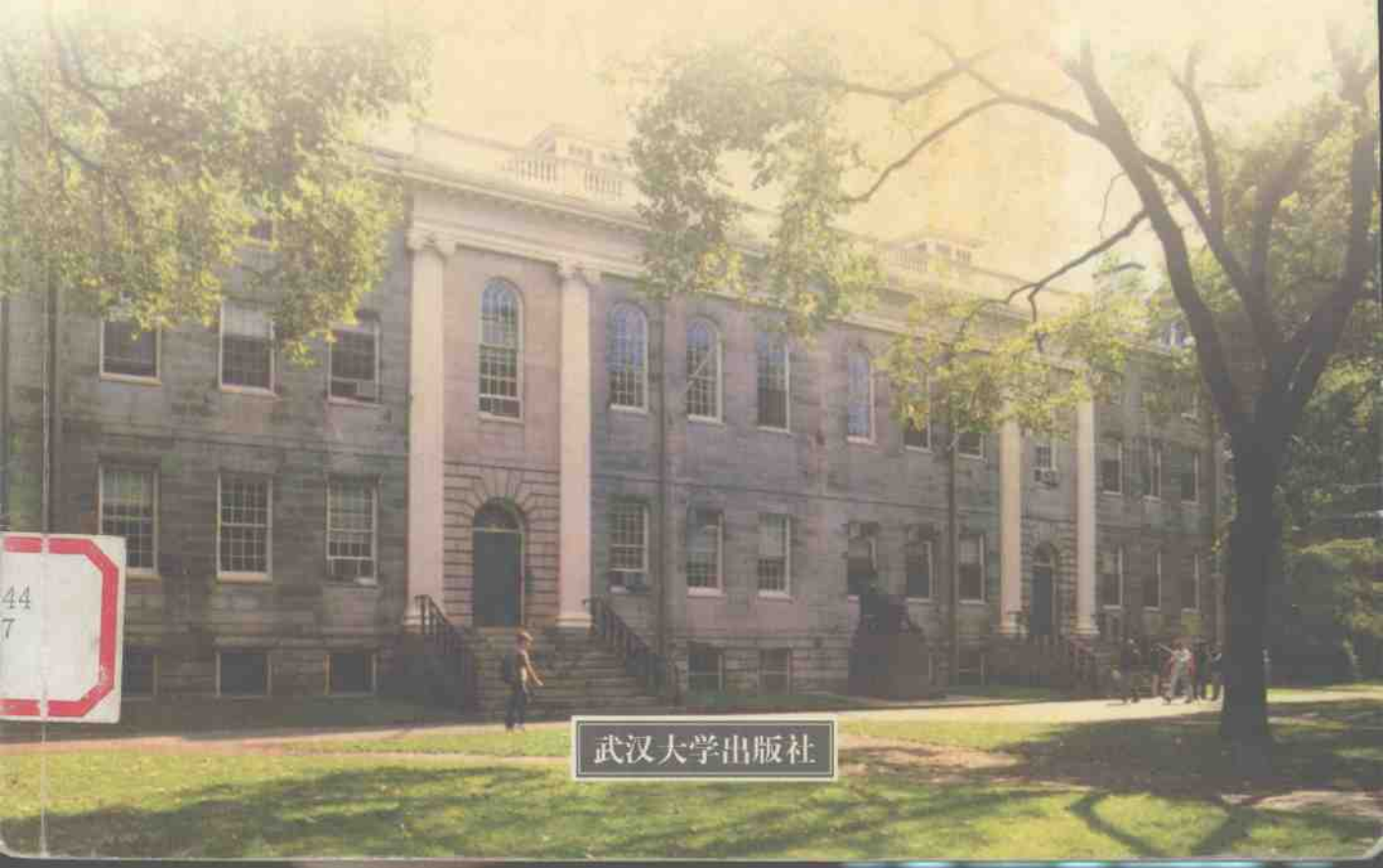


全 国 高 等 教 育 自 学 考 试

理论力学 试题解答与分析

刘明威 周广春



武汉大学出版社

全国高等教育自学考试

理论力学试题解答与分析

刘明威 周广春

武汉大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

理论力学试题解答与分析/刘明威,周广春编. —武汉:武汉大学出版社,
1999. 3

全国高等教育自学考试用

ISBN 7-307-02636-8

I. 理… II. ①刘… ②周… III. 理论力学—高等教育—自学考试—
解题 IV. O31-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (98) 第 22280 号

武汉大学出版社出版发行

(430072 武昌 珞珈山)

武汉市科普教育印刷厂印刷

(430035 武汉市汉口古田路 16 号)

1999 年 3 月第 1 版 1999 年 3 月第 1 次印刷

开本:787×1092 1/16 印张:10.75

字数:248 千字 印数:1—5000

ISBN 7-307-02636-8/O·196 定价:12.50 元

本书如有印装质量问题,请寄承印厂调换

序 言

《理论力学试题解答与分析》是根据众多自学者的要求而编写的。

向自学者公开自学考试试卷的题型,有利于增强自学考试的公平性、合理性;让自学者了解试卷中对考试内容的深度和广度要求,有利于提高自学的质量。这里介绍和推荐了国内若干省的十套自学考试试卷,并进行解答和分析,意在满足自学者渴求了解考题情况以促进自学的欲望。同时,向自学者提供一份有益的学习辅导资料。

本书是全国组编本《理论力学》(刘明威主编)、《理论力学自学指导》(刘明威、周广春编,均由武汉大学出版社出版)的配套用书。为突出辅导自学的功能和效果,在试题的解答与分析中,着眼于掌握知识,提高自学能力,培养分析问题和解决问题的能力。为此,本书采用如下的基本编写格式。

1. 对每一考题都指出该题目所考核的知识点,以及对知识点考核的能力层次。使自学者明确考什么,考到什么程度,即明确试题的考核目标。

关于理论力学课程的知识点,及对各知识的最高能力层次要求,在《理论力学自学指导》一书中已分章给出。

2. 对客观性试题(简答、选择、填空、作图等题型),不但给出答案,而且从概念、理论上进行分析,说明答案是如何得到的,力求达到知其然且知其所以然。

3. 对计算题,在给出详细求解过程之前,先从理论、概念、方法上讲清怎样解,为什么这样解,使读者了解运用知识分析和解决问题的思维过程。

从辅导自学的角度出发,书中对个别试题有文字改动或题意调整。

由于水平和经验所限,这本书是否能很好地体现出编者的初衷,尚仰赖广大读者的感受,恳请提出批评和建议。

编 者

1999.1年

目 录

试卷一解答与分析	1
试卷二解答与分析	17
试卷三解答与分析	31
试卷四解答与分析	54
试卷五解答与分析	72
试卷六解答与分析	86
试卷七解答与分析	98
试卷八解答与分析	117
试卷九解答与分析	135
试卷十解答与分析	149

试卷一解答与分析

一、简答题(每题2分,共12分)

1. 在刚体的同一平面上作用有多个力偶,试问用何物理量表示该力偶系的效应以及它的计算公式。

【考核知识点】 第三章知识点5:平面力偶系的合成结果;合力偶矩。

【考核能力层次】 理解。

【答案】 可用力偶系的合力偶的矩 M 表示该力偶系的效应,其值为

$$M = \sum_{i=1}^n m_i$$

式中, m_i 是力偶系中第 i 个力偶的力偶矩。

【分析】 平面力偶系可合成为一合力偶。合力偶的作用效果与力偶系的作用效果相同,而力偶的作用效果是以力偶矩来表示,所以合力偶矩 M 即表示力偶系的作用效应,且等于力偶系中各力偶的作用效应的总和。

2. 重为 W 的物体置于斜面上,已知摩擦系数为 f ,且 $\tan\alpha < f$,问此物体能否下滑?若增加物体的重量,问能否达到下滑的目的?为什么?

【考核知识点】 第五章知识点5:自锁现象;第五章知识点4:摩擦角。

【考核能力层次】 理解。

【答案】 不能下滑。增大物体的重量也不能下滑,因为主动力合力 W 作用于摩擦角 φ 内。

【分析】 按题中条件 $\tan\alpha < f = \tan\varphi$,即斜面倾角 α 小于摩擦角 φ 。主动力合力 W 与接触面法线的夹角等于角 α ,说明力 W 作用在摩擦角内。按自锁条件,无论力 W 的值为多大,物体都将在斜面上保持静止平衡。

3. 如果点在运动过程中恒有(1) $a_t=0$; (2) $a_n=0$; (3) $a=0$ 。说明在以上各种情况下点做怎样的运动。

【考核知识点】 第七章知识点9:切向加速度、法向加速度及其与加速度的关系。

【考核能力层次】 简单应用。

【答案】 (1)点做匀速曲线运动;(2)点做直线运动;(3)点做匀速直线运动。

【分析】 切向加速度 $a_t = \frac{dv}{dt}$,反映速度的值变化的快慢。 $a_t=0$ 表明速度大小不发生变化,即点做匀速曲线运动。法向加速度 $a_n = \frac{v^2}{\rho}$,反映速度的方向变化的快慢。 $a_n=0$ 表明速

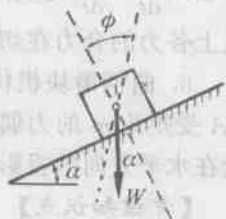


图 1-1

度方向不发生变化,即点做直线运动。加速度的大小 $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$, 当 $a = 0$ 时, 必有 $a_t = a_n = 0$, 即速度的大小和方向均不发生变化, 点做匀速直线运动。

4. “刚体作平动时, 刚体上各点轨迹一定是直线或平面曲线”, 这种说法对吗? 为什么?

【考核知识点】 第八章知识点 1: 刚体的平动。

【考核能力层次】 识记。

【答案】 不对。平动含直线平动和曲线平动两种情况。刚体做曲线平动时, 其上点的轨迹可以是平面曲线, 也可以是空间曲线。

【分析】 按刚体平动的定义, 平动刚体上任意一条直线都保持自身方位不变, 因此, 刚体平动时在任何方向都没有转动发生。满足上述条件的刚体, 其上点的轨迹可以是空间曲线。例如, 图 1-2 中的六面体在 $Oxyz$ 直角坐标系中运动时, 底面恒平行 Oxy 面, 正面恒平行 Oyz 面, 侧面恒平行 Oxz 面, 即符合平动条件, 且其上各点的轨迹可为空间曲线, 如螺旋线等。

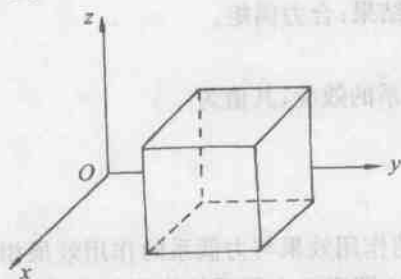


图 1-2

5. 当质点做平面曲线运动时, 它的自然轴形式的运动微分方程是什么?

【考核知识点】 第十一章知识点 7: 质点运动微分方程的自然轴形式。

【考核能力层次】 识记。

【答案】 质点自然轴形式的运动微分方程是

$$\begin{cases} ma_t = F_t \\ ma_n = F_n \end{cases}$$

【分析】 质点自然轴形式的运动微分方程是牛顿第二定律在自然轴上的投影式。式中 $a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$ 为质点的切向加速度; $a_n = \frac{v^2}{\rho}$, 为质点的法向加速度; F_t 、 F_n 分别是作用在质点上各力的合力在切向轴和主法向轴上的投影。

6. 曲柄滑块机构的底座置于粗糙的水平面上, 曲柄 OA 受矩为 m 的力偶作用, 以角速度 ω 转动, 该系统的动量在水平方向的投影是否守恒?

【考核知识点】 第十二章知识点 8: 质点系的动量守恒。

【考核能力层次】 简单应用。

【答案】 不守恒。

【分析】 取 x 轴沿水平面。系统所受的主动动力(各构件的重力及曲柄 OA 上的力偶)满足 $\sum X = 0$ 的条件, 但底座与其支撑面之间有摩擦力存在, 系统的全部外力不满足 $\sum X = 0$ 的条件, 故系统的动量在 x 轴方向的投影不守恒。

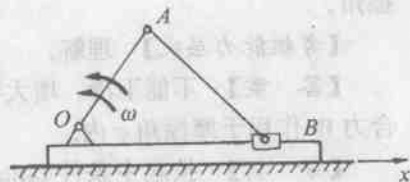


图 1-3

二、填空、作图题(每题 2 分, 共 10 分)

1. 汇交于 O 点的一平面汇交力系的力多边形如图 1-4(a), 所示, 其起点为 a , 终点为 d , 问该力系的合力矢量为()。若在力系的汇交点 O 上, 加一矢量为()的力, 则所得新汇交力系为平衡力系。



图 1-4

【考核知识点】 第二章知识点 1: 力多边形, 求平面汇交力系合力的几何法; 第二章知识点 2: 平面汇交力系平衡的几何条件。

【考核能力层次】 识记。

【答案】 $(R = \vec{ad}); (F_4 = \vec{da})$ 如图 1-4(b) 所示。

【分析】 从力多边形的起点 a 向力多边形的终点 d 引出的将力多边形封闭起来的矢量 $R = \vec{ad}$ 为该汇交力系的合力矢量。

汇交力系平衡的几何条件是: 力系的力多边形是自身封闭的, 即力多边形的第一个力的起点与最后一力的终点重合。所以, 加力 $F_4 = \vec{da}$ 将使由 F_1, F_2, F_3, F_4 四个力所组成的汇交力系成为平衡力系。

2. 作用在刚体上点 A 的力 F 可以等效地平移到该刚体上任意点 B , 但必须附加一个 (), 此附加 ()。

【考核知识点】 第四章知识点 1: 力的等效平移。

【考核能力层次】 识记。

【答案】 (力偶); (力偶的矩等于作用于点 A 的力 F 对点 B 的矩, 即 $m = m_B(F)$)

【分析】 一力在刚体上等效平移后, 变为一力和一力偶。此力矢量与原力矢量相等; 此力偶的矩用原力对新作用点的矩计算。

3. () 相对 () 的运动称为动点的绝对运动。

【考核知识点】 第九章知识点 4: 绝对运动, 相对运动, 牵连运动。

【考核能力层次】 识记。

【答案】 (动点); (定系)

【分析】 动点是指所研究的运动的点; 定系是指固定不动的参考系。根据运动的相对性, “固定不动”也是相对而言, 通常是将地球或固定在地球上的物体作为定系。

4. 平面图形上任意两点的速度在 () 的投影相等。这一结论称为 () 定理。

【考核知识点】 第十章知识点 8: 速度投影定理。

【考核能力层次】 识记。

【答案】 (两点连线上); (速度投影)

【分析】 将求平面图形上点的速度的基点法公式

投影到 A, B 两点的连线上, 就得到速度投影定理。当已知平面图形上任意点 A 的速度求另一点 B 的速度时, 用速度投影定理求解十分方便。

由于刚体上任意两点的距离保持不变, 所以, 无论刚体以何种形式运动, 速度投影定理

均能成立。

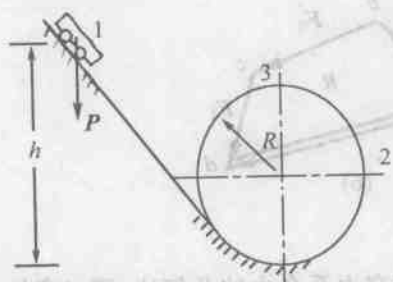


图 1-5

5. 重为 P 的小车在轨道上运动时,其质心的位置依次为 1、2、3,如图 1-5 所示。当小车由位置 1 到位置 2 时重力 P 所做的功 $W_{1,2}=(\quad)$;当小车由位置 2 到位置 3 时重力 P 所做的功为 $W_{2,3}=(\quad)$ 。图中 $h=3R$ 。

【考核知识点】 第十四章知识点 5:重力的功。

【考核能力层次】 简单应用。

【答案】 $(2PR)$; $(-PR)$

【分析】 在一段路程上重力所做功的大小等于重力值与初末位置的高差之积。当初位置高于末位置时,重力做正功;当初位置低于末位置时,重力做负功。

三、单项选择(从每题的四个备选答案中选出一个正确答案。每题 3 分,共 12 分)

1. 空间汇交力系的独立平衡方程数目为()。

- A. 6; B. 4; C. 3; D. 2。

【考核知识点】 第六章知识点 3:空间汇交力系合成的解析法,空间汇交力系的平衡方程。

【考核能力层次】 记识。

【答案】 C。

【分析】 用解析法求得空间汇交力系的合力大小为

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

式中, $R_x = \sum X$; $R_y = \sum Y$; $R_z = \sum Z$ 。平衡的充分与必要条件是 $R=0$,此条件等价于

$$\begin{cases} \sum X = 0 \\ \sum Y = 0 \\ \sum Z = 0 \end{cases}$$

即空间汇交力系有上述三个独立的平衡方程。

2. 设方程 $s=f(t)$ 和 $\mathbf{r}=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}$ 表示同一个点的运动,下列四个等式中正确的是()。

A. $\left| \frac{ds}{dt} \right| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|$;

B. $\left| \frac{d^2s}{dt^2} \right| = \left| \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right|$;

C. $\frac{ds}{dt} = \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}$;

D. $\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2y}{dt^2}$ 。

【考核知识点】 第七章知识点 4、6、8、9:矢量法、坐标法、自然法表示点的运动时,速度、加速度的求法。

【考核能力层次】 简单应用。

【答案】 A。

【分析】 A、B、C、D 中各量的含义及关系如下:

$$\frac{ds}{dt} = v \text{——速度的代数值}$$

$$\frac{dr}{dt} = v \text{——速度矢量}$$

$$|\dot{r}| = |v| = \text{速度的值(大小)}$$

$$\left| \frac{d^2s}{dt^2} \right| = |a_r| \text{——切向加速度的值(大小)}$$

$$\left| \frac{d^2r}{dt^2} \right| = |a| \text{——加速度的值(大小)}$$

$$|a_r| \neq |a|, |\sqrt{a_r^2 + a_n^2}| = |a|$$

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \frac{dy}{dt} = v_y \text{——速度在轴上的投影}$$

$$v \neq v_x + v_y; v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a_x, \frac{d^2y}{dt^2} = a_y \text{——加速度在轴上的投影}$$

$$a_r \neq a_x + a_y$$

3. 以速度 v_1 航行的船上, 有一人以相对速度 v_r 从船尾向船头运动。设人的质量 m , 则此人动量的大小为()。

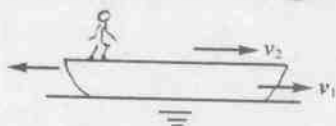
A. $m(v_1 - v_r)$;

B. $m(v_1 + v_r)$;

C. $m\sqrt{(v_1^2 + v_r^2)}$;

D. $\sqrt{m(v_1^2 - v_r^2)}$ 。

($\sqrt{v_1 + v_r}$)



【考核知识点】 第十二章知识点 1: 质点的动量与质点系的动量。

【考核能力层次】 记识。

【答案】 B。

【分析】 将人视为质点, 质点的动量 $K = mv$, 动量的大小则为 $K = mv$ 。其中 v 是质点的绝对速度的值。取人为动点, 船为动系, 按速度合成定理, 人的绝对速度为

$$v = v_r + v_1$$

因相对速度 v_r 与牵连速度 v_1 同向, 所以人的绝对速度的值为

$$v = v_r + v_1$$

且有动量的大小 $K = m(v_1 + v_r)$ 。

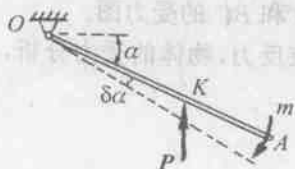


图 1-7

4. 杆 OA 受竖向力 P 及力偶的作用而处于平衡状态。力偶矩 m 为 α 角的函数, 力 P 作用点到轴的距离 $OK = b$, 杆的虚位移为 $\delta\alpha$, 如图 1-7 所示。杆上主动力的虚功之和应为()。

A. $\sum \delta W = m(\alpha) d\alpha + Pbcos\alpha d\alpha$;

B. $\sum \delta W = m(\alpha) \delta\alpha - Pbcos\alpha d\alpha$;

C. $\sum \delta W = \int_0^{\alpha} m(\alpha) d\alpha - Pbcos\alpha d\alpha$;

$$D. \sum \delta W = \int_0^{2\alpha} m(\alpha) d\alpha - Pbs \sin \alpha d\alpha.$$

【考核知识点】第十六章知识点 4: 虚位移的概念; 知识点 7: 虚位移原理在求解平衡问题中的应用。

【考核能力层次】综合应用。

【答案】B。

【分析】虚位移是无限小的位移, 所以主动力在虚位移上所做的功是元功, 即主动力的虚功是元功。

杆 OA 是转动刚体。主动力 P 在虚位移 $\delta\alpha$ 上所做虚功, 应按转动刚体上力的元功的表达式计算, 即

$$\delta W_P = m_o(P) \delta\alpha = -Pbc \cos \alpha \delta\alpha$$

负号表示力 P 对转轴 O 的矩的方向与虚位移 $\delta\alpha$ 的方向相反, 虚功取负值。

矩为 m 的力偶在虚位移 $\delta\alpha$ 上所做虚功, 应按转动刚体上力偶的元功的表达式计算, 即

$$\delta W_m = m(\alpha) \delta\alpha$$

力偶矩 $m(\alpha)$ 的方向与虚位移 $\delta\alpha$ 的方向相同, 虚功取正值。

只当计算力在有限路程上的功时, 才需对元功作积分运算。算虚功不需作积分。

所以, 正确答案只能在 A 或 B 中选择, 且应选 B。

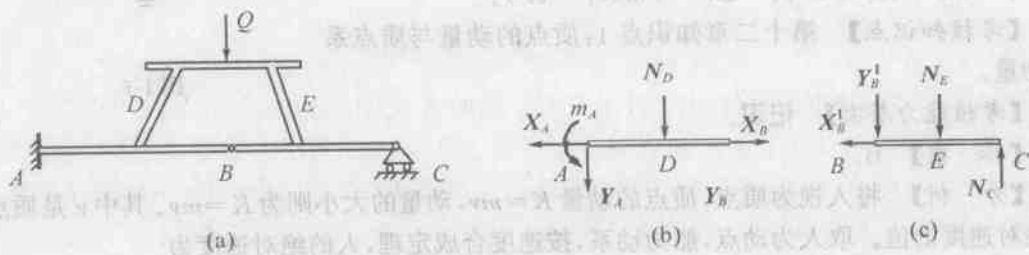


图 1-8

四、作图题(每题 3 分, 共 9 分)

1. 不计摩擦, 根据约束性质画出图 1-8(a) 所示物体系中杆 AB 和 BC 的受力图。

【考核知识点】第一章知识点 10、11、12、13: 常见约束的约束反力, 物体的受力分析, 受力图。

【考核能力层次】综合应用。

【答案】图 1-8(b)、(c) 所示。

【分析】先画出杆 AB 、 BC 的分离体图。此二杆均未受主动力作用, 画受力图时只需画出约束反力。

AB 杆的 A 端是固定端约束, 其反力应为两个正交的分力和一个约束反力偶。 B 端是铰链约束, 其反力应为两个正交的分力。上述各约束反力(力偶)的指向都是假定的, 如图 1-8

(b)所示。 BC 杆的 B 端是铰链约束,其反力是图 1-8(b)中反力 X_B, Y_B 的反作用力,因此两者的方向不能随意假定,必须分别与 X_B, Y_B 反向地画出。 C 端是滚动支座,支力的指向为铅垂向上。所述各约束反力如图 1-8(c)所示。

图 1-8(a)中受主动力 Q 作用的物体 DE ,其 D 端和 E 端分别支撑在杆 AB 和杆 BC 上。由于是光滑接触,杆 AB 的 D 点和杆 BC 的 E 点分别受反力 N_D 和 N_E 的作用,且此二力均指向杆件。

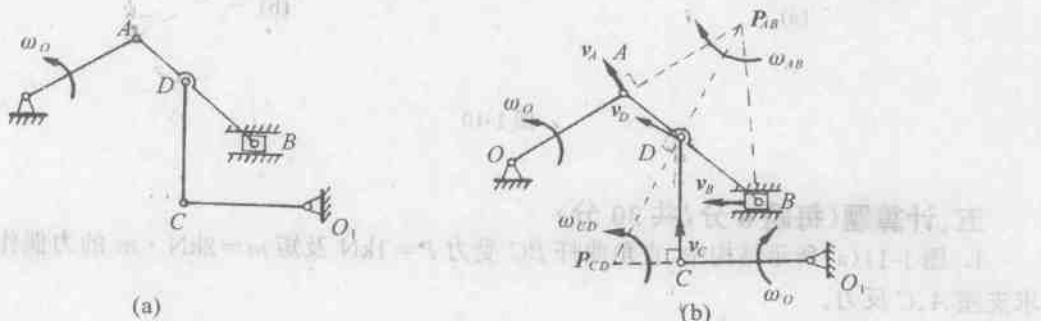


图 1-9

2. 画出图 1-9(a)中做平面运动的构件的速度瞬心的位置,并画出角速度的方向。

【考核知识点】 第十章知识点 9:瞬心的概念;知识点 10:瞬心位置的确定方法。

【考核能力层次】 简单应用。

【答案】 如图 1-9(b)所示。

【分析】 机构中杆 AB 和杆 CD 是平面运动刚体。确定平面运动刚体的瞬心位置,需已知刚体上两点的速度的方位。杆 CD 上只有 C 点的速度方位已知(垂直 CO_1),不可能首先确定其瞬心位置。杆 AB 上 A 点和 B 点速度方位已知,过 A, B 两点分别作其速度方位线的垂线,两垂线的交点 P_{AB} 即为杆 AB 的瞬心。根据 A 点速度的指向,可确定杆 AB 绕瞬心 P_{AB} 转动的角速度 ω_{AB} 的方向。

杆 AB 的瞬心位置和角速度方向确定后,其上 D 点速度的指向随之确定,且 $v_D \perp DP_{AB}$ 。过 C, D 两点分别作其速度方位线的垂线,两垂线的交点 P_{CD} 即为杆 CD 的瞬心。根据 D 点速度的指向,可确定杆 CD 绕瞬心 P_{CD} 转动的角速度 ω_{CD} 的方向。

3. 图 1-10(a)所示机构处于静止平衡状态。在图上画出 A, B, C 三点的虚位移。

【考核知识点】 第十六章知识点 4:虚位移的概念。

【考核能力层次】 简单应用。

【答案】 如图 1-10(b)所示。

【分析】 杆 AC 是平面运动刚体,其虚位移是绕瞬心 P_{AC} 的无限小转角 $\delta \alpha$ 。设给定 $\delta \alpha$ 为逆时针转向, A, B, C 三点的虚位移则如图 1-10(b)所示。各点虚位移都垂直于该点与瞬心 P_{AC} 的连线,虚位移的值与该点到瞬心 P_{AC} 的距离成正比。即

$$\delta r_A \perp AP_{AC}; \quad |\delta r_A| = AP_{AC} \cdot \delta \alpha$$

$$\delta r_B \perp BP_{AC}; \quad |\delta r_B| = BP_{AC} \cdot \delta \alpha$$

$$\delta r_C \perp CP_{AC}; \quad |\delta r_C| = CP_{AC} \cdot \delta \alpha$$

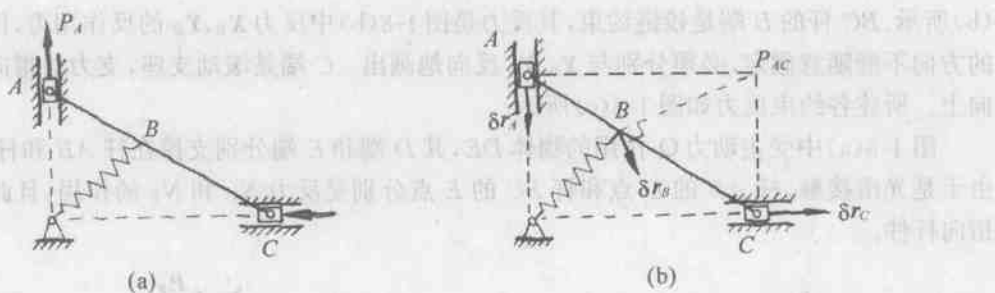


图 1-10

五、计算题(每题 6 分,共 30 分)

1. 图 1-11(a)所示结构中,直角曲杆 BC 受力 $P=1\text{kN}$ 及矩 $m=2\text{kN}\cdot\text{m}$ 的力偶作用。求支座 A、C 反力。

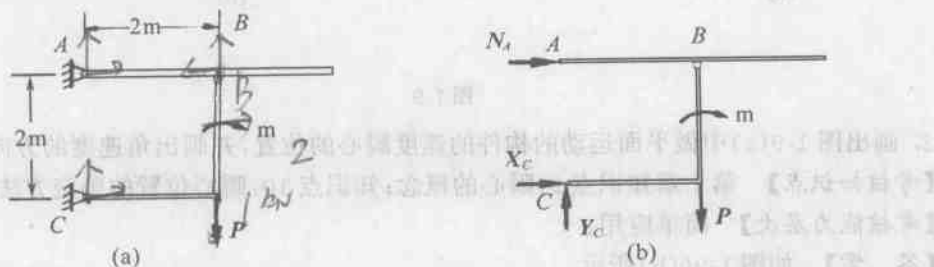


图 1-11

【考核知识点】 第四章知识点 8:平面任意力系平衡方程。

【考核能力层次】 简单应用。

【分析】 结构所受主动力为力 P 和矩为 m 的力偶。固定铰支座 C 的约束反力用正交的两分力 X_C, Y_C 表示。注意到直杆 AB 为二力杆,固定铰支座 A 的反力用 A, B 两铰连线上的力 N_A 表示。铰 B 的反力为内力,受力图上不应画出。结构受平面任意力系作用,有三个未知的约束反力,可用平面任意力系平衡方程求解。

【解答】 取结构为分离体,受力图如图 1-11(b)所示,图中未知约束反力的指向是假定的。列平衡方程并求解如下:

$$\sum m_i(F) = 0: \quad -2N_A - m - 2P = 0$$

$$N_A = -\frac{m}{2} - P = -2\text{kN}$$

$$\sum X = 0: \quad N_A + X_C = 0$$

$$X_C = -N_A = \frac{m}{2} + P = 2\text{kN}$$

$$\sum Y = 0: \quad Y_C - P = 0$$

$$Y_C = P = 1\text{kN}$$

2. 均质直角三角形楔块重 P , 放在三个支垫上。设支垫可视为滚动支座, 求反力。楔块

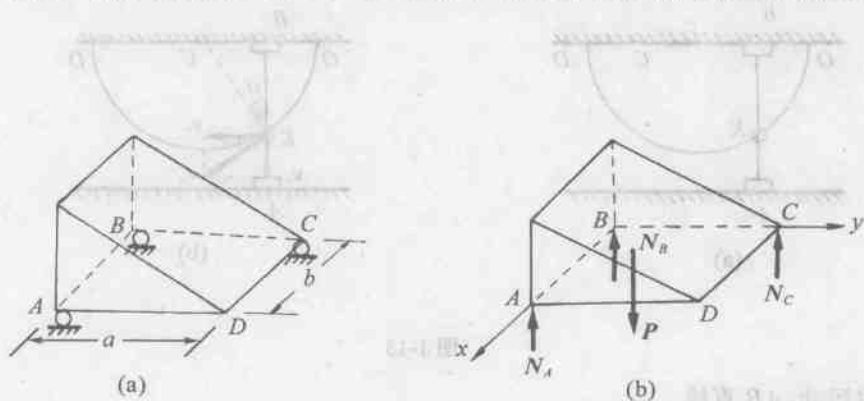


图 1-12

尺寸如图 1-12(a) 所示。

【考核知识点】 第三章知识点 14; 空间平行力系的平衡方程。

【考核能力层次】 简单应用。

【分析】 支座 A 、 B 、 C 处的反力方向同为铅垂向上, 与重力 P 组成空间平行力系。可用空间平行力系三个独立的平衡方程求解 N_A 、 N_B 、 N_C 三个未知力。

【解答】 取楔块为研究对象, 受力图如图 1-12(b) 所示。其中重力 P 与 x 轴的距离为 $a/3$ 。与 y 轴的距离为 $b/2$ 。

列平衡方程并求解如下:

$$\sum m_x(F) = 0: N_C a - \frac{1}{3} P a = 0$$

$$N_C = P/3$$

$$\sum m_y(F) = 0: -N_A b + \frac{1}{2} P a = 0$$

$$N_A = P/2$$

$$\sum Z = 0: N_A + N_B + N_C - P = 0$$

$$N_B = P/6$$

在对轴取矩方程中, 力对轴的矩的正负号按右手法则给定。

3. 小环 K 套在半径 $OC = r = 12\text{ cm}$ 的固定半圆形环与杆 AB 上, 杆 AB 以速度 3 cm/s 向右平动。求当 $OB = BC = 6\text{ cm}$ 时小环 K 的相对速度和绝对速度。

【考核知识点】 第九章知识点 7; 点的速度合成定理。

【考核能力层次】 综合应用。

【分析】 在图 1-13(a) 所示机构中, 已知刚体 AB 平动的速度, 求动点 K 相对于运动刚体 AB 及地面(半径为 r 的半圆环)的速度, 属点的合成运动问题。

【解答】 动点: 小环 K ; 动系: 平动刚体 AB ; 定系: 半径为 r 的大圆环 C 。

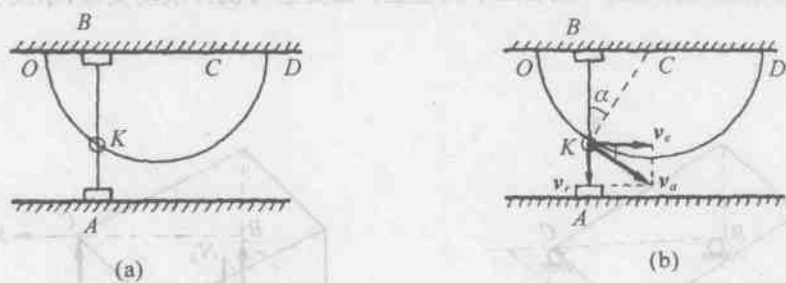


图 1-13

相对运动: AB 直线。

绝对运动: 半径为 r 的半圆曲线。

牵连运动: 水平直线平动。

相对速度 v_r : 沿 AB 直线, 大小待求。

绝对速度 v_a : 沿半径为 r 的半圆曲线的切线, 即 $v_a \perp KC$, 大小待求。

牵连速度 v_e : 按牵连速度的定义, 本题中 v_e 为动系 AB 上的 K 点的速度, 因动系作平动, v_e 为动系平动的速度, 大小为 3 cm/s 。

做速度四边形如图 1-13(b) 所示。绝对速度 v_a 位于速度四边形的对角线位置。

求未知量

$$v_a = v_e / \cos \alpha = 3 / \cos 30^\circ = 3.46 \text{ cm/s}$$

$$v_r = v_e / \tan \alpha = 3 \tan 30^\circ = 1.73 \text{ cm/s}$$

4. 质量 $m = 2 \text{ kg}$, 半径 $R = 0.1 \text{ m}$ 的均质皮带轮上, 皮带的拉力分别为恒力 P_1 和 P_2 。今

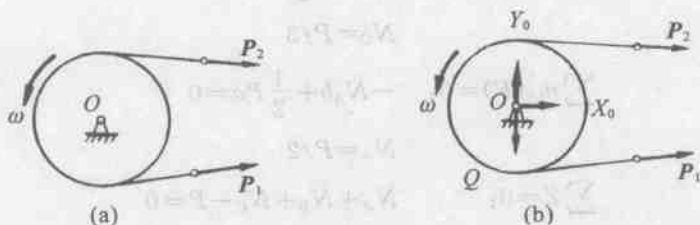


图 1-14

测得 $P_1 = 100 \text{ N}$, 当皮带轮转过 S 圈时, 其角速度便由零增加到 $100\sqrt{\pi} \text{ rad/s}$, 求皮带拉力 P_2 。

【考核知识点】 第十三章知识点 12: 质点系对固定轴的动量矩定理或第十四章知识点 15: 质点系动能定理的微、积分形式。

【考核能力层次】 简单应用。

【分析】 图 1-14(a) 所示皮带轮的受力分析如图 1-14(b) 所示。图(b)中轴 O 的反力

X_0, Y_0 在运动过程中不做功, 做功的力只有 P_1 和 P_2 。从轮的运动情况看, 轮在初位置的角速度已知, 轮转 5 圈后, 末位置的角速度也已知。于是, 知轮的初动能、末动能和运动的路程, 可用动能定理求解做功的未知力 P_2 。

受力图(b)还表明, 未知的反力 X_0, Y_0 对轴 O 的矩为零, 只有力 P_1 和 P_2 对轴 O 有矩。因为力 P_1 和 P_2 为恒力, 可由动量矩定理判定轴 O 的角加速度 ϵ 为常量。由题中给定的初始和最终的角速度值以及转过的角度, 则可确定常角加速度 ϵ 。于是, 知轮的动量矩的导数, 可用动量矩定理求解未知力 P_2 。

綜上述, 本题用动力学定理的解答有二。

【解答一】 用动能定理求解。

初动能 $T_1=0$, 皮带轮的末动能 $T_2=\frac{1}{2}J_0\omega^2$ 。按动能定理的积分式有

$$\frac{1}{2}J_0\omega^2 = m_0(P_1)\varphi + m_0(P_2)\varphi$$

式中: J_0 为轮相对转轴的转动惯量:

$$J_0 = \frac{1}{2}mR^2 = \frac{1}{2} \times 2 \times (0.1)^2 = 0.01 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

ω 为轮的末角速度, $\omega = 100\sqrt{\pi} \text{ rad/s}$ 。等式右端的两项分别为力 P_1 和力 P_2 的功, 是按转动刚体上恒力的功的计算式给出的。所以, 有

$$\frac{1}{2} \times 0.01 \times 10000\pi = 100 \times 0.1 \times 10\pi - 0.1P_2 \times 10\pi$$

解得 $P_2 = 50 \text{ N}$ 。

【解答二】 用动量矩定理(刚体定轴转动微分方程)求解。

按刚体定轴转动微分方程

$$J_0\epsilon = M_0 = m_0(P_1) - m_0(P_2)$$

式中: ϵ 为轴 O 转动的常角加速度。由

$$\epsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \omega \frac{d\omega}{d\varphi}$$

有

$$\int_0^{10\pi} \epsilon d\varphi = \int_0^{100\sqrt{\pi}} \omega d\omega$$

$$\epsilon = 500 \text{ rad/s}^2$$

轮 O 的转动微分方程为

$$0.01 \times 500 = 100 \times 0.1 - 0.1P_2$$

解得

$$P_2 = 50 \text{ N}$$

5. 电梯沿铅直方向上升, 速度为 v , 加速度为 a , 方向如图 1-15(a) 所示。一质量为 m 的物体放于电梯底板上, 用达朗伯原理求电梯底板对物体的支持力。

【考核知识点】 第十五章知识点 2: 质点的达朗伯原理。

【考核能力层次】 简单应用。

【分析】 将质量为 m 的重物视为质点, 它以加速度 a 作直线运动。本题为已知质点的运动, 即已知质点的惯性力, 求约束反力的问题。

【解答】 取质点为研究对象。所受主动力为重力 P ; 约束反力为电梯底板对质点的支持力 N 。假想施加惯性力 F^i , 其方向与加速度 a 的方向相反, 值为 $F^i = ma$ 。

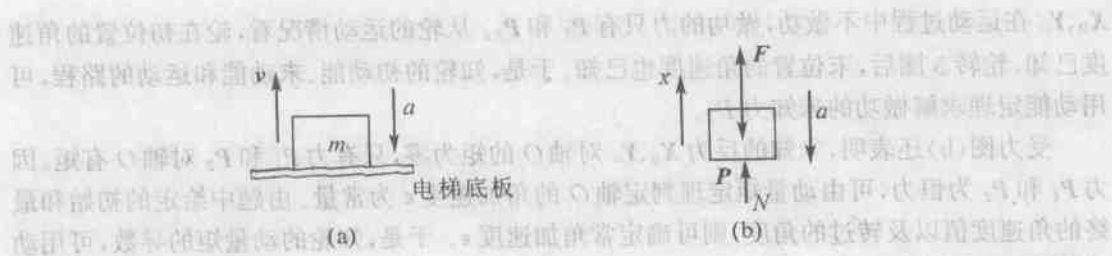


图 1-15 二质点系的质点学式使用图本, 按质点

按质点达朗伯原理, 有

$$P + N + F' = 0$$

写出上式在 x 轴上的投影式:

$$-mg + N + ma = 0$$

其中, ma 为惯性力 F' 在 x 轴上的投影。解得 $N = m(g - a)$ 。

六、计算题(每题 9 分, 共 27 分)

1. 在图 1-16(a)所示结构中, 力 $P = 4 \text{ kN}$, 求固定端 D 的约束反力。

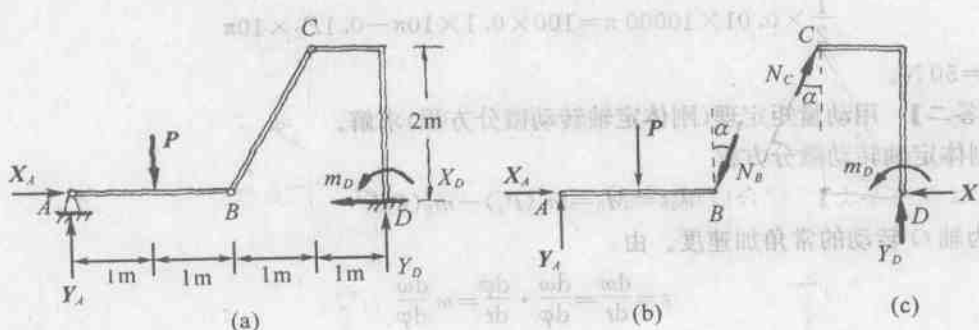


图 1-16

【考核知识点】 第四章知识点 11: 物体系平衡问题。

【考核能力层次】 综合应用。

【分析】 画出结构整体和构件 AB 、 CD 的受力图, 分别如图 1-16(a)、(b)、(c) 所示。

如要从结构整体的受力图 1-16(a) 上求解固定端 D 的约束反力, 因受力图(a) 上有五个未知力, 却只有三个独立的平衡方程, 必须事先将固定铰支座 A 的约束反力 X_A 、 Y_A 求出。反力 X_A 、 Y_A 还作用在杆 AB 的受力图(b) 上, 杆 AB 上只有三个未知力, 反力 X_A 、 Y_A 可以求出。于是, 求解本题的第一个方案是: 先研究杆 AB , 求出反力 X_A 和 Y_A , 再研究结构整体, 求出固定端 D 的约束反力。

如要从杆 BC 的受力图(c) 上求解固定端 D 的约束反力, 因受力图(c) 上有四个未知力, 却只有三个独立的平衡方程, 必须事先将二力杆 BC 的约束反力 N_C 求出。反力 N_C 与反力 N_B 等值反向, 而 N_B 可从杆 AB 的受力图(b) 上求出。于是, 求解本题的第二个方案是: 先研