●全国高等教育自学考试指导委员会

高等教育自学考试

高等数学（一）

自学考试大纲

ZIXUEKAOSHIDAGANG

●武汉大学出版社

全国高等教育自学考试指导委员会

高 等 教 育 自 学 考 试

高等数学（一）
自学考试大纲

武 汉 大 学 出 版 社

(鄂)新登字 09 号

全国高等教育自学考试指导委员会
高等教育自学考试
高等数学(一)自学考试大纲
*
武汉大学出版社出版发行
(430072 武昌 珞珈山)
湖北省黄石日报社印刷厂印刷
*
787×1092 1/32 2.375 印张 49 千字
1988 年 12 月第 1 版 1991 年 12 月第 2 版
1995 年 5 月第 2 版第 9 次印刷
印数:400401—450400
ISBN 7-307-00091-1/O·6
定价:2.20 元

出版前言

为了适应社会主义现代化建设的需要，我国实行了高等教育自学考试制度。它是个人自学、社会助学和国家考试相结合的一种新的教育形式，是我国社会主义高等教育体系的一个组成部分。实行这种高等教育自学考试制度，是实行宪法规定的“鼓励自学成才”的重要措施，也是造就和选拔人才的一种途径。凡是干部、职工、群众按照高等教育专业考试计划进行考试合格后，国家承认其学历，与全日制高等学校相应专业毕业生同样对待。高等教育自学考试于1981年开始进行试点，1983年起逐步向全国推广。目前，全国29个省、自治区、直辖市都开展了高等教育自学考试工作。

为了大体上统一全国高等教育自学考试的标准，全国高等教育自学考试指导委员会陆续制定部分专业考试计划。各专业委员会按照有关专业考试计划的要求，从造就和选拔人才的需要出发，编写了相应专业课程的自学考试大纲，进一步规定课程自学和考试的内容、范围，使考试标准具体化。

经济管理类专业委员会根据国务院有关文件精神，参照教育部拟定的全日制高等学校有关课程的教学大纲，结合自学考试的特点，编写了《高等数学（一）自学考试大纲》。现经全国高等教育自学考试指导委员会审定，国家教育委员会批准

颁发试行。

这本大纲是各地都要贯彻执行的。它是该课程考试命题、自学和社会助学的依据。我们希望这个大纲的出版将对自学和考试起到应有的作用。

全国高等教育自学考试指导委员会

1986 年 5 月

目 录

第一章　函数及其图形

学习目的和要求

学习本章，要求联系集合和映射掌握函数概念，并掌握函数的单调、有界、奇偶、周期等分析表示、图形和特征，并要求读者具有由常见的经济管理问题建立相应的函数关系的能力，养成图文并重的思维方法

第一节　集　合

1. 集合的概念及其定义

所谓集合，是指具有某个共同性质的元素的全体.

要求读者了解集合的表示方法，集合之间的并、交、补三种运算及其相应的法则.

2. 实数与数轴

实数可分为有理数和无理数. 有理数是形如 q/p 这一类的数，其中 p 和 q 为互质的整数，$p\neq 0$，有理数又可分为正、负整数，零以及分数.

将数轴上的所有点与全体实数建立一一对应关系，即每一实数在数轴上对应一个点，数轴上每一点也对应一个实数.

称有理数对应的点为有理点，无理数对应的点为无理点.

3. 区间、邻域

区间是指界于某两个实数之间的全体实数，而那两个实数叫做区间的端点.

设 a 与 δ 是两个实数，对满足不等式 $|x-a|<\delta$ 的一切实数 x 的全体称为点 a 的 δ 邻域，点 a 为该邻域的中心，δ 为该邻域的半径. 例如 $|x-4|<\frac{1}{2}$，即为以点 $a=4$ 为中心，以 $\delta=\frac{1}{2}$ 为半径的邻域，也就是开区间(3.5,4.5).

第二节 映 射

映射是指两个集合之间的一种对应关系

从集合 X 到集合 Y 的一个映射 f，是指在集合 X 与集合 Y 之间建立了这样一种对应关系：

(1)对于第一个集合 X 的每一个元素，都能按某种规则同第二个集合 Y 中的某个元素相对应；

(2)对于第一个集合 X 的每一个元素，第二个集合 Y 中与它对应的元素只有一个.

从 X 到 Y 的映射 f 记为 $f:X\rightarrow Y$.

第三节 函 数

1. 函数. 利用映射概念，我们很容易将函数定义为两个数集之间的映射

函数概念包含有五个要素：

(1)自变量 x，可看作主动变化的实变量.

(2)定义域 D_f，表示自变量 x 的变化范围.

(3)因变量 y，它是随着 x 的变化而变化的实变量.

(4)因变量 y 关于自变量 x 的依存关系 $f: y=f(x)$，它表示一个对应规则，对于每一个 $x\in D_f$，相应地确定唯一的 $y=f(x)$.

(5)值域 R_f：$R_f=\{f(x)|x\in D_f\}$.

在上述函数定义的五个要素中，最重要的是掌握变量间的依存关系和定义域 D_f.

2. 函数的表示法：公式法、表格法、图示法.

3. 分段函数. 把函数的定义域分成若干部分，在每一部分用一个解析式子表达函数关系，称为分段函数.

4. 函数的几何特性

(1)单调性　对 $y=f(x)$，$x\in D_f$，若对任意两点 $x_1,x_2\in D_f$，当 $x_1<x_2$ 时有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 为严格单调增加，反之，为严格单调减少.

(2)有界性　若存在两数 A 和 B，对一切 $x\in D_f$ 成立 $A\leqslant f(x)\leqslant B$，则称 $f(x)$ 为有界函数.

(3)奇偶性　对 $y=f(x)$，$x\in D_f$，若成立 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数；若成立 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数. 奇函数的几何图形关于原点对称，而偶函数的几何图形关于 Y 轴对称.

(4)周期性　对 $y=f(x)$，$x\in(-\infty,+\infty)$，若存在常数 $\omega>0$，使对任何 x，满足 $f(x+\omega)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，ω 是 f 的一个周期.

5. 复合函数和反函数

(1)两个函数的所谓复合，实际上就是中间变量介入从自变量到因变量的变化过程. 设有如下两个映射：

$$f: y=f(u), u\in D_f$$
$$g: u=g(x), x\in D_g$$
若有 $R_g\subset D_f$，这样就可得复合函数：
$$y=f(g(x)) \quad x\in D_g$$
由复合函数的定义可知，函数f与g能否构成复合函数$f(g(x))$，关键在于第二个函数的值域 R_g 是否包含在第一个函数的定义域 D_f 中.

(2)对于函数 $y=f(x)$，其反函数是否存在，取决于映射 f 的逆象是否唯一. 一般地说，对于映射
$$f: X\to Y \quad (\text{即函数 } y=f(x))$$
如果它具有逆象的唯一性，那么，按照逆象的对应关系就得到它的逆映射，记为
$$f^{-1}: Y\to X \quad (\text{即函数 } x=f^{-1}(y))$$
习惯上，又把 $y=f(x)$ 的反函数记为 $y=f^{-1}(x)$，此时其定义域 $D_{f^{-1}}=R_f$，值域 $R_{f^{-1}}=D_f$. 称 $f(x)$ 与 $f^{-1}(x)$ 互为反函数，它们的图形关于直线 $y=x$ 对称.

(3)反函数存在定理(掌握结论). 若函数 $y=f(x)$，$x\in D_f$ 是严格单调增加(减少)的，则存在它的反函数 $y=f^{-1}(x)$，$x\in R_f$，并且反函数也是严格单调增加(减少)的.

6. 基本初等函数

(1)函数 $y=x^a$(其图象见图 1)

当 a 为偶数时，x^a 为偶函数. 当 a 为奇数时，x^a 为奇函数. 其图形均过点(1,1).

(2)指数函数 $y=a^x$($a\neq 1$，$a>0$)(其图象见图 2)

不管 a 取何值，函数图形均经过(0,1)点，当 $a>1$ 时，a^x 为单调增加函数，当 $a<1$ 时，a^x 为单调减少函数，$x\in(-\infty,+\infty)$，$y\in(0,+\infty)$.

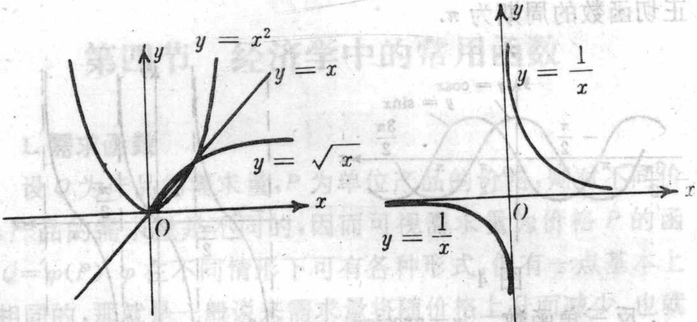


图 1

(3) 对数函数 $y = \log_a x$（其图象见图 3），它是指数函数 $y = a^x$ 的反函数，其中 $a \neq 1, a > 0$. 对于对数函数，不管 a 取任何不为 1 的正常数，函数均经过 $(1,0)$ 点.

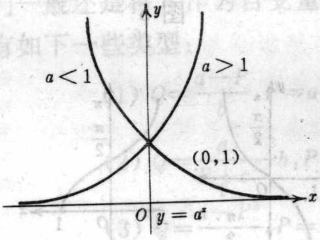


图 2

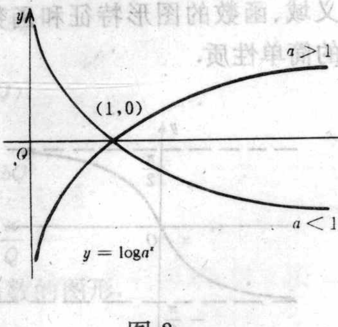


图 3

当 $a > 1$ 时，函数为单调增加，当 $a < 1$ 时，函数为单调减少，$x \in (0, +\infty)$，$y \in (-\infty, +\infty)$.

(4) 三角函数 $y = \sin x$，$y = \cos x$，$y = \operatorname{tg} x$，$y = \operatorname{ctg} x$ 为周期函数（其图象见图 4、5），其中正弦、余弦函数的周期为 2π，

正切函数的周期为 π.

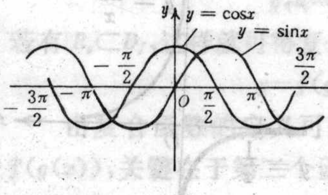


图 4

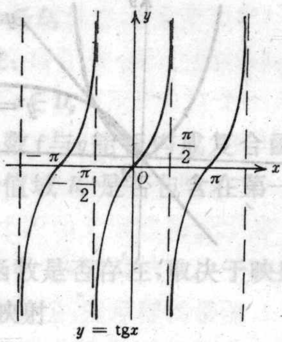
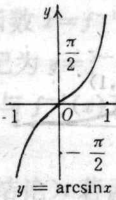


图 5

反三角函数 $y=\arcsin x$、$y=\arccos x$、$y=\mathrm{arctg}x$ 分别为函数 $y=\sin x(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2})$、$y=\cos x(0\leqslant x\leqslant\pi)$和 $y=\mathrm{tg}x(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2})$ 的反函数(其图象见图 6、7、8)。

对基本初等函数,要求读者掌握三个要点:即函数的定义域、函数的图形特征和函数的简单性质.



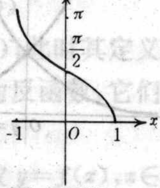


图 6　　图 7

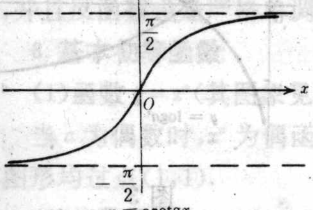


图 8

第四节 经济学中的常用函数

1. 需求函数

设 Q 为产品的需求量，P 为单位产品的价格，则对不同价格，产品的需求量是不同的，因而可视需求量为价格 P 的函数 $Q=\varphi(P)$. φ 在不同情形下可有各种形式，但有一点基本上是相同的，那就是一般说来需求量将随价格上升而减少，也就是说，Q 是 P 的单调减少函数，习惯上，不少经济分析的著作上喜欢写成反函数形式 $P=\varphi^{-1}(Q)$，但从经济意义上分析，我们一般还是将 P 作为自变量，Q 作为因变量，常见的需求函数有如下一些类型：

(1) $Q=\dfrac{a-P}{b}, P=a-bQ$

(2) $Q=\dfrac{a}{P+c}-b, P=\dfrac{a}{Q+b}-c$

(3) $Q=\dfrac{a-P^2}{b}, P=\sqrt{a-bQ}$

(4) $Q=\dfrac{a-P}{b}, P=(a-bQ)^2$

(5) $Q=\sqrt{\dfrac{a-P}{b}}, P=a-bQ^2$

(6) $Q=ae^{-bP}, P=\dfrac{1}{b}\log\dfrac{a}{Q}$

读者应能作出上述诸需求函数的图形.

2. 供给函数

供给函数是讨论在其他因素不变的条件下，供应商品的价格与相应的供给量的关系. 它把供应商品的价格 P 作为自变量，把相应的供给量 Q 作为因变量，其一般表达式为：

$$Q=g(P)$$

常见的供给函数有

（1） $Q=-d+cP$， $c>0,d>0$

（2） $Q=\dfrac{aP-d}{cP+d}$， $a>0,b>0,c>0,d>0$

3. 生产函数

某企业的最大生产能力 Q 常可视为劳动力 K 和固定资产 L 的函数

$$Q=f(K,L)$$

例如：

$$Q=a+bK+cL;\quad Q=AK^{\alpha}L^{\beta}$$

前者为线性生产函数，后者则为 Cobb－Douglus 函数.

第二章 极限与连续

学习目的和要求

学习本章，要求读者掌握数列极限和函数极限的定义和运算法则；了解两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

的证明；并学会运用两个重要极限求一些数列和函数的极限；掌握连续函数的定义及其基本性质；了解并学会函数无穷大(小)量级的比较

第一节 数列的极限

1. 无穷多个按自然数顺序排列的数

$$x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$$

称为数列，记作$\{x_n\}$，其中每一个数称为数列的项，第 n 项 x_n 称为数列的一般项或通项.

设 A 为一个定数，当 n 无限增大时，若$|x_n-A|$总能小于预先给定的无论是怎样小的正数，我们就称 A 是数列$\{x_n\}$的极限，或称 x_n 趋于 A，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \quad 或 \quad x_n \to A \quad (n\to\infty)$$

当 n 无限增大时，如果 x_n 并不趋于某个确定的常数，我们就说 $\{x_n\}$ 没有极限.

通常称存在极限的数列为收敛数列，而不存在极限的数列为发散数列.

数列 $\{x_n\}$ 的极限 A 的几何意义可以理解为：当 n 充分大时，x_n 与 A 可任意靠近，要多近就能有多近，也就是说，只要 n 充分大，$|x_n-A|$ 就可以充分小，要多小就能有多小.

2. 对数列 $\{x_n\}$，若有

(1) $x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant x_{n+1}\leqslant\cdots$，则称为单调增加数列，反之，称为单调减少数列.

(2) 若存在正数 M，使对一切 x_n，成立 $|x_n|<M$，则称数列 $\{x_n\}$ 为有界数列，若这样的数 M 不存在，就说数列 $\{x_n\}$ 无界。

第二节　函数的极限

1. 函数极限定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 附近有定义（但可以在 x_0 点没有定义），如果当 x 无限接近于 x_0（但不等于 x_0）时，对应函数值 $f(x)$ 无限接近于某个确定的常数 A，就称 x 趋于 x_0 时函数以 A 为极限，记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \quad 或 \quad f(x)\to A \quad (x\to x_0)$$

这里，当 x 无限接近于 x_0 时 $f(x)$ 无限接近于 A 的意思是：当 x 与 x_0 充分靠近，即 $|x-x_0|$ 充分小时，$f(x)$ 与 A 可以接近到任何预先要求的程度，即 $|f(x)-A|$ 可以小于预先给定的正数（无论该正数多么小）.