

●全国高等教育自学考试指导委员会

高等教育自学考试

# 高等数学(一)

## 自学考试大纲

ZIXUEKAOSHIDAGANG

●武汉大学出版社



全国高等教育自学考试指导委员会

高等 教育 自 学 考 试

高等 数学(一)  
自 学 考 试 大 纲

武 汉 大 学 出 版 社

(鄂)新登字 09 号

全国高等教育自学考试指导委员会  
高等教育自学考试  
**高等数学(一)自学考试大纲**

\*  
武汉大学出版社出版发行  
(430072 武昌 珞珈山)  
湖北省黄石日报社印刷厂印刷

\*

787×1092 1/32 2.375 印张 49 千字  
1988年12月第1版 1991年12月第2版

1995年5月第2版第9次印刷  
印数:400401—450400

ISBN 7-307-00091-1/O·6

定价:2.20元

版权所有 不准翻印

## 出版前言

为了适应社会主义现代化建设的需要，我国实行了高等教育自学考试制度。它是个人自学、社会助学和国家考试相结合的一种新的教育形式，是我国社会主义高等教育体系的一个组成部分。实行这种高等教育自学考试制度，是实行宪法规定的“鼓励自学成才”的重要措施，也是造就和选拔人才的一种途径。凡是干部、职工、群众按照高等教育专业考试计划进行考试合格后，国家承认其学历，与全日制高等学校相应专业毕业生同样对待。高等教育自学考试于 1981 年开始进行试点，1983 年起逐步向全国推广。目前，全国 29 个省、自治区、直辖市都开展了高等教育自学考试工作。

为了大体上统一全国高等教育自学考试的标准，全国高等教育自学考试指导委员会陆续制定部分专业考试计划。各专业委员会按照有关专业考试计划的要求，从造就和选拔人才的需要出发，编写了相应专业课程的自学考试大纲，进一步规定课程自学和考试的内容、范围，使考试标准具体化。

经济管理类专业委员会根据国务院有关文件精神，参照教育部拟定的全日制高等学校有关课程的教学大纲，结合自学考试的特点，编写了《高等数学（一）自学考试大纲》。现经全国高等教育自学考试指导委员会审定，国家教育委员会批准

颁发试行。

这本大纲是各地都要贯彻执行的。它是该课程考试命题、自学和社会助学的依据。我们希望这个大纲的出版将对自学和考试起到应有的作用。

### 全国高等教育自学考试指导委员会

1986年5月

華高工行交國外，要需由貴黨由分興義主會持國發工式。  
時為考審國時學組會持，學自入个最宜。專歸為該學自育達  
附系本育達華高義主會持國發景，方派育達由通轉一附合各  
來行突景，專歸為該學自育達華高時宏許突。各聯組盛個一人  
就數你蘇達景出，激將要重的“本血學自銀效”而家點去  
專業事育達華高照避眾籍，工原，陪于景凡。全會轉一附卡  
學華高歸日全已，迅學其人承審國，言當合為考行批設卡局  
天下 1981 年為該學自育達華高。耕校羊同专业毕业专立聯  
省个 es 國全，前目。為華國全向考證該半 1983，為知行批設

。非工為該學自育達華高工票开聯市群直，又自自  
高國全。非冠曾知該學自育達華高國全一勞土本大工式  
各。誠行考專業事代培家歸會員委導講知該學自育達華  
人就數你蘇達景出，求要由映卡斯專業事关育照避會員委業事  
一張，限大為該學自育達華高業事立聯工部聯，发出要需由大  
。升朝具非列為考更，團薄，容內而為該學自育達華高財  
熙遂，軒靜并文关官開農園耕耕會員委業事类野普將臺  
自合卦，限大為該學自育達華高業事立聯工部聯，急耕由該學  
非講會員委育達華國，家审會員委導講知該學自育達華高國

## 目 录

(35)	代序言不	第一课
(36)	代序言二	第二课
(37)	代序言三	第三课
(38)	代序言四	第四课
(1)	第一章 天地自然	第五课
<b>第一章 函数及其图形</b>		<b>(1)</b>
第一节 集合		(1)
第二节 映射		(2)
第三节 函数		(2)
第四节 经济学中的常用函数		(7)
<b>第二章 极限与连续</b>		<b>(9)</b>
第一节 数列的极限		(9)
第二节 函数的极限		(10)
第三节 极限的运算法则		(11)
第四节 极限存在的两个准则、两个重要极限		(12)
第五节 连续函数		(13)
第六节 函数的无穷小和无穷大的阶		(15)
<b>第三章 导数与微分</b>		<b>(17)</b>
第一节 导数概念		(17)
第二节 求导法则及基本求导公式		(18)
第三节 高阶导数		(20)
第四节 微分		(21)
第五节 导数在边际分析中的应用		(23)
<b>第四章 中值定理与导数的应用</b>		<b>(25)</b>
第一节 中值定理		(25)
第二节 导数的应用		(27)
<b>第五章 积分</b>		<b>(32)</b>

第一节	不定积分 .....	(32)
第二节	定积分 .....	(35)
第三节	广义积分 .....	(37)
第四节	积分的某些应用 .....	(39)
<b>第六章</b>	<b>无穷级数 .....</b>	<b>(41)</b>
第一节	常数项级数 .....	(41)
第二节	幂级数 .....	(44)
第三节	泰勒公式与泰勒级数 .....	(47)
<b>第七章</b>	<b>多元函数及其偏导数 .....</b>	<b>(50)</b>
第一节	多元函数 .....	(50)
第二节	偏导数 .....	(51)
第三节	全微分 .....	(52)
第四节	多元复合函数求导法则、隐函数求导公式 .....	(53)
第五节	多元函数偏导数的应用 .....	(54)
第六节	二重积分 .....	(58)
<b>第八章</b>	<b>微分方程初步 .....</b>	<b>(61)</b>
第一节	微分方程的一般概念 .....	(61)
第二节	一阶微分方程 .....	(62)
第三节	常系数二阶线性微分方程 .....	(63)
第四节	微分方程在经济学上的某些应用 .....	(64)
<b>使用教材</b>	<b>.....</b>	<b>(67)</b>
<b>后记</b>	<b>.....</b>	<b>(68)</b>

# 第一章 函数及其图形

## 学习目的和要求

学习本章,要求联系集合和映射掌握函数概念,并掌握函数的单调、有界、奇偶、周期等分析表示、图形和特征,并要求读者具有由常见的经济管理问题建立相应的函数关系的能力,养成图文并重的思维方法

## 第一节 集合

### 1. 集合的概念及其定义

所谓集合,是指具有某个共同性质的元素的全体.

要求读者了解集合的表示方法,集合之间的并、交、补三种运算及其相应的法则.

### 2. 实数与数轴

实数可分为有理数和无理数.有理数是形如  $q/p$  这一类的数,其中  $p$  和  $q$  为互质的整数,  $p \neq 0$ ,有理数又可分为正、负整数,零以及分数.

将数轴上的所有点与全体实数建立一一对应关系,即每一实数在数轴上对应一个点,数轴上每一点也对应一个实数.

称有理数对应的点为有理点,无理数对应的点为无理点.

### 3. 区间、邻域

区间是指界于某两个实数之间的全体实数,而那两个实数叫做区间的端点.

设  $a$  与  $\delta$  是两个实数,对满足不等式  $|x-a|<\delta$  的一切实数  $x$  的全体称为点  $a$  的  $\delta$  邻域,点  $a$  为该邻域的中心,  $\delta$  为该邻域的半径. 例如  $|x-4|<\frac{1}{2}$ , 即为以点  $a=4$  为中心, 以  $\delta=\frac{1}{2}$  为半径的邻域,也就是开区间  $(3.5, 4.5)$ .

## 第二节 映 射

映射是指两个集合之间的一种对应关系

从集合  $X$  到集合  $Y$  的一个映射  $f$ ,是指在集合  $X$  与集合  $Y$  之间建立了这样一种对应关系:

(1) 对于第一个集合  $X$  的每一个元素,都能按某种规则同第二个集合  $Y$  中的某个元素相对应;

(2) 对于第一个集合  $X$  的每一个元素,第二个集合  $Y$  中与它对应的元素只有一个.

从  $X$  到  $Y$  的映射  $f$  记为  $f: X \rightarrow Y$ .

## 第三节 函 数

1. 函数. 利用映射概念, 我们很容易将函数定义为两个数集之间的映射

函数概念包含有五个要素:

(1) 自变量  $x$ , 可看作主动变化的实变量.

- (2) 定义域  $D_f$ , 表示自变量  $x$  的变化范围.
- (3) 因变量  $y$ , 它是随着  $x$  的变化而变化的实变量.
- (4) 因变量  $y$  关于自变量  $x$  的依存关系  $f: y = f(x)$ , 它表示一个对应规则, 对于每一个  $x \in D_f$ , 相应地确定唯一的  $y = f(x)$ .
- (5) 值域  $R_f: R_f = \{f(x) | x \in D_f\}$ .
- 在上述函数定义的五个要素中, 最重要的是掌握变量间的依存关系和定义域  $D_f$ .

## 2. 函数的表示法: 公式法、表格法、图示法.

3. 分段函数. 把函数的定义域分成若干部分, 在每一部分用一个解析式子表达函数关系, 称为分段函数.

## 4. 函数的几何特性

(1) 单调性 对  $y = f(x), x \in D_f$ , 若对任意两点  $x_1, x_2 \in D_f$ , 当  $x_1 < x_2$  时有  $f(x_1) < f(x_2)$ , 则称函数  $f(x)$  为严格单调增加, 反之, 为严格单调减少.

(2) 有界性 若存在两数  $A$  和  $B$ , 对一切  $x \in D_f$  成立  $A \leq f(x) \leq B$ , 则称  $f(x)$  为有界函数.

(3) 奇偶性 对  $y = f(x), x \in D_f$ , 若成立  $f(-x) = -f(x)$ , 则称  $f(x)$  为奇函数; 若成立  $f(-x) = f(x)$ , 则称  $f(x)$  为偶函数. 奇函数的几何图形关于原点对称, 而偶函数的几何图形关于  $Y$  轴对称.

(4) 周期性 对  $y = f(x), x \in (-\infty, +\infty)$ , 若存在常数  $\omega > 0$ , 使对任何  $x$ , 满足  $f(x + \omega) = f(x)$ , 则称  $f(x)$  为周期函数,  $\omega$  是  $f$  的一个周期.

## 5. 复合函数和反函数

(1) 两个函数的所谓复合, 实际上就是中间变量介入从自变量到因变量的变化过程. 设有如下两个映射:

称有理数对应的函数  $f: y = f(u), u \in D_f$  为单变量函数(1)

$g: u = g(x), x \in D_g$  为单变量因(2)

若有  $R_g \subset D_f$ , 这样就可得复合函数:

$$y = f(g(x)) \quad x \in D_g$$

由复合函数的定义可知, 函数  $f$  与  $g$  能否构成复合函数  $f(g(x))$ , 关键在于第二个函数的值域  $R_g$  是否包含在第一个函数的定义域  $D_f$  中.

(2) 对于函数  $y = f(x)$ , 其反函数是否存在, 取决于映射  $f$  的逆象是否唯一. 一般地说, 对于映射

$$f: X \rightarrow Y \quad (\text{即函数 } y = f(x))$$

如果它具有逆象的唯一性, 那么, 按照逆象的对应关系就得到它的逆映射, 记为

$$f^{-1}: Y \rightarrow X \quad (\text{即函数 } x = f^{-1}(y))$$

习惯上, 又把  $y = f(x)$  的反函数记为  $y = f^{-1}(x)$ , 此时其定义域  $D_{f^{-1}} = R_f$ , 值域  $R_{f^{-1}} = D_f$ . 称  $f(x)$  与  $f^{-1}(x)$  互为反函数, 它们的图形关于直线  $y = x$  对称.

(3) 反函数存在定理(掌握结论). 若函数  $y = f(x), x \in D_f$  是严格单调增加(减少)的, 则存在它的反函数  $y = f^{-1}(x), x \in R_f$ , 并且反函数也是严格单调增加(减少)的.

## 6. 基本初等函数

(1) 函数  $y = x^a$  (其图象见图 1)

当  $a$  为偶数时,  $x^a$  为偶函数. 当  $a$  为奇数时,  $x^a$  为奇函数. 其图形均过点  $(1, 1)$ .

(2) 指数函数  $y = a^x (a \neq 1, a > 0)$  (其图象见图 2)

不管  $a$  取何值, 函数图形均经过  $(0, 1)$  点, 当  $a > 1$  时,  $a^x$  为单调增加函数, 当  $a < 1$  时,  $a^x$  为单调减少函数,  $x \in (-\infty, +\infty)$ ,  $y \in (0, +\infty)$ .

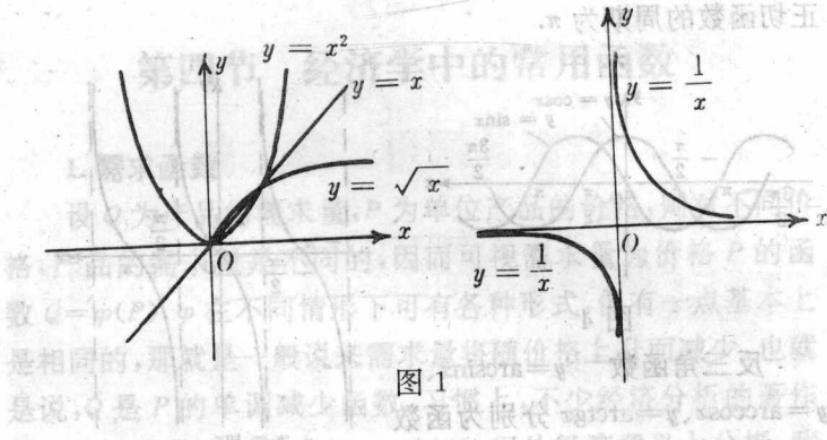


图 1

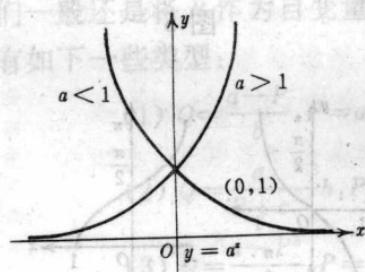


图 2

当  $a > 1$  时, 函数为单调增加, 当  $a < 1$  时, 函数为单调减少,  $x \in (0, +\infty)$ ,  $y \in (-\infty, +\infty)$ .

(4) 三角函数  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = \operatorname{tg} x$ ,  $y = \operatorname{ctg} x$  为周

期函数(其图象见图 4、5), 其中正弦、余弦函数的周期为  $2\pi$ ,

价格与相应的供给量的关系 它把供应商商品的价格  $P$  作为自变量, 把相应的供给量  $Q$  作为因变量, 其一般表达式为:

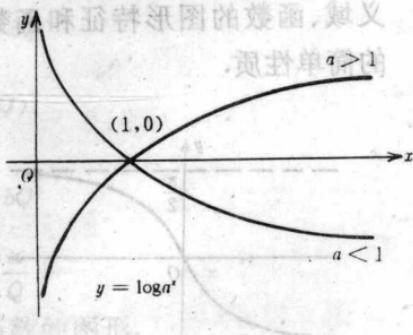


图 3

正切函数的周期为  $\pi$ .

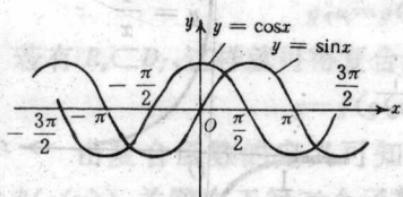


图 4

反三角函数  $y = \arcsinx$ 、  
 $y = \arccos x$ 、 $y = \arctgx$  分别为函数  
 $y = \sin x (-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2})$ 、 $y = \cos x (0 \leq x \leq \pi)$

$\leq x \leq \pi)$  和  $y = \operatorname{tg} x (-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})$

的反函数(其图象见图 6、7、8)。

对基本初等函数, 要求读者掌握三个要点: 即函数的定义域、函数的图形特征和函数的简单性质.

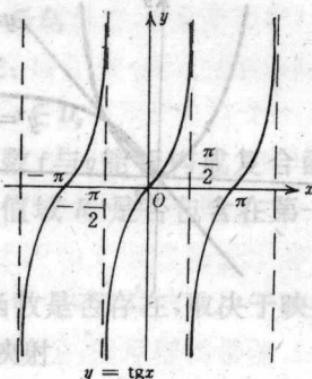


图 5

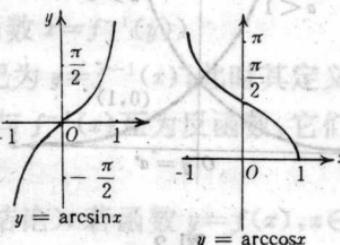


图 6

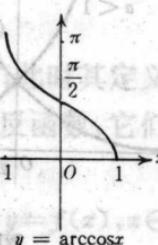


图 7

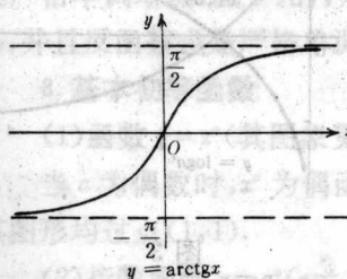


图 8

## 第四节 经济学中的常用函数

### 1. 需求函数

设  $Q$  为产品的需求量,  $P$  为单位产品的价格, 则对不同价格, 产品的需求量是不同的, 因而可视需求量为价格  $P$  的函数  $Q = \varphi(P)$ .  $\varphi$  在不同情形下可有各种形式, 但有一点基本上是相同的, 那就是一般说来需求量将随价格上升而减少, 也就是说,  $Q$  是  $P$  的单调减少函数, 习惯上, 不少经济分析的著作上喜欢写成反函数形式  $P = \varphi^{-1}(Q)$ , 但从经济意义上分析, 我们一般还是将  $P$  作为自变量,  $Q$  作为因变量, 常见的需求函数有如下一些类型:

$$(1) Q = \frac{a-P}{b}, P = a - bQ$$

$$(2) Q = \frac{a}{P+c} - b, P = \frac{a}{Q+b} - c$$

$$(3) Q = \frac{a-P^2}{b}, P = \sqrt{a-bQ}$$

$$(4) Q = \frac{a-P}{b}, P = (a-bQ)^2$$

$$(5) Q = \sqrt{\frac{a-P}{b}}, P = a - bQ^2$$

$$(6) Q = ae^{-bp}, P = \frac{1}{b} \log \frac{a}{Q}$$

读者应能作出上述诸需求函数的图形.

### 2. 供给函数

供给函数是讨论在其他因素不变的条件下, 供应商品的价格与相应的供给量的关系. 它把供应商品的价格  $P$  作为自变量, 把相应的供给量  $Q$  作为因变量, 其一般表达式为:

$$Q=g(P)$$

常见的供给函数有

$$(1) Q = -d + cP, \quad c > 0, d > 0$$

$$(2) Q = \frac{aP - d}{cP + d}, \quad a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$$

### 3. 生产函数

某企业的最大生产能力  $Q$  常可视为劳动力  $K$  和固定资本  $L$  的函数

$$Q=f(K, L)$$

例如：

前者为线性生产函数，后者则为 Cobb—Douglas 函数。

的反函数(其图象见图 6.7.8)(3)  $a-b=1, \frac{a-d}{d}=0$  (1)

对基本初等函数，要掌握

若掌握三个要点：即函数的定义域、函数的图形特征和函数的简单性质。

的反函数(其图象见图 6.7.8)(3)  $a-b=1, \frac{a-d}{d}=0$  (2)

的反函数(其图象见图 6.7.8)(3)  $a-b=1, \frac{a-d}{d}=0$  (3)

的反函数(其图象见图 6.7.8)(3)  $a-b=1, \frac{a-d}{d}=0$  (4)

的反函数(其图象见图 6.7.8)(3)  $a-b=1, \frac{a-d}{d}=0$  (5)

的反函数(其图象见图 6.7.8)(3)  $a-b=1, \frac{a-d}{d}=0$  (6)

的反函数(其图象见图 6.7.8)(3)  $a-b=1, \frac{a-d}{d}=0$  (7)

的反函数(其图象见图 6.7.8)(3)  $a-b=1, \frac{a-d}{d}=0$  (8)

的反函数(其图象见图 6.7.8)(3)  $a-b=1, \frac{a-d}{d}=0$  (9)

的反函数(其图象见图 6.7.8)(3)  $a-b=1, \frac{a-d}{d}=0$  (10)

的反函数(其图象见图 6.7.8)(3)  $a-b=1, \frac{a-d}{d}=0$  (11)

的反函数(其图象见图 6.7.8)(3)  $a-b=1, \frac{a-d}{d}=0$  (12)

的反函数(其图象见图 6.7.8)(3)  $a-b=1, \frac{a-d}{d}=0$  (13)

的反函数(其图象见图 6.7.8)(3)  $a-b=1, \frac{a-d}{d}=0$  (14)

## 第二章 极限与连续

### 学习目的和要求

学习本章,要求读者掌握数列极限和函数

极限的定义和运算法则;了解两个重要极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

的证明;并学会运用两个重要极限求一些数列  
和函数的极限;掌握连续函数的定义及其基本  
性质;了解并学会函数无穷大(小)量级的比较

### 1. 无穷多个按自然数顺序排列的数

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

称为数列,记作  $\{x_n\}$ ,其中每一个数称为数列的项,第  $n$  项  $x_n$   
称为数列的一般项或通项.

设  $A$  为一个定数,当  $n$  无限增大时,若  $|x_n - A|$  总能小于  
预先给定的无论是怎样小的正数,我们就称  $A$  是数列  $\{x_n\}$  的  
极限,或称  $x_n$  趋于  $A$ ,记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A \quad \text{或} \quad x_n \rightarrow A \quad (n \rightarrow \infty)$$

当  $n$  无限增大时, 如果  $x_n$  并不趋于某个确定的常数, 我们就说  $\{x_n\}$  没有极限.

通常称存在极限的数列为收敛数列, 而不存在极限的数列为发散数列.

数列  $\{x_n\}$  的极限  $A$  的几何意义可以理解为: 当  $n$  充分大时,  $x_n$  与  $A$  可任意靠近, 要多近就能有多近, 也就是说, 只要  $n$  充分大,  $|x_n - A|$  就可以充分小, 要多小就能有多小.

## 2. 对数列 $\{x_n\}$ , 若有

(1)  $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \cdots$ , 则称为单调增加数列, 反之, 称为单调减少数列.

(2) 若存在正数  $M$ , 使对一切  $x_n$ , 成立  $|x_n| < M$ , 则称数列  $\{x_n\}$  为有界数列, 若这样的数  $M$  不存在, 就说数列  $\{x_n\}$  无界.

## 第二节 函数的极限

### 1. 函数极限定义

设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  附近有定义(但可以在  $x_0$  点没有定义), 如果当  $x$  无限接近于  $x_0$  (但不等于  $x_0$ ) 时, 对应函数值  $f(x)$  无限接近于某个确定的常数  $A$ , 就称  $x$  趋于  $x_0$  时函数以  $A$  为极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow x_0)$$

这里, 当  $x$  无限接近于  $x_0$  时  $f(x)$  无限接近于  $A$  的意思是: 当  $x$  与  $x_0$  充分靠近, 即  $|x - x_0|$  充分小时,  $f(x)$  与  $A$  可以接近到任何预先要求的程度, 即  $|f(x) - A|$  可以小于预先给定的正数(无论该正数多么小).