高考起步训练

QIBUXUNLIAN

GAO KAO QI BU XUN LIAN

思维点拨与能力训练

王宜学　陈占迎　主编

高一数学

试验修订本·必修

（一年级·全一册）

辽宁大学出版社

依据全日制普通高级中学教科书（试验修订本）编写

思维点拨与能力训练

数学

高考起步训练

本册主编：
王宜学 陈占迎
副 主 编：
吴华金 李会元 马良杰
编 委：
秦性勇 刘会才 柯美体
刘功骚 陶学明 熊老洪
张杨柏 吴井明 周荣贵
万云生 饶雄峰 赵保国
罗永平 李慎林 范立人
王延庭 李玉生 邹业兵
王湘莲 闵盛华 应 浩
仲丛林 王 红

辽宁大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高一数学思维点拨与能力训练(试验修订本·必修)/王宜学 陈占迎生主编.
—沈阳：辽宁大学出版社，2002.8
(思维点拨与能力训练，高考起步训练)
ISBN 7-5610-3877-1
I.高… II.①王… ②陈… III.数学课-高中-升学参考资料 IV.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第52818号

辽宁大学出版社出版
网址：http://www.lnupress.com.cn
Email:mailer@lnupress.com.cn
(如有装印质量问题，请与印刷厂家调换)
(沈阳市皇姑区崇山中路66号　邮政编码110036)
河北省河间市印刷厂
全国各地书店发行

开本：787×1092毫米 1/16 字数：368千字 印张：16
印数：1—30000册
2002年8月第2版　2002年8月第1次印刷

责任编辑：郭　杨　　封面设计：刘桂湘
责任校对：齐　月　　版式设计：王俊良

ISBN 7-5610-3877-1

G·1425 定 价：16.00元

丛书简介

为了配合2003年提前高考，从2002年秋季开始，普通高中将换用新教材。新教材删除了“繁、难、偏、旧”的内容，使新教材更加完美。

《思维点拨与能力训练》丛书，以人民教育出版社出版，国家教育部2002年5月最新颁布的《全日制普通高级中学教科书各科（教学大纲）》为依据，特邀请了已使用新教材多年积累了丰富教学实践经验的山西、江西、天津市等一些重点中学的一线教师，精心编写了这套《思维点拨与能力训练·起步篇》本丛书的出版，足以能够帮助解决在使用新教材过程中遇到的种种教与学的困难和疑惑。对老师而言是很好的备课参考教案，对学生而言是最佳的辅导材料，对学习测试而言则是很有价值的丰富题库。

本丛书共分高中三个年级，高一年级为“高考起步训练”，侧注重于基础知识的培养及训练，提高学生思想道德品质、文化科学知识，推行素质教育，使学生在高考的起跑线上培养学生如何灵活应变，捷足先行；高二年级为“高考加速训练”，侧注重于思维的点拨和方法的深化，对基础知识的能力测试，使学生加快复习速度，一路领先；高三年级为“高考冲刺训练”，侧重于考点的剖析和跨学科知识的渗透，使学生在高考的最后阶段，增强信心，目标明确，全力冲刺。

由于《全日制普通高级中学教科书（试验修订本·必修）》在全国各省市推广使用，辽宁大学出版社隆重推出《思维点拨与能力训练·起步篇》，本丛书在编写过程中，突出了素质教育的要求，强调了培养创造精神和实践能力，体现了课程改革的新思想，新观念。对《新大纲》要求调整的部分章节进行了调整。

由于编写时间仓促，不足之处在所难免，欢迎广大师生在使用过程中对书中的错漏之处不吝指言，更希望提出建设性意见，以帮助我们再版时修改，使本套丛书更为完善。谢谢！

（英语学科配有原声磁带，均为外籍专业人员朗读、录制，如有需要者请与购书单位联系购买）

《思维点拨与能力训练》丛书编写组

编写说明

为满足新教材推广后新的教学的需求，我们组织编写了这套《思维点拨与能力训练》系列丛书，指在贯彻教育部有关教改精神，全面提高我国中学生综合素质和综合能力，指导教师和学生进一步理解和掌握新版教材，努力实施“面向21世纪教育振兴行动计划”，为我国的教育发展和教育振兴做出新的贡献。

这套丛书是以教育部“全日制普通高级中学教学大纲(试验修订版)”为依据，聘请工作在第一线的具有丰富教学经验的特、高级教师编写了这套丛书。内容与中学课程教学同步，以练为主，学练结合，构思独特，题型新颖，体现了创新能力的培养和素质教育的方向。其特点为名师辅导、同步学习，阶梯训练、应试应考，启发创新、减负增效。设置的栏目包括**【考纲提要·目标】**、**【概念理解·识记】**、**【基础检测·应用】**、**【思维点拨·激活】**、**【能力训练·创新】**，并附有单元综合能力测试题。为方便广大教师的教学，该书另有详解答案。本套书遵循学生的认知规律，循序渐进，形成梯度，既重视基本知识与综合能力的训练，又重视智能开发、素质养成和创新能力的培养，逐步提高应试能力，帮助学生最终顺利通过高考，适合不同地域学生及不同程度学生的需要，是使用新版教材学生必备的同步学习用书，也是教师和家长指导学生学习的最新参考书。

由于新版教材在不断修订和完善，编写本套丛书也是我们新的尝试，殷切希望使用本书的读者随时向我们提出修改意见，以便我们再版修订时使之臻于完善，使它真正成为广大师生和家长的良师益友。

目录指南

第一章 集合与简易逻辑

第二章 函 数

第三章 数 列

第四章 三角函数

第五章　平面向量

暑假作业

第一章 集合与简易逻辑

1.1 集合的概念

考纲提要 目标

理解集合的概念，了解空集的意义，掌握集合的两种表示方法，会正确地使用符号“$\in$”与“$\notin$”.

概念理解 识记

1. 集合的概念与特征

集合是数学中最原始的概念之一，我们不能用其他更基本的概念来给它下定义，所以，也把它叫做不定义的概念或原始概念，一般只加以描述说明.

集合中的元素具有三个特性：

(1)确定性：任何一个对象都能被确切地判断是集合中的元素或不是集合中的元素.

(2)互异性：同一集合中不应重复出现同一元素.

(3)无序性：用列举法表示的集合中的元素与顺序无关，但在表示某些无限集时，书写时应显示其规律并用省略号代表其余的元素.

2. 集合的分类

(1)有限集：集合中元素的个数是有限的.

(2)无限集：集合中元素的个数是无限的.

(3)空集：集合中没有任何元素.

空集是一个特殊的集合，虽然它不含有元素，但不要把空集$\varnothing$与数0、集合$\{0\}$相混淆，数0不是集合，而集合$\{0\}$是含有一个元素0的集合.

3. 集合的表示方法

(1)列举法：把给定集合中的元素不重不漏、不计次序地一一列举出来，放在集合符号“{ }”内.

(2)描述法：其表示集合的形式为$\{x|P\}$，竖线前面的x是此集合的代表元素，竖线后面的P指出元素x所具有的公共属性.

两种表示集合的方法各有优点，选用哪种方法，要视具体情况而定.

4. 常用的数集符号表示

$\mathbf{N}$——自然数集；

$\mathbf{Z}$——整数集；

$\mathbf{Q}$——有理数集；

$\mathbf{R}$——实数集；

$\mathbf{N}^*$(或$\mathbf{N}_+$)——正整数集.

5. 元素与集合的关系

元素与集合的关系有属于($\in$)或不属于($\notin$)两种，且只有这两种关系. 元素与集合的关系可形象地比喻为“个体与集体”的关系.

基础检测 应用

1. 下列对象不能形成集合的是 ( )

(A)正三角形全体

(B)大于2的所有整数

(C)所有的无理数

(D)高一年级中的所有高个子同学

2. 已知下面四个关系式：(1)$\sqrt{2}\in\mathbf{R}^+$；(2)$0.3\notin\mathbf{Q}$；(3)$0\in\mathbf{N}$；(4)$0\in\{0\}$. 其中正确的个数是 ( )

(A)4个　　(B)3个

(C)2个　　(D)1个

3. 在以下四个命题中：

(1)所有的小正数组成一个集合；

(2)$1,\frac{3}{2},\frac{6}{4},\left|-\frac{1}{2}\right|,0.5$，这些数组成的集合有5个元素；

(3)集合$\{1,3,5,7\}$与集合$\{1,3,7,5\}$表示同一个集合；

(4)集合$\{y|y=x^2-1\}$与集合$\{(x,y)|y=x^2-1\}$是同一个集合.

其中正确命题的个数有 ( )

(A)1个 (B)2个

(C)3个 (D)4个

4.方程组$\begin{cases}x-y+1=0\\2x+y-4=0\end{cases}$的解集可表示为：

(1)$(1,2)$；(2)$\{(1,2)\}$；(3)$\{x,y|x=1,y=2\}$；

(4)$\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$；(5)$\left\{(x,y)\middle|\begin{matrix}x=1\\y=2\end{matrix}\right\}$.其中表示正确的个数有 ( )

(A)5 (B)4

(C)3 (D)2

5.给定下面四个集合：$A=\{x|x^2-1=0\}$；$B=\{(x,y)|y=x^2-1\}$；$C=\{y|y=x^2-1\}$；$D=\{x|x^2-1<0\}$.其中有限集为______.

6.用符号$\in$或$\notin$填空：

$\sin30°$______$\mathbf{Q}$，$\cos30°$______$\mathbf{Q}$，

$\sin45°$______$\mathbf{R}^+$，$\tan45°$______$\mathbf{N}^*$.

思维点拨 激活

典题1 已知集合$M=\{x,xy,\sqrt{xy}\}$与集合$N=\{0,|x|,y\}$表示同一集合，求x、y的值.

解 (1)若$x=0$，则$M=\{0,0,\sqrt{-y}\}$，与元素的互异性矛盾，所以$x\neq0$.

(2)若$x\cdot y=0$，因为$x\neq0$，所以$y=0$，这时$N=\{0,|x|,0\}$，与元素的互异性矛盾，所以$y\neq0$.

(3)若$\sqrt{x-y}=0$，则$x=y$，这时，$M=\{x,x^2,0\}$，$N=\{0,|x|,x\}$，所以$x^2=|x|$，解得$x=\pm1$.若$x=1$，则$M=\{1,1,0\}$，与元素的互异性矛盾，所以$x=y=-1$，这时，$M=N=\{-1,0,1\}$.

特别提示 在解决这一类问题时，特别要注意集合元素间的互异性.

变式1 若$A=\{1,x\}$，$B=\{1,x^2\}$，且$A=B$，则$x=$______.

典题2 设$A=\{x|x^2+(b+2)x+b+1=0,b\in\mathbf{R}\}$，求$A$中所有元素的和.

解 $\because\Delta=(b+2)^2-4(b+1)=b^2\geqslant0$，

$\therefore$方程有实数解.

当$b=0$时，方程有两个等根，$x_1=x_2=-1$，此时，方程的解集$A=\{-1\}$，故$S=-1$.

当$b\neq0$时，由韦达定理$x_1+x_2=-(b+2)$，此时，A中所有元素的和$S=-(b+2)$，故A中所有元素的和$S=\begin{cases}-1,b=0\\-(b+2),b\neq0\end{cases}$

特别提示 此题要注意$\Delta=0$时，方程有两个等根$x_1=x_2=-1$，根据集合中元素的互异性，此时方程的解集$A=\{-1\}$，故$S=-1$，而不是$S=x_1+x_2=-2$.

变式2 已知集合$A=\{x|ax^2+2x+1=0,a\in\mathbf{R},x\in\mathbf{R}\}$只有一个元素，试求$a$的值，并求出这个元素.

典题3 已知$A=\{x-2,2x^2+5x,12\}$，且$-3\in A$，求x的值.

解 由题意可知：$x-2\neq2x^2+5x$，所以$x\neq-1$，从而$x-2\neq-3$，故需$2x^2+5x=-3$，解得$x=-\dfrac{3}{2}$.

特别提示 在解答此类问题时，一定要注意集合中元素的三个特性.

变式 3　已知 $-3\in\{a-3,2a-1,a^2+1\}$，求实数 a 的值.

能力训练 创新

1. 由实数 $x,-x,|x|,\sqrt{x^2},\sqrt[3]{x^3}$ 所组成的集合，最多含有　　(　　)

(A)2 个元素　　(B)3 个元素

(C)4 个元素　　(D)5 个元素

2. 已知集合 $A=\left\{x\left|x=\frac{a^2-2a+1}{a-1},a\in\mathbf{Z},a\neq1\right.\right\}$，若 $x\in A$，那么(1)$x\in\mathbf{N}^*$；(2)$x\in\mathbf{Z}$；(3)$x\in\mathbf{Q}$；(4)$x\in\mathbf{R}$. 其中正确的有　　(　　)

(A)1 个　　(B)2 个

(C)3 个　　(D)4 个

3. 已知下列条件：

(1)充分接近 $\sqrt{2}$ 的实数的全体；

(2)大于 0 且小于 20 的 9 与 12 的公倍数的全体；

(3)实数中不是有理数的所有数的全体；

(4)数轴上到原点的距离大于 1 的点的全体.

在上述条件中，能确定一个集合的是　　(　　)

(A)(1)(2)(3)　　(B)(1)(2)(4)

(C)(2)(3)(4)　　(D)(1)(3)(4)

4. 下列命题中正确的是　　(　　)

(A)小于 100 的质数的全体可以构成一个集合

(B)若 $a\in\mathbf{N},b\in\mathbf{N}^*$，则 $a+b$ 的最小值为 2

(C)$\{4,5\}$和$\{5,4\}$是两个不同的集合

(D)x 轴附近的点

5. 被 3 除余 1 的正整数集合可表示为__________.

6. 集合$\{1,x,x^2-x\}$中 x 应满足的条件是__________.

7. 已知 $A=\left\{x\left|\frac{6}{3-x}\in\mathbf{N}^*,x\in\mathbf{Z}\right.\right\}$，试用列举法表示集合 A.

8. 已知集合 $A=\{x\mid x=a+b\sqrt{2},a、b\in\mathbf{Z}\}$，设 $x_1\in A,x_2\in A$，求证：$x_1x_2\in A$.

9. 已知集合 $A=\{x\mid ax^2-3x+2=0,a\in\mathbf{R}\}$，若 A 中的元素至多只有一个，求 a 的取值范围.

1.2　子集、全集、补集

考纲提要 目标

理解子集、全集、补集的概念，了解全集、包含和相等关系的意义，能正确区分集合中的两种隶属关系.

概念理解 识记

1. 集合与集合的关系

(1)子集：若 $a\in A\Rightarrow a\in B$，则称 A 是 B 的子集，记作 $A\subseteq B$.

(2)真子集：若 $A\subseteq B$，且存在 $b\in B$，但 $b\notin A$，则称 A 是 B 的真子集，记作 $A\subsetneqq B$.

(3)集合相等：若 $A\subseteq B$，且 $B\subseteq A$，则称 A 与 B 相等，记作 $A=B$. 显然，若 $A=B$，则两集合的元素完全相同.

规定空集 $\varnothing$ 是任何集合 A 的子集，即 $\varnothing\subseteq A$；空集是任何非空集合 $A(A\neq\varnothing)$ 的真子集，即 $\varnothing\subsetneqq A$.

若集合 A 含有 n 个元素，则 A 的子集有 2^n 个，真子集有 2^n-1 个.

2. 补集(余集)

$\complement_S A=\{x|x\in S,且\ x\notin A\}$($S$ 为全集).

3. 元素与集合的关系用 $\in$ 或 $\notin$ 表示；集合与集合间的关系用 $\subseteq$、$\subsetneqq$、$\not\subseteq$、$=$ 表示，但要注意元素与集合是相对而言的.

4. 深刻理解用集合语言叙述的数学命题，并能准确地把它译成相关的代数语言或几何语言，抓住集合语言向非集合语言的转化是打开解题大门的钥匙. 解题时要充分利用韦恩图及数轴.

基础检测 应用

1. 下面六个关系式：(1)$\{a,b\}\subseteq\{b,a\}$；(2)$\{a,b\}=\{b,a\}$；(3)$\varnothing\subsetneqq\{0\}$；(4)$0\in\{0\}$；(5)$\varnothing\in\{0\}$；(6)$\varnothing=\{0\}$. 其中正确命题的个数是　(　　)

(A)6　　(B)5

(C)4　　(D)小于 4

2. 下列四个命题：(1)空集没有子集；(2)空集是任何集合的真子集；(3)空集 $\varnothing=\{\varnothing\}$；(4)任何一个集合必有两个或两个以上的子集. 其中正确的有　(　　)

(A)0 个　　(B)1 个

(C)2 个　　(D)3 个

3. 已知集合 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{x|x\in A\}$，那么集合 B 的子集的个数最多是　(　　)

(A)5 个　　(B)6 个

(C)7 个　　(D)8 个

4. 已知全集 $U=\{2,4,1-a\}$，集合 $A=\{2,a^2-a+2\}$，$\complement_U A=\{-1\}$，那么 a 的值为　(　　)

(A)1　　(B)2

(C)3　　(D)4

5. 满足 $\{a,b\}\subseteq A\subsetneqq\{a,b,c,d\}$ 的集合 A 有____个.

6. 用适当的符号($\in$、$\notin$、$=$、$\subsetneqq$、$\supsetneqq$)填空：

(1)3.14 ______ $\mathbf{Q}$；

(2)$\{x|x=2k+1,k\in\mathbf{Z}\}$ ______ $\{x|x=2k-1,k\in\mathbf{Z}\}$；

(3)$\left\{x\left|\dfrac{x-3}{x-2}\leqslant0\right.\right\}$ ______ $\{x|x^2-5x+6\leqslant0\}$；

(4)$\{(x,y)|x+y=7,x,y\in\mathbf{N}\}$ ______ $\{(x,y)|x+y=7,x,y\in\mathbf{Z}\}$

思维点拨 激活

典题 1　设 $A=\{x|x^2-8x+15=0\}$，$B=\{x|ax-1=0\}$，若 $B\subsetneqq A$，求实数 a 组成的集合.

解　解方程 $x^2-8x+15=0$，得

$$x_1=3,x_2=5.$$

∴集合 $A=\{3,5\}$.

∵$B\subsetneqq A$，故有 $B=\varnothing$ 和 $B\neq\varnothing$ 两种情况.

∴当 $B=\varnothing$ 时，得 $a=0$；

当 $B\neq\varnothing$ 时，则 $3\in B$，得 $a=\dfrac{1}{3}$；或 $5\in B$，得 $a=\dfrac{1}{5}$.

综上可知，实数 a 的值组成的集合为 $\left\{0,\frac{1}{5},\frac{1}{3}\right\}$.

特别提示 这种题型易忽略的问题是 $B=\varnothing$ 的情况．空集 $\varnothing$ 是一个特殊的集合，它是任何集合的子集，是任何非空集合的真子集，在集合的运算时，必须充分注意予以考虑．

变式1 已知集合 $A=\{x|x^2-2x-8=0\}$，$B=\{x|x^2+ax+a^2-12=0\}$，求满足 $B\subseteq A$ 的 a 值组成的集合．

典题2 已知全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$，$A=\{x|x^2-5x+q=0,x\in U\}$，求 $\complement_U A$ 及 q 的值．

解 当 $q=0$ 时，$x^2-5x+q=0$ 的根为 $x_1=0$，$x_2=5$，因为 $5\in U$，所以 $A=\{5\}$，从而 $\complement_U A=\{1,2,3,4\}$.

当 $q\neq 0$ 时，由韦达定理知方程 $x^2-5x+q=0$ 的根在 1，2，3，4，5 中取时，只可能取 1 或 4，2 或 3．因此

$q=4$ 时，$A=\{1,4\}$，$\complement_U A=\{2,3,5\}$；

$q=6$ 时，$A=\{2,3\}$，$\complement_U A=\{1,4,5\}$.

综上可知，$q=0$ 时，$\complement_U A=\{1,2,3,4\}$；$q=4$ 时，$\complement_U A=\{2,3,5\}$；$q=6$ 时，$\complement_U A=\{1,4,5\}$.

特别提示 此题容易出错的 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$\complement_U A=\varnothing$，$q$ 为 0，4，6．这种错误的根本原因在于什么问题，请同学们认真思考．

变式2 已知集合 $A=\{x|x^2-3x+4=0,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x|(x+1)(x^2+3x-4)=0,x\in\mathbf{R}\}$，且 $A\subsetneqq P\subseteq B$，求满足条件的集合 P.

典题3 已知集合 $A=\{x|x^2-5x+4\leqslant 0\}$，$B=\{x|x^2-2ax+a+2\leqslant 0\}$，且 $B\subseteq A$，求实数 a 的取值范围．

解 $\because$ $x^2-5x+4\leqslant 0$，

$\therefore$ $(x-1)(x-4)\leqslant 0$，

$\therefore$ $1\leqslant x\leqslant 4$，

$\therefore$ $A=\{x|1\leqslant x\leqslant 4\}$．又 $B\subseteq A$，

$\therefore$ $B=\varnothing$ 或 $B\neq\varnothing$.

(1)当 $B=\varnothing$ 时，$\Delta<0$，即 $(-2a)^2-4(a+2)<0$．解得：$-1<a<2$.

(2)当 $B\neq\varnothing$ 时，令 $f(x)=x^2-2ax+a+2$，欲使 $B\subseteq A$，结合二次函数的图像知

$$\begin{cases}\Delta=(-2a)^2-4(a+2)\geqslant 0\\ 1\leqslant -\frac{2a}{2}\leqslant 4\\ f(1)=1^2-2a+a+2\geqslant 0\\ f(4)=4^2-8a+a+2\geqslant 0\end{cases}$$

解此不等式组得 $2\leqslant a\leqslant\frac{18}{7}$.

综合(1)(2)可知：$-1<a\leqslant\frac{18}{7}$.

特别提示 从此题的解答过程可以看出数学问题中的数形结合思想、函数思想、化归思想在解题中是十分重要的．请同学们从本题的解答过程去仔细体会和感悟数学思想的真谛．

变式 3 已知集合 $A=\{y|y=x^2+2x+4,x\in \mathbf{R}\}$，$B=\{z|z=ax^2-2x+4a,x\in \mathbf{R}\}$，且 $A\subseteq B$，求实数的 a 取值范围.

能力训练 创新

1. 已知非空集合 P 满足：(1)$P\subseteq\{1,2,3,4,5\}$；(2)若 $a\in P$，则 $6-a\in P$. 符合上述条件的集合 P 的个数是 ( )

(A)4 (B)5

(C)7 (D)31

2. 已知集合 $M=\left\{a\left|\frac{6}{5-a}\in \mathbf{N}^*,a\in \mathbf{Z}\right.\right\}$，则集合 M 是 ( )

(A)$\{-1,2,3,4\}$ (B)$\{2,3,7,8\}$

(C)$\{2,3\}$ (D)$\{-1,2,3,6,7,8,11\}$

3. 若全集 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x|x>2\sqrt{3}\}$，$a=\frac{1}{2-\sqrt{3}}$，则下列结论正确的是 ( )

(A)$a\subseteq A$ (B)$\{a\}\in A$

(C)$a\in \complement_U A$ (D)$a\in A$

4. 满足集合 $\{1,2,3\}\subsetneqq M\subsetneqq\{1,2,3,4,5\}$ 的集合 M 的个数是 ( )

(A)4 (B)3

(C)2 (D)1

5. 如果 $S=\{x|x=2n+1,n\in \mathbf{Z}\}$，$T=\{x|x=4k\pm 1,k\in \mathbf{Z}\}$，那么 ( )

(A)$S\subsetneqq T$ (B)$T\subsetneqq S$

(C)$S=T$ (D)$S\neq T$

6. 已知集合 $A=\{x|x^2+x-2=0\}$，若 $B=\{x|x<a\}$，且 $A\subsetneqq B$，则实数 a 的取值范围是________.

7. 设集合 $A=\{0,1\}$，集合 $B=\{x|x\subseteq A\}$，则 A 与 B 的关系是________.

8. 已知集合 $A=\{1,3,a\}$，$B=\{1,a^2-a+1\}$，且 $B\subseteq A$，求实数 a 的值.

9. 设集合 $M=\{a|a=12m+8m+4l,m,n,l\in \mathbf{Z}\}$，集合 $N=\{a|a=20p+16q+12r,p,q,r\in \mathbf{Z}\}$，求证：$M=N$.

1.3 交集、并集

考纲提要 目标

理解交集、并集的概念，并掌握集合的运算性质，并能利用数轴或韦恩图进行集合的有关运算.

概念理解 识记

1. 交集、并集

交集：$A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$

并集：$A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$

2. 常用的运算性质

(1)$A\cap A=A$；　(2)$A\cap\varnothing=\varnothing$；

(3)$A\cap B=B\cap A$；　(4)$A\cup A=A$；

(5)$A\cup\varnothing=A$；　(6)$A\cup B=B\cup A$.

3. 重要结论（交集、并集、补集）

(1)$A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$；

(2)$A\cup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A$；

(3)$A\cup(\complement_U A)=A$；

(4)$A\cap(\complement_U A)=\varnothing$；

(5)$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\complement_U(A\cup B)$；

(6)$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=\complement_U(A\cap B)$；

(7)$\mathrm{Card}(A\cup B)=\mathrm{Card}A+\mathrm{Card}B-\mathrm{Card}(A\cap B)$.

4. 数学思想与方法：利用等价转化和数形结合的思想，将满足条件的集合用韦恩图或数轴表示出来，从而求得交集、并集、补集，既简单又直观，是最基本最常见的方法，要注意灵活运用. 尤其对于含参数问题，应让参数"动"起来，数形结合，问题便会迎刃而解.

基础检测 应用

1. 若集合 $M=\{(x,y)|x+y=0\}$，$P=\{(x,y)|x-y=2\}$，则 $M\cap P$ 等于　(　　)

(A)$(1,-1)$　(B)$\{x=1\}$或$\{y=1\}$

(C)$\{1,-1\}$　(D)$\{(1,-1)\}$

2. 已知集合 $M=\{x|-3<x<2\}$，集合 $P=\{x|x<-\sqrt{2}$ 或 $x>\sqrt{2}\}$，那么 $M\cap P$ 等于　(　　)

(A)$\{x|-3<x<-\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{2}<x<2\}$

(B)$\mathbf{R}$

(C)$\{x|-3<x<\sqrt{2}\}$

(D)$\{x|\sqrt{2}<x<2\}$

3. 设集合 $A=\{x|-5\leqslant x<1\}$，$B=\{x|x\leqslant 2\}$，则 $A\cup B$ 等于　(　　)

(A)$\{x|-5\leqslant x<1\}$　(B)$\{x|-5\leqslant x\leqslant 2\}$

(C)$\{x|x<1\}$　(D)$\{x|x\leqslant 2\}$

4. 下列四个推理：(1)$a\in A\cup B\Rightarrow a\in A$；(2)$a\in A\cap B\Rightarrow a\in A\cup B$；(3)$A\subseteq B\Rightarrow A\cup B=B$；(4)$A\cup B=A\Rightarrow A\cap B=B$. 其中正确的个数为　(　　)

(A)4　(B)3

(C)2　(D)1

5. 已知集合 $A=\{x|-4\leqslant x<2\}$，$B=\{x|-1<x\leqslant 3\}$，$C=\left\{x\,\middle|\,x\leqslant 0，或\ x\geqslant\frac{5}{2}\right\}$，那么 $A\cap B\cap C=$________.

6. 已知集合 $A=\{x|a\leqslant x\leqslant 2\}$，若 $A\cup\mathbf{R}^+=\mathbf{R}^+$，则实数 a 的取值范围是________.

思维点拨 激活

典题 1　已知集合 A、B、C 满足 $A\cup B=A\cup C$，则由此可以推出　(　　)

(A)$B=C$

(B)$A\cap B=A\cap C$

(C)$A\cap\complement_U B=A\cap\complement_U C$

(D)$\complement_U A\cap B=\complement_U A\cap C$

解　因为 $A\cup B=A\cup C$，

所以 $\complement_U A\cap(A\cup B)=\complement_U A\cap(A\cup C)$，

$(\complement_U A\cap A)\cup(\complement_U A\cap B)=(\complement_U A\cap A)\cup(\complement_U A\cap C)$.

因为 $\complement_U A\cap A=\varnothing$，

所以 $\complement_U A\cap B=\complement_U A\cap C$.

故选(D).

特别提示 此题利用韦恩图可轻松求解，读者不妨一试！

变式1 已知全集 $U=\mathbf{N}^*$，集合 $A=\{x\mid x=2n,n\in\mathbf{N}^*\}$，$B=\{x\mid x=4n,n\in\mathbf{N}^*\}$，则 ( )

(A) $U=A\cup B$

(B) $U=(\complement_U A)\cup B$

(C) $U=A\cup(\complement_U B)$

(D) $U=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$

典题2 已知集合 $A=\{x\mid x^2-ax+15=0,x\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x\mid x^2-5x+b=0,x\in\mathbf{Z}\}$，若 $A\cup B=\{2,3,5\}$，求实数 a、b 的值.

解 ∵ $A\cup B=\{2,3,5\}$，

∴方程 $x^2-ax+15=0$…①和 $x^2-5x+b=0$…②的整数解必在2、3、5中.

由①得：$x_1\cdot x_2=15$，

∴ x_1、x_2 必为3、5，故 $x_1+x_2=a=8$.

由②得：$x_1+x_2=5$，

∴ x_1、x_2 必为2、3，故 $x_1\cdot x_2=b=2\times 3=6$.

因此 $a=8$，$b=6$.

特别提示 注意二次方程中韦达定理的应用. 如果把 $A\cup B=\{2,3,5\}$ 改为 $A\cap B=\{3\}$，如何？

变式2 已知 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x\mid x^2-ax+a-1=0\}$，若 $A\cup B=A$，求实数 a 的值.

典题3 某校有100名教师，其中订阅人民日报有67人，订阅光明日报有45人，两种报纸都不订的有21人，那么同时订阅两种报纸的教师有多少？

解 设 $A=$\{订阅人民日报的人\}，$B=$\{订阅光明日报的人\}，则由题意有

$\text{Card}(A)=67$，$\text{Card}(B)=45$，

$\text{Card}[\complement_U(A\cup B)]=21$.

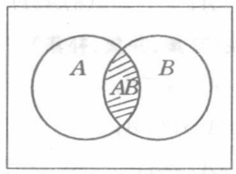
所以 $\text{Card}(A\cup B)=\text{Card}(U)-\text{Card}[\complement_U(A\cup B)]=100-21=79$.

$\text{Card}(A\cap B)=\text{Card}(A)+\text{Card}(B)-\text{Card}(A\cup B)=67+45-79=33$.

答：同时订阅两种报纸的有33人.

特别提示 记住公式：

$\text{Card}(A\cap B)=\text{Card}(A)+\text{Card}(B)-\text{Card}(A\cup B)$，它们的关系类似于面积间的关系.



当研究多个集合间的元素个数时，也可以通过文氏图和面积的关系来分析.

变式3 某地甲、乙两电视台，某日在560名电视观众中作调查，知道兼收看两台的观众数、收看甲台的观众数和收看乙台的观众数之比为1∶2∶3，求在此调查中分别收看甲、乙台的人数.

能力训练 创新

1. 已知集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B\subsetneqq A$，且 $1\in A\cap B$，$5\notin A\cap B$，则满足上述条件的集合 B 的个数是　　(　　)

(A)7　　(B)8

(C)15　　(D)16

2. 已知 $P=\{y|y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$，$Q=\{y|y=x+1,x\in\mathbf{R}\}$，则 $P\cap Q$ 等于　　(　　)

(A)$\{(0,1),(1,2)\}$　　(B)$\{0,1\}$

(C)$\{1,2\}$　　(D)$\{y|y\geqslant1\}$

3. 已知 M、N 是非空集合，且 $M\cap N\subsetneqq M$，$M\cap N\supseteq N$，则　　(　　)

(A)$M=N$

(B)$M\subsetneqq N$

(C)$N\subsetneqq M$

(D)M、N 相交，但不具有包含关系

4. 已知集合 $P=\{x\mid x=n,n\in\mathbf{Z}\}$，集合 $Q=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{n}{3},n\in\mathbf{Z}\right\}$，$S=\left\{x\,\middle|\,x=n-\frac{1}{3},n\in\mathbf{Z}\right\}$，则下列各式中正确的是　　(　　)

(A)$S\cup Q=P$　　(B)$Q\subseteq P$

(C)$P\cup S=Q$　　(D)$P\subsetneqq Q$

5. 已知 $A=\{x|x^2+px+12=0,x\in\mathbf{N}\}$，$B=\{x|x^2-5x+q=0,x\in\mathbf{N}\}$，全集 $U=\mathbf{N}$，$(\complement_U A)\cap B=\{2\}$，$A\cap(\complement_U B)=\{4\}$，则 $p+q=$________.

6. 已知集合 $P=\{x|-1<x<3\}$，$M=\{x|a<x<2a,a>0\}$，且 $P\cap M=\varnothing$，则实数 a 的取值范围是________.

7. 已知 $A=\{a|$二次方程 $x^2-ax+1=0$ 有实根，$a\in\mathbf{R}\}$，$B=\{a|$二次方程 $ax^2-x+1=0$ 无实根，$a\in\mathbf{R}\}$，则 $A\cup B=$________.

8. 已知集合 $A=\{x|x^2+(m-2)x+m+1=0\}$，$A\cap\mathbf{R}^+=\varnothing$，求实数 m 的取值范围.

9. 若方程 $x^2-ax+b=0$ 的两根为 α、β；方程 $x^2-bx+c=0$ 的两根为 γ、δ，其中 α、β、γ、δ 互不相等，设集合 $M=\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$，作集合 $S=\{x|x=u+v,u\in M,v\in M,u\neq v\}$，$T=\{x|x=uv,u\in M,v\in M,u\neq v\}$. 若已知 $S=\{5,7,8,9,10,12\}$，$T=\{6,10,14,15,21,35\}$，求 a、b、c 的值.

1.4　含绝对值的不等式解法

考纲提要　目标

掌握 $|ax+b|<c$ 和 $|ax+b|>c(c>0)$ 两种类型的绝对值不等式的解法.

概念理解　识记

1. 绝对值 $|a|=\begin{cases}a,(a>0)\\0,(a=0)\\-a,(a<0)\end{cases}$

2. $|x|>a(a>0)\Leftrightarrow x>a$ 或 $x<-a$,

$|x|<a(a>0)\Leftrightarrow -a<x<a$.

3. $a\leqslant|x|<b(b>a>0)\Leftrightarrow$

$a\leqslant x<b$ 或 $-b<x\leqslant a$.

4. $|ax+b|>c(c>0)$ 型,$|ax+b|<c(c>0)$ 型.

这种类型的不等式是在 $|x|<a(a>0)$,$|x|>a(a>0)$ 型的不等式中,以一元一次代数式 $ax+b$ 代替式中的 x,然后再利用一元一次不等式解法来解.因此,解这类不等式要抓住由绝对值的意义向一元一次不等式组的转化这一"关键".通常不等式 $|ax+b|<c(c>0)$ 先化为不等式组 $-c<ax+b<c$,再求出原不等式的解集;不等式 $|ax+b|>c(c>0)$ 先化为 $ax+b>c$ 或 $ax+b<-c$,再进一步求出原不等式的解集.

综上所述,解含有绝对值不等式的关键,就是依据绝对值概念和等价不等式,将其转化为不含绝对值的整式不等式(或不等式组)来解.

基础检测　应用

1. 不等式 $|2x-5|>3$ 的解集是　(　　)

(A) $\{x|x>4\}$

(B) $\{x|1<x<4\}$

(C) $\{x|x<1$,或 $x>4\}$

(D) $\{x|x<-1$,或 $x>4\}$

2. 已知 $A=\{x||x-1|<2\}$,$B=\{x||x-1|>1\}$,则 $A\cap B=$　(　　)

(A) $\{x|-1<x<3\}$

(B) $\{x|x<0$,或 $x>2\}$

(C) $\{x|-1<x<0\}$

(D) $\{x|-1<x<0$,或 $2<x<3\}$

3. 不等式 $|x-1|+|x-2|\leqslant3$ 的最小整数解是　(　　)

(A)0　　(B)-1

(C)1　　(D)2

4. 不等式 $1\leqslant|2x-1|<2$ 的解集为　(　　)

(A) $\left(-\frac{1}{2},0\right)\cup\left[1,\frac{3}{2}\right]$

(B) $\left(-\frac{1}{2},0\right)\cup\left[1,\frac{3}{2}\right)$

(C) $\left\{x\left|-\frac{1}{2}<x<0\text{ 且 }1\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\right.\right\}$

(D) $\left\{x\left|-\frac{1}{2}<x\leqslant0\text{ 且 }1\leqslant x<\frac{3}{2}\right.\right\}$

5. 不等式 $|x+2|>|x-3|$ 的解集是__________.

6. 不等式 $\frac{1}{4}(3|x|-1)\leqslant\frac{1}{2}(|x|+3)$ 的解集是__________.

思维点拨　激活

典题1　求不等式 $|x+2|-|x-1|>0$ 的解集.

解法一　(1)当 $x<-2$ 时,原式变形为

$$-x-2+x-1>0,$$

即　$$-3>0,$$

矛盾,所以在 $x<-2$ 范围内的解集为 $\varnothing$.

(2)当 $-2\leqslant x<1$ 时,原式变形为

$$x+2+x-1>0,$$

即 $2x+1>0$. 得 $x>-\frac{1}{2}$,

与范围 $-2\leqslant x<1$ 取交集,

所以　$$-\frac{1}{2}<x<1.$$

(3)当 $x\geqslant1$ 时,原式变形为

$$x+2-x+1>0,$$

即 $3>0$,此式恒成立,即 $x\geqslant1$ 取交集,

所以 $x\geqslant1$.