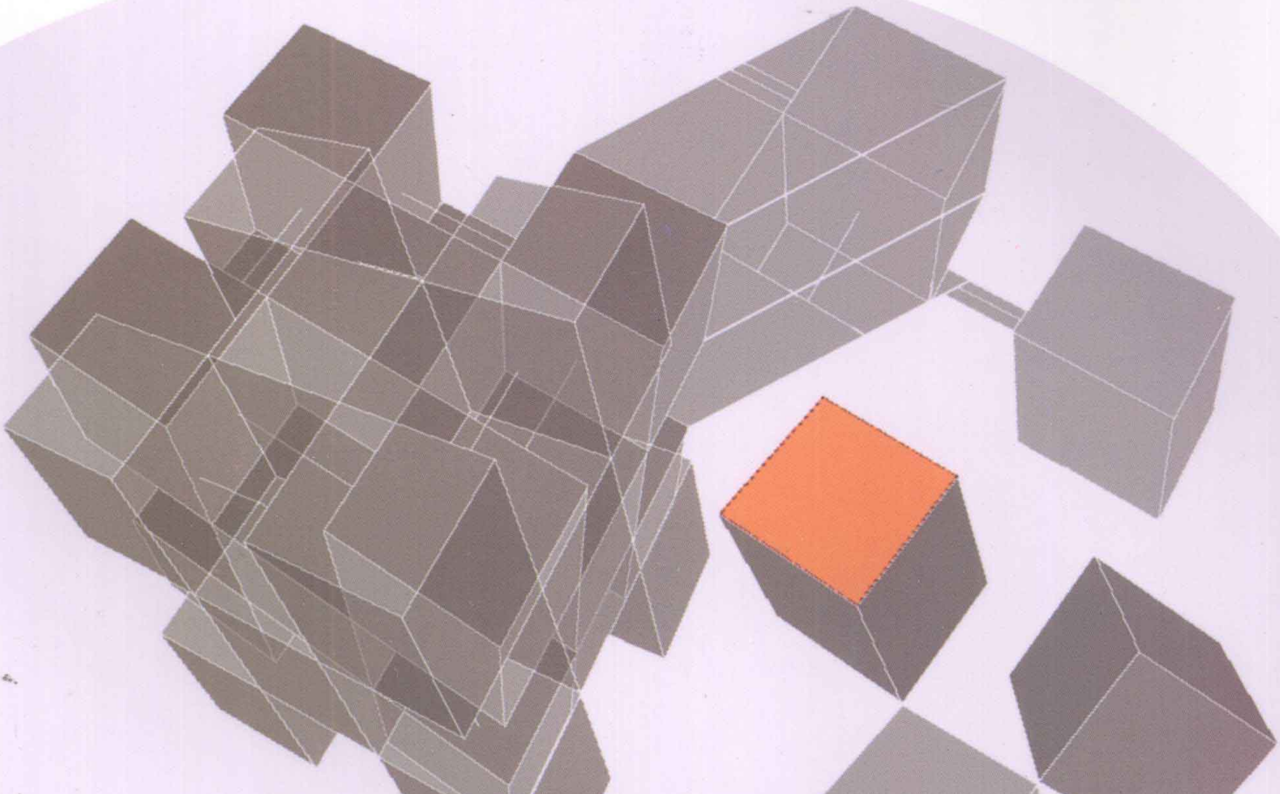
XIANXING DAISHU

线性代数

主编 王炳兴 王海敏



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

线性代数

主编　王炳兴　王海敏

浙江大學出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数／王炳兴，王海敏主编．—杭州：浙江大学出版社，2008.8

ISBN 978-7-308-06150-6

Ⅰ.线…　Ⅱ.①王…②王　Ⅲ.线性代数

Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 125994 号

线性代数

王炳兴　王海敏　主编

责任编辑　徐素君

封面设计　刘依群

出版发行　浙江大学出版社

（杭州天目山路 148 号　邮政编码 310028）

（E-mail：jsjsyb@zju.edu.cn）

（网址：http://www.zjupress.com

http://www.press.zju.edu.cn）

电话：0571-88925592，88273066（传真）

排　　版　杭州中大图文设计有限公司

印　　刷　富阳市育才印刷有限公司

开　　本　787mm×960mm　1/16

印　　张　10.25

字　　数　220 千

版 印 次　2008 年 8 月第 1 版　2008 年 8 月第 1 次印刷

书　　号　ISBN 978-7-308-06150-6

定　　价　16.00 元

前　　言

线性代数是经济管理类各专业的一门重要基础课程，在经济科学和管理科学中有广泛的应用．通过本课程的学习，不仅为后继课程的学习打下必要的数学基础，而且还能促进学生的抽象思维和严密的推理能力的发展．

本教材是在我们多年教学实践的基础上并参照教育部关于全国非数学专业（经济管理类）硕士研究生考试数学（三）和数学（四）对线性代数部分的基本要求编写的，可作为高等学校经济管理类各专业学生的线性代数教材．全书共分5章，第一章介绍了行列式的概念、性质以及行列式的计算方法；第二章介绍了矩阵这一重要工具，讨论了矩阵的运算、矩阵的初等变换和矩阵的秩；第三章以矩阵为工具，讨论了线性方程组的解法和线性方程组解的结构；第四章介绍了矩阵的特征值和特征向量，并用矩阵的特征值和特征向量为工具研究了矩阵的对角化问题；第五章介绍了二次型概念、二次型化标准型和判断二次型为正定的方法．在内容的编写上，我们力求做到科学性和通俗性结合，由浅入深，循序渐进．读者只要有高中数学的基础知识就能顺利阅读本书．根据我们的教学经验，讲完本教材所需课时大约在50左右，如果课时少，可根据实际情况和要求取舍内容．

本书由浙江工商大学统计与数学学院组织编写，大纲和体系由集体讨论而定．第一章由李剑秋执笔，第二章由王海敏执笔，第三章由丁嘉华执笔，第四章由金义明执笔，第五章由王炳兴执笔，全书最后由王炳兴、王海敏修改定稿．

本书编写过程中参考了大量的国内外教材；浙江大学出版社对本书的编审和出版给予了热情支持和帮助，尤其是徐素君老师在本书的编辑和出版过程中付出了大量心血；浙江工商大学统计与数学学院自始至终对本书的出版给予了大力支持，在此一并致谢！

由于编者水平有限，教材中一定存在不妥之处，恳请专家、同行、读者批评指正，使本书在教学实践中不断完善．

编者

2008年5月于浙江工商大学

目　录

第一章　行列式

第二章　矩　阵

第三章　线性方程组

第四章　矩阵的特征值与特征向量

第一章 行列式

在中学代数中，我们介绍过二阶行列式、三阶行列式解二元、三元线性方程组.用这种方法同样可推广到解 n 元线性方程组.本章主要讨论 n 阶行列式的定义、性质、计算方法及解 n 元线性方程组的克莱姆法则.

§1.1 n 阶行列式的定义

一、二阶、三阶行列式

考虑含有两个方程，两个未知量的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}, \tag{1-1}$$

为了求得方程组(1-1)的解，可以利用消元法得

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21} \end{cases},$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，方程组(1-1)有唯一解，且有

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1-2}$$

为了便于记忆，我们引进记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

表示代数和 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，并称为二阶行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{1-3}$$

二阶行列式的计算可用图 1-1 来记忆，

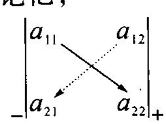


图 1-1

利用二阶行列式的定义，若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\qquad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\qquad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则当 $D\neq 0$ 时，(1-2) 式可用下述公式表示：

$$x_1=\frac{D_1}{D},\qquad x_2=\frac{D_2}{D}.$$

我们同样对于九个数排成三行三列的式子定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{aligned} & a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ & -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}, \end{aligned}\tag{1-4}$$

称它为三阶行列式.行列式中横排、纵排分别称为它的行和列，数 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 称为它的元素，而 i 和 j 表示元素 a_{ij} 的行标和列标.行列式中从左上角到右下角的对角线称为主对角线，主对角线上的元素称为其主对角线元素，相应地从右上角到左下角的对角线称为次对角线，其上元素称为次对角线元素.

三阶行列式的计算可用图 1-2 来记忆，

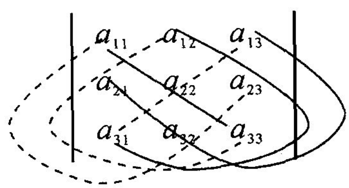


图 1-2

例 1.1 计算三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

解 $D=2\times 1\times 3+(-3)\times(-2)\times 5+1\times 4\times 1-1\times 1\times 5-(-3)\times 4\times 3$
$-2\times(-2)\times 1=75.$

对于三元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$$

的解也有类似于二元一次方程组的结论：

当系数行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0$ 时，方程组有唯一解，并且有

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D}, \qquad x_3 = \frac{D_3}{D}.$$

其中 $D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$.

现在已定义了二阶、三阶行列式，同样我们可定义四阶甚至 n 阶行列式. 从前面定义的二阶、三阶行列式，可以看到符号"||"其实表示了一种运算法则，当然 n 阶行列式也会有一种像二阶、三阶行列式那样定义的运算法则. 那么 n 阶行列式该如何定义?对于 n 阶行列式的定义可以用多种不同的方法，下面我们采用简明的递归法作定义. 为此首先介绍一个概念:行列式元素的余子式和代数余子式.

定义 1.1 设在三阶行列式中划去元素 a_{ij} 所在第 i 行和第 j 列的元素，剩下的元素按原来的顺序组成二阶的行列式，称为元素 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}. 并把元素 a_{ij} 的余子式 M_{ij} 前添加符号 $(-1)^{i+j}$ 称为元素 a_{ij} 的代数余子式，记作 A_{ij}，即

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

余子式与代数余子式或者相等(当 $i+j$ 为偶数时)，或者相差一个符号(当 $i+j$ 为奇数时).

元素 a_{ij} 的代数余子式与行列式的第 i 行及第 j 列元素无关，仅与行列式的其余行、其余列元素有关.

例 1.2 设 $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$，求 $M_{13}, M_{32}, A_{32}, A_{32}$.

解 $M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 5, \qquad M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 6,$

$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = 5, \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -6.$

有了余子式和代数余子式的概念，我们可以把三阶行列式的运算公式(1-4)整理成:

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}, \end{aligned} \tag{1-5}$$

其中 A_{11}，A_{12}，A_{13} 分别是元素 a_{11}，a_{12}，a_{13} 的代数余子式.

从而得到一个结论:三阶行列式的值等于第一行的元素与其对应的代数余子式的乘

积之和.

若我们把(1-5)式作为三阶行列式的定义,即三阶行列式可用低一阶的二阶行列式去定义,因此我们就用这种递归方法来定义 n 阶行列式.

二、n 阶行列式的定义

定义 1.2 由 n^2 个数组成的 n 行 n 列的记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式. D 表示的算式为

当 $n=1$ 时, $D=|a_{11}|=a_{11}$,

当 $n\geqslant 2$ 时, $D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}$,

其中

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij},$$

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\,j-1} & a_{2\,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\,1} & a_{i-1\,2} & \cdots & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j+1} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,1} & a_{i+1\,2} & \cdots & a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j+1} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n\,j-1} & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (i,j=1,2,\cdots,n),$$

即和三阶行列式一样, M_{ij} 表示 n 阶行列式中划去元素 a_{ij} 所在第 i 行和第 j 列的元素,剩下的元素按原来的顺序组成低一阶的行列式. 同样我们把 M_{ij} 称为元素 a_{ij} 的余子式,把 A_{ij} 称为元素 a_{ij} 的代数余子式.

显然对于这样的定义,各阶行列式都会有统一的运算性质.

由上述定义可见,二阶行列式有 2! 项,三阶行列式有 3! 项,前面带正号和带负号各半,则 n 阶行列式的计算公式中应包含有 $n!$ 项,其中 $\frac{n!}{2}$ 项前面带正号, $\frac{n!}{2}$ 项前面带负号,而每一项是由行列式中位于不同行不同列的 n 个数相乘而得(这些结论可用数学归纳法给以证明).

我们还可以把行列式按第一行展开定义,推广到任意一行(列)展开.

定理 1.1 行列式等于它的任意一行(列)的各个元素与其对应的代数余子式的乘积之和,即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$$

$$D = a_{1i}A_{1i} + a_{2i}A_{2i} + \cdots + a_{ni}A_{ni}, \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

例 1.3　计算 n 阶下三角行列式(当 $i < j$ 时,$a_{ij} = 0$,即主对角线以上元素都为零)

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解　行列式依次按第一行展开,得

$$D_n = a_{11} \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \times a_{22}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

由此可知,下三角行列式的值等于主对角元素的乘积.

同理可得

n 阶上三角行列式(当 $i > j$ 时,$a_{ij} = 0$,即主对角线以下元素都为零)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

n 阶对角行列式(当 $i \neq j$ 时,$a_{ij} = 0$,即除主对角元素以外其余元素都为零)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 1.4 计算五阶行列式 $D=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

解 注意到第三列有 4 个元素为零,故按第三列展开,有

$$D = 1\times A_{13}+0\times A_{23}+0\times A_{33}+0\times A_{43}+0\times A_{53}$$

$$= 1\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

同样注意到上式右端行列式第三列只有一个非零元素,故按第三列展开,得

$$D=(-1)\times(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=-(-4-1)=5.$$

从上述例子可见,在计算行列式时,要选择零元素最多的行或列展开,当 $n>3$ 时,若行列式中等于零的元素比较多,行列式的计算比较简单;但若行列式中等于零的元素比较少,这时用定义直接求 n 阶行列式值的计算量就会很大.为了简化行列式的计算过程,我们有必要研究行列式的一些性质.

§1.2 n 阶行列式的性质

首先引入转置行列式的概念.

将行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的行列位置互换得

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则称 D^{T} 为 D 的转置行列式.

性质 1 行列式与它的转置行列式值相等.

证明 对行列式阶数 n 作数学归纳法.

当 $n=2$ 时,结论成立.

假设对 $n-1$ 阶行列式也成立,对 n 阶行列式,将 D 和 D^{T} 分别按第一行和第一列展开,有

$$D=\sum_{k=1}^{n}a_{1k}A_{1k}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{1+k}a_{1k}M_{1k},$$

$$D^{\mathrm{T}}=\sum_{k=1}^{n}a_{1k}A'_{1k}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{1+k}a_{1k}M'_{1k},$$

其中 A_{1k},M_{1k} 是D 的第一行元素的代数余子式和余子式,A'_{1k},M'_{1k} 是D^{T}的第一列元素的代数余子式和余子式.而 M_{1k} 与M'_{1k} 都是$n-1$ 阶行列式,且M'_{1k} 是M_{1k} 的转置,由假设有 $M_{1k}=M'_{1k}(k=1,2,\cdots,n)$,所以 $D=D^{\mathrm{T}}$.

性质 2 交换行列式的某两行(列)的位置,行列式的值变号,即

$$\begin{array}{r}\\ \\ i\text{ 行}\\ \\ j\text{ 行}\\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\,n-1} & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{i\,n-1} & a_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{j\,n-1} & a_{jn}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n\,n-1} & a_{nn}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\,n-1} & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{j\,n-1} & a_{jn}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{i\,n-1} & a_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n\,n-1} & a_{nn}\end{vmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ i\text{ 行}\\ \\ j\text{ 行}\\ \\ \\ \end{array}.$$

证明 设左边行列式为 D,右边行列式为 D_1,注意到行列式 D 与D_1 除去第 i 行与第 j 行位置互换外,其余均同.

对行列式阶数 n 作数学归纳法.

当 $n=2$ 时,结论成立.

假设对 $n-1$ 阶行列式也成立,需要证明对 n 阶行列式也成立.

由定理 1.1,我们将行列式 D 与D_1 都按第 k 行展开,且 $k\neq i$, $k\neq j$,则有

$$D=\sum_{l=1}^{n}a_{kl}A_{kl}=\sum_{l=1}^{n}(-1)^{k+l}a_{kl}M_{kl},$$

$$D_1=\sum_{l=1}^{n}a_{kl}A'_{kl}=\sum_{l=1}^{n}(-1)^{k+l}a_{kl}M'_{kl},$$

其中 A_{kl}, M_{kl} 是D 的第k 行元素的代数余子式和余子式,A'_{kl},M'_{kl} 是D_1 的第 k 行元素的代数余子式和余子式.而 M_{kl} 与M'_{kl} 都是$n-1$ 阶行列式,且除去第 i 行与第j 行位置互换外,其余均同,由假设可得 $M_{kl}=-M'_{kl}(l=1,2,\cdots,n)$,所以有 $D=-D_1$.

性质 3 若行列式中有两行(列)完全相同,则行列式的值为零,即当 $a_{il}=a_{jl}(l=1,2,\cdots,n)$ 时,有

$$D=\begin{array}{c}\left|\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in-1} & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in-1} & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{array}\right|\end{array}\begin{array}{l} \\ \\ i\text{ 行} \\ \\ j\text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}=0.$$

证明　把行列式的第 i 行与第 j 行互换，有 $D=-D$，故 $D=0$.

性质 4　若行列式中某一行(列)每个元素都有公因子 k，则 k 可提到行列式符号外，即

$$\left|\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right| = k\left|\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right|.$$

证明　左端 $\xlongequal{\text{按第 } i \text{ 行展开}} \sum\limits_{l=1}^{n} ka_{il}A_{il} = k\sum\limits_{l=1}^{n} a_{il}A_{il} =$ 右端.

推论　如果行列式中有两行(列)元素对应成比例，则行列式的值为零.

性质 5　如果行列式的某一行(列)的每个元素都是两个数之和，则此行列式可以写成两个行列式之和，即

$$\left|\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right| + \left|\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right|.$$

证明　左端 $\xlongequal{\text{按第 } i \text{ 行展开}} \sum\limits_{i=1}^{n}(a_{il}+b_{il})A_{il} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{il}A_{il} + \sum\limits_{i=1}^{n} b_{il}A_{il} =$ 右端.

性质 6　行列式的某一行(列)的各元素乘以同一个数 k 然后加到另一行(列)上，行列式的值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明 右端$\xlongequal{\text{性质 5}}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{\text{性质 4 推论}}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + 0 = \text{左端}.$$

性质 7 行列式任意一行(列)的各元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式的乘积之和为零,即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0, \quad i \neq j;$$
$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0, \quad i \neq j.$$

证明 设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ i\text{ 行} \\ \\ j\text{ 行} \\ \\ \\ \end{array},$$

再构造一个行列式

$$D_1=\begin{array}{|cccc|l}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}&\\ \vdots&\vdots&&\vdots&\\ a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}&i\text{ 行}\\ \vdots&\vdots&&\vdots&\\ a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}&j\text{ 行}\\ \vdots&\vdots&&\vdots&\\ a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}&\end{array}.$$

行列式 D 与 D_1 除了第 j 行元素不同外,其余元素都相同,则它们第 j 行对应元素的代数余子式也相同.设 $A_{j1},A_{j2},\cdots,A_{jn}$ 是行列式 D 的第 j 行元素的代数余子式,现对行列式 D_1 按第 j 行展开,得

$$D_1=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk},$$

即

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\begin{array}{|cccc|l}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}&\\ \vdots&\vdots&&\vdots&\\ a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}&i\text{ 行}\\ \vdots&\vdots&&\vdots&\\ a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}&j\text{ 行}\\ \vdots&\vdots&&\vdots&\\ a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}&\end{array}.$$

由于上式右端的行列式第 i 行与第 j 行对应元素相等,所以

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=0.$$

对于行列式我们可以把定理 1.1 和性质 7 统一写成

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\begin{cases}D, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases};$$

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}D, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}.$$

例 1.5 已知 $|A|=\begin{vmatrix}a&b&c&d\\ b&a&c&d\\ d&a&c&b\\ d&b&c&a\end{vmatrix}$,求 $A_{11}+A_{21}+A_{31}+A_{41}$ 的值(其中 A_{ij} 表示行列式中元素 a_{ij} 的代数余子式).

解 从理论上讲每一个 A_{ij} 都可以求出,但计算量很大.注意到元素 a_{ij} 的代数余子式与行列式 $|A|$ 的第 i 行及第 j 行元素无关,仅与行列式的其余行、其余列元素有关,故

我们先构造一个四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&b&c&d\\1&a&c&d\\1&a&c&b\\1&b&c&a\end{vmatrix},$$

行列式 $|A|$ 与 D 相比除第一列元素外,其余元素均相同,所以 D 的第一列元素的代数余子式即为 $|A|$ 的第一列对应元素的代数余子式 $A_{i1}(i=1,2,3,4)$,故将 D 按第一列展开有

$$D=1\cdot A_{11}+1\cdot A_{21}+1\cdot A_{31}+1\cdot A_{41}=\begin{vmatrix}1&b&c&d\\1&a&c&d\\1&a&c&b\\1&b&c&a\end{vmatrix},$$

又因行列式中的第一列和第三列对应元素相等,由性质 3 则有

$$A_{11}+A_{21}+A_{31}+A_{41}=0.$$

例 1.6 证明 $\begin{vmatrix}by+az&bz+ax&bx+ay\\bx+ay&by+az&bz+ax\\bz+ax&bx+ay&by+az\end{vmatrix}=(a^3+b^3)\begin{vmatrix}x&y&z\\z&x&y\\y&z&x\end{vmatrix}.$

证明 左边 $\xlongequal{\text{性质 5}}\begin{vmatrix}by&bz+ax&bx+ay\\bx&by+az&bz+ax\\bz&bx+ay&by+az\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}az&bz+ax&bx+ay\\ay&by+az&bz+ax\\ax&bx+ay&by+az\end{vmatrix}$

$$\xlongequal{\text{性质 4}}b\begin{vmatrix}y&bz+ax&bx+ay\\x&by+az&bz+ax\\z&bx+ay&by+az\end{vmatrix}+a\begin{vmatrix}z&bz+ax&bx+ay\\y&by+az&bz+ax\\x&bx+ay&by+az\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{性质 6}}b\begin{vmatrix}y&bz+ax&bx\\x&by+az&bz\\z&bx+ay&by\end{vmatrix}+a\begin{vmatrix}z&ax&bx+ay\\y&az&bz+ax\\x&ay&by+az\end{vmatrix}$$

$$=b^2\begin{vmatrix}y&bz+ax&x\\x&by+az&z\\z&bx+ay&y\end{vmatrix}+a^2\begin{vmatrix}z&x&bx+ay\\y&z&bz+ax\\x&y&by+az\end{vmatrix}$$

$$=b^2\begin{vmatrix}y&bz&x\\x&by&z\\z&bx&y\end{vmatrix}+a^2\begin{vmatrix}z&x&ay\\y&z&ax\\x&y&az\end{vmatrix}$$

$$=b^3\begin{vmatrix}y&z&x\\x&y&z\\z&x&y\end{vmatrix}+a^3\begin{vmatrix}z&x&y\\y&z&x\\x&y&z\end{vmatrix}$$

第一章 行列式