})], \quad n = 0, 1, \dots, N-1,$$

称之为改进的 Euler 法. 显然改进的 Euler 法比 Euler 法精度更高, 但每步计算要解非线性方程 (1.1.6) (关于 u_{n+1}), 这可用如下迭代公式:

$$(1.1.7) \quad u_{n+1}^{[k+1]} = u_n + \frac{h}{2} [f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1}^{[k]})], \quad k = 0, 1, \dots.$$

取初值为 $u_{n+1}^{[0]} = u_n$, 一般只需迭代几步即可收敛.

现在分析一下 Euler 法误差的来源. 为使问题简化, 我们不考虑因计算机字长限制引起的舍入误差. 注意 (1.1.3) 或其一般的递推式

$$(1.1.8) \quad u(t_{n+1}) = u(t_n) + hf(t_n, u(t_n)) + R_n$$

是精确方程, 其中

$$(1.1.9) \quad R_n = \frac{h^2}{2} u''(t_n) + \frac{h^3}{6} u'''(\zeta), \quad \zeta \in (t_n, t_{n+1}).$$

由 (1.1.8) 到 Euler 法 (1.1.4) 的唯一差别是舍去了余项 R_n . 令

$$(1.1.10) \quad L[u_n; h] = u_{n+1} - u_n - hf(t_n, u_n),$$

取 $u_n = u(t_n)$, 则 $R_n = L[u(t_n); h] = u(t_{n+1}) - u(t_n) - hu'(t_n)$. 今后称 R_n 为局部截断误差. 显然 Euler 法的局部截断误差的阶为 $O(h^2)$.

将 $t \in [t_n, t_{n+1}]$ 表成 $t = t_n + \tau h, 0 \leq \tau \leq 1$. 由线性插值的余项公式, 我们有

$$\begin{aligned} f(t, u(t)) &= u'(t) = u'(t_n + \tau h) \\ &= u'(t_n) + \tau[u'(t_{n+1}) - u'(t_n)] + \frac{h^2}{2} \tau(\tau - 1) u'''(t_n + \theta h), \quad (0 \leq \theta \leq 1) \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, u(t)) dt &= \int_0^1 [u'(t_n) + \tau(u'(t_{n+1}) - u'(t_n))] h d\tau + \\ &\quad \frac{h^3}{2} \int_0^1 \tau(\tau - 1) u'''(t_n + \theta h) d\tau \\ &= \frac{h}{2} [u'(t_n) + u'(t_{n+1})] - \frac{h^3}{12} u'''(\zeta), \quad \zeta \in (t_n, t_{n+1}). \end{aligned}$$

足见改进 Euler 法的局部截断误差为

$$(1.1.11) \quad R_n^{(1)} = -\frac{h^3}{12}u'''(\zeta),$$

其阶为 $O(h^3)$, 比 Euler 法高一阶.

当然我们更关心的是近似解的误差, 即

$$e_n = u(t_n) - u_n,$$

称为整体误差. 将 (1.1.4) 和 (1.1.8) 相减, 知 e_n 满足误差方程:

$$(1.1.12) \quad e_{n+1} = e_n + h[f(t_n, u(t_n)) - f(t_n, u_n)] + R_n.$$

因 $f(t, u)$ 关于 u 满足 Lipschitz 条件 (1.1.2), 故

$$\begin{aligned} |e_{n+1}| &\leq |e_n| + Lh|e_n| + R \\ &= (1 + Lh)|e_n| + R, \end{aligned}$$

其中 $R = \max_n |R_n|$. 以此递推, 得

$$\begin{aligned} |e_n| &\leq (1 + Lh)|e_{n-1}| + R \leq (1 + Lh)^2|e_{n-2}| + (1 + Lh)R + R \\ &\leq \cdots \leq (1 + Lh)^n |e_0| + R \sum_{j=0}^{n-1} (1 + Lh)^j \\ &= (1 + Lh)^n |e_0| + \frac{R}{Lh} [(1 + Lh)^n - 1]. \end{aligned}$$

注意 $t_n = t_0 + nh \leq T, n = (t_n - t_0)/h$, 于是

$$(1.1.13) \quad |e_n| \leq e^{L(T-t_0)} |e_0| + \frac{R}{Lh} (e^{L(T-t_0)} - 1), \quad n = 1, \cdots, N.$$

右端依赖初始误差 e_0 和局部截断误差的界 R . 对 Euler 法, 可取 $R = Ch^2$ (C 是与 n 无关的常数). 若 $e_0 = 0$ (取 $u_0 = u(t_0)$), 则

$$(1.1.14) \quad |e_n| \leq CL^{-1}e^{L(T-t_0)}h.$$

所以 $e_n = O(h)$, 比局部截断误差低一阶. 用同样方法可以证明改进的 Euler 法的整体误差的阶为 $O(h^2)$, 也比局部截断误差低一阶.

在实际计算中, 初值 u_0 往往不能精确给出 (例如, 包含测量误差, 舍入误差等等), 其误差将依次传递下去. 如果传递误差能够被控制, 精确说来, 传递误差连续依赖初始误差, 则说算法稳定; 否则就说不稳定. 显然不稳定的算法是不能

用的. 我们考察 Euler 法. 设从初值 u_0 和 v_0 算出的节点值分别为 $\{u_n\}$ 和 $\{v_n\}$, 则

$$\begin{aligned} u_n &= u_{n-1} + hf(t_{n-1}, u_{n-1}), \\ v_n &= v_{n-1} + hf(t_{n-1}, v_{n-1}), n = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

两式相减并令 $e_n = u_n - v_n$, 得

$$e_n = e_{n-1} + h[f(t_{n-1}, u_{n-1}) - f(t_{n-1}, v_{n-1})],$$

从而

$$\begin{aligned} |e_n| &\leq |e_{n-1}| + Lh|e_{n-1}| = (1 + Lh)|e_{n-1}| \\ &\leq \dots \leq (1 + Lh)^n |e_0| \\ &\leq e^{LT} |e_0| \quad (\text{因 } nh \leq T). \end{aligned}$$

这说明 e_n 连续依赖初始误差 e_0 , 即 Euler 法稳定. 同样可证改进的 Euler 法也稳定.

1.3 线性差分方程

设 $a_0(n), a_1(n), \dots, a_k(n)$ 和 $b_n(n = 0, 1, \dots)$ 已知, $a_0(n) \neq 0, a_k(n) \neq 0$. 称序列 $\{u_n\}$ 满足的方程

$$(1.1.15) \quad a_k(n)u_{n+k} + a_{k-1}(n)u_{n+k-1} + \dots + a_0(n)u_n = b_n, n = 0, 1, 2, \dots$$

为 k 阶线性差分方程, 序列 $\{u_n\}$ 是差分方程的解. 当右端 $b_n = 0(n = 0, 1, \dots)$ 时, 称为齐方程. 为确定差分方程, 需给定 k 个初值 u_0, u_1, \dots, u_{k-1} .

记 $\Delta_+ u_n = u_{n+1} - u_n$, 称为向前差分, 则 $u_{n+1} = u_n + \Delta_+ u_n$, 即 u_{n+1} 可用 u_n 的一阶差分表示. 又二阶差分

$$\Delta_+^2 u_n = \Delta_+ u_{n+1} - \Delta_+ u_n = u_{n+2} - u_{n+1} - \Delta_+ u_n = u_{n+2} - u_n - 2\Delta_+ u_n,$$

故 $u_{n+2} = u_n + 2\Delta_+ u_n + \Delta_+^2 u_n$, 即 u_{n+2} 可用 u_n 的一阶和二阶差分表示. 依次类推, 可知 u_{n+j} 能用 u_n 的一阶、二阶直至 j 阶差分表示. 所以差分方程 (1.1.15) 的最高阶为 k . k 阶线性差分方程是 k 阶线性常微分方程的离散模拟, 二者有许多平行的基本性质. 例如:

(1) 齐方程的解具有可加性和齐次性. 若 $\{u_n\}$ 和 $\{v_n\}$ 都是齐方程的解, α 和 β 是任意常数, 则 $\{\alpha u_n + \beta v_n\}$ 也是它的解.

(2) k 阶齐方程存在 k 个线性无关的解. k 个解 $\{u_n^{(j)}\}(j = 0, 1, \dots, k-1)$ 说是线性无关的, 如果方程

$$\sum_{j=0}^{k-1} c_j u_n^{(j)} = 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

仅当 $c_0 = c_1 = \cdots = c_{k-1} = 0$ 时成立. 由于任一解 $\{u_n^{(j)}\} (n = 0, 1, \cdots)$ 可表为初值 $u_0^{(j)}, \cdots, u_{k-1}^{(j)}$ 的一次组合, 所以 k 个解 $\{u_n^{(j)}\} (n = 0, 1, \cdots, k-1)$ 线性无关的充要条件是初始向量 $(u_0^{(j)}, \cdots, u_{k-1}^{(j)})^T$ (T 表示转置, $j = 0, 1, \cdots, k-1$) 线性无关, 即行列式

$$\begin{vmatrix} u_0^{(0)} & u_0^{(1)} & \cdots & u_0^{(k-1)} \\ u_1^{(0)} & u_1^{(1)} & \cdots & u_1^{(k-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{k-1}^{(0)} & u_{k-1}^{(1)} & \cdots & u_{k-1}^{(k-1)} \end{vmatrix} \neq 0.$$

由此进一步推出, k 阶齐方程恰有 k 个线性无关的解, 且任一解可表示成这些解的线性组合.

(3) 非齐方程的通解等于齐方程的通解与非齐方程一特解之和.

今考虑常系数差分方程:

$$(1.1.16) \quad \sum_{j=0}^k a_j u_{n+j} = b_n, \quad n = 0, 1, \cdots,$$

其齐方程为

$$(1.1.17) \quad \sum_{j=0}^k a_j u_{n+j} = 0, \quad n = 0, 1, \cdots.$$

考虑齐方程形如 $u_n = \zeta^n$ (ζ 待定) 的解, 以之代到 (1.1.17), 知 ζ 应满足

$$a_k \zeta^k + a_{k-1} \zeta^{k-1} + \cdots + a_1 \zeta + a_0 = 0,$$

即 ζ 应是代数方程

$$(1.1.18) \quad a_k \lambda^k + a_{k-1} \lambda^{k-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

的根. 反之, 若 ζ 是 (1.1.18) 的任一根, 则 $u_n = \zeta^n$ 必为 (1.1.17) 的解. 分几种情况:

(i) 方程 (1.1.18) 有 k 个互异的实根 $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_k$, 则 $\zeta_1^n, \zeta_2^n, \cdots, \zeta_k^n$ 是差分方程 (1.1.17) 的 k 个线性无关解, 通解为

$$u_n = \sum_{j=1}^k c_j \zeta_j^n, \quad n = 0, 1, \cdots.$$

(ii) 方程 (1.1.18) 有 m 个互异实根 $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_m$; ζ_j 的重数是 r_j , $r_1 + \cdots + r_m = k$, 则

$$\zeta_j^n, n\zeta_j^n, \cdots, n^{r_j-1}\zeta_j^n, \quad n = 0, 1, \cdots$$