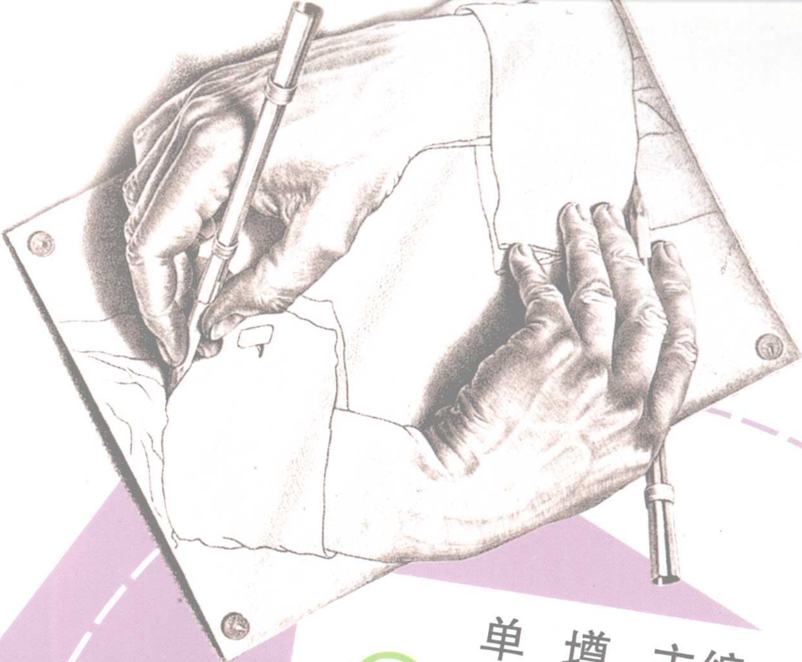
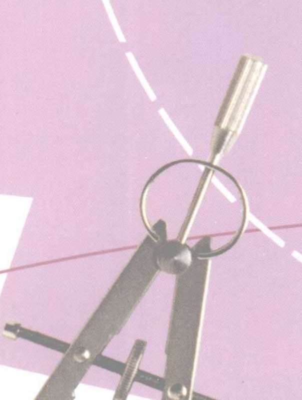


单 墫 主编

数学奥林匹克
命题人讲座

数列与数学归纳法

单 墫 著



上海科技教育出版社

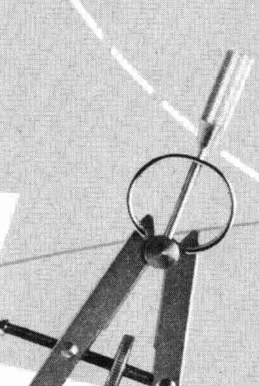
单 墫 主编

数学奥林匹克

命题人讲座

数列与数学归纳法

单 墫 著



上海科技教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

数列与数学归纳法/单墫著. 一上海:上海科技教育出版社,2009.1

(数学奥林匹克命题人讲座/单墫主编)

ISBN 978-7-5428-4641-9

Ⅰ.数… Ⅱ.单… Ⅲ.①数列—中学—教学参考资料 ②数学归纳法—中学—教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第106307号

数学奥林匹克命题人讲座
数列与数学归纳法
单 墫 主编
单 墫 著
上海世纪出版股份有限公司
上 海 科 技 教 育 出 版 社 出版发行
(上海市冠生园路 393 号 邮政编码 200235)
全国新华书店经销 上海市印刷七厂有限公司印刷
开本 890×1240 1/32 印张 9.75 字数 253 000
2009 年 1 月第 1 版 2009 年 1 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-5428-4641-9/O·569
定价:22.00 元

丛书序

读书,是天下第一件好事。

书,是老师。他循循善诱,传授许多新鲜知识,使你的眼界与思路大开。

书,是朋友。他与你切磋琢磨,研讨问题,交流心得,使你的见识与能力大增。

书的作用太大了!

这里举一个例子:常庚哲先生的《抽屉原则及其他》(上海教育出版社,1980年)问世后,很快地,连小学生都知道了什么是抽屉原则。而在此以前,几乎无人知道这一名词。

读书,当然要读好书。

常常有人问我:哪些奥数书好?希望我能推荐几本。

我看过的书不多。最熟悉的是上海的出版社出过的几十本小册子。可惜现在已经成为珍本,很难见到。幸而上海科技教育出版社即将推出一套"数学奥林匹克命题人讲座"丛书,帮我回答了这个问题。

这套丛书的书名与作者初定如下:

陆洪文	《解析几何》
施咸亮	《代数函数与多项式》
熊　斌	《函数迭代与函数方程》
陈　计　季潮丞	《代数不等式》
曹　纲　叶中豪	《重心坐标与平面几何》
冯志刚	《初等数论》
单　墫	《集合与对应》《数列与数学归纳法》
刘培杰	《组合问题》
任　韩　田廷彦	《图论·组合几何》

唐立华　　　　　《向量与立体几何》

邵嘉林　　　　　《复数·三角函数》

显然,作者队伍非常之强。老辈如陆洪文先生、施咸亮先生都是博士生导师。他们不仅在代数数论、函数逼近等领域的研究上取得了卓越的成绩,而且十分关心数学竞赛。中年如陈计先生于不等式,叶中豪先生于平面几何,都是国内公认的首屈一指的专家。其他各位也都是当下国内数学奥林匹克的领军人物。如熊斌、冯志刚是2008年IMO中国国家队的正副领队、中国数学奥林匹克委员会委员。他们为我国数学奥林匹克做出了重大的贡献,培养了很多的人才。2008年9月14日,"国际数学奥林匹克研究中心"在华东师范大学挂牌成立,担任这个研究中心主任的正是多届IMO中国国家队领队、华东师范大学数学系副教授熊斌。又如邵嘉林先生,他指导过的张成同学获得了第49届IMO的金牌。

这些作者有一个共同的特点:他们都为数学竞赛命过题。

如:

设数 a 具有以下性质:对于任意四个实数 x_1,x_2,x_3,x_4,总可以取整数 k_1,k_2,k_3,k_4,使得

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}((x_i-k_i)-(x_j-k_j))^2\leqslant a,$$

求这样的 a 的最小值。

这是施咸亮先生供给我国国家集训队选拔的试题。

又如:

设 $S=\{1,2,\cdots,2005\}$。若 S 中任意 n 个两两互素的数组成的集合中都至少有一个素数,试求 n 的最小值。

这是唐立华先生供给西部数学奥林匹克的试题。

叶、熊、冯等几位先生供给竞赛的题举不胜举,这里就不罗列了。

命题人讲座,是田廷彦先生的创意。

命题人写书,富于原创性。有许多新的构想、新的问题、新的解法、新的探讨。新,是这套丛书的一大亮点。读者一定会从这套丛书中学到很多新的知识,产生很多新的想法。

新,会不会造成深、难呢?

这套书当然会有一定的深度，一定的难度。但作者是命题人，充分了解问题的背景(如刘培杰先生就曾专门研究过一些问题的背景)，写来能够深入浅出，"百炼钢化为绕指柔"。另一方面，倘若一本书十分浮浅，一点难度没有，那也就失去了阅读的价值。

读书，难免遇到困难。遇到困难，不能放弃。要顶得住，坚持下去，锲而不舍。这样，你不但读懂了一本好书，而且也学会了读书，享受到读书的乐趣。

书的作者，当然要努力将书写好。但任何事情都难以做到完美无缺。经典著作尚且偶有疏漏，富于原创的书更难免有考虑不足的地方。从某种意义上说，这种不足毋宁说是一种优点:它给读者留下了思考、想象、驰骋的空间。

如果你在阅读中，能够想到一些新的问题或新的解法，能够发现书中的不足或改进书中的结果，那就是古人所说的"读书得间"，值得祝贺!

我们欢迎各位读者对这套丛书提出建议与批评。

感谢上海科技教育出版社，特别是编辑卢源先生，策划组织编写了这套书。卢编辑认真把关，使书中的错误减至最少，又在书中设置了一些栏目，使这套书增色很多。

单　墫

2008 年 10 月

前　言

数列是重要的数学内容,数学归纳法是重要的数学方法。它们是离散与连续间的纽带,初等与高等间的桥梁。

我们希望通过对它们的介绍,能使读者了解数学,感受数学,进而喜爱数学,发现数学。

本书共有十讲。前六讲大致在中学课程的内容上略作延伸,可用作高考的准备。后四讲为课外内容,可用以应对竞赛。但本书决不只是为了考试、竞赛而写,我们的目的是普及数学,传播数学。

数学是思维的科学。因此本书的重点放在培养思维能力上,希望和广大读者一同来学数学、做数学。由简单、具体的例子入手,发现或猜出结果,并进而用严谨的推理证明或推翻自己的猜想。为了做数学,书中提供了大量的习题,供读者选用。习题均有我们所拟的解答,供作参考。

阅读能力也很重要。因此,除了正文之外,我们还拟了4篇阅读材料,供读者选读。

特别说明:本书中所谓自然数及符号N均指正整数,不包括“0”。

目　录

第一讲 数　列

§1.1 数列的定义

知识桥

按照一定规律排列的一列数称为数列.例如:

1. 按照从小到大的顺序排列,从 1 开始的全体自然数

$$1,2,3,4,5,\cdots \tag{1}$$

称为自然数数列.

2. 按照从小到大的顺序排列,从 2 开始的全体正偶数

$$2,4,6,8,10,\cdots \tag{2}$$

称为正偶数数列.

3. 按照从小到大的顺序排列,从 1 开始的全体正奇数

$$1,3,5,7,9,\cdots \tag{3}$$

称为正奇数数列.

4. 按照从小到大的顺序排列,从 2 开始的全体(正)素数

$$2,3,5,7,11,13,\cdots \tag{4}$$

称为素数数列.

5. 按照从小到大的顺序排列,从 1 开始的全体平方数(自然数的平方)

$$1,4,9,16,25,\cdots \tag{5}$$

称为平方数数列.

6. 按照从大到小的顺序排列,从 1 开始的全体自然数的倒数

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\cdots \tag{6}$$

称为倒数数列.

数列中的数,称为数列的项,第 n 个数称为第 n 项.第 1 项也称为

首项.

对于一个数列,我们希望知道:它的项是哪些数(这个数列由哪些数组成)? 这些数是怎样排列的?

上面的数列(1)～(6),对这两个问题都明确地给出了答案.但如果仔细推敲,其中的(4)还存在疑问:给定一个自然数,如何断定它是不是(4)中的一项(即它是不是素数)? 如果是(4)中的一项(是素数),那么它是第几项? 这些关于素数的问题是非常深奥的.

定义数列还有两种常用的方式.一是给出它的通项(即一般项).上面的数列(1)、(2)、(3)、(5)、(6)的通项分别为

$$a_n=n,\ n=1,\ 2,\cdots, \tag{7}$$

$$a_n=2n,\ n=1,\ 2,\cdots, \tag{8}$$

$$a_n=2n-1,\ n=1,\ 2,\cdots, \tag{9}$$

$$a_n=n^2,\ n=1,\ 2,\cdots, \tag{10}$$

$$a_n=\frac{1}{n},\ n=1,\ 2,\cdots. \tag{11}$$

一个数列,可以记为$\{a_n\}$,而表示 a_n 的公式(如(7)～(11))称为通项公式.

虽然我们很希望知道每一个数列的通项公式,但有些数列,如(4),却没有形式简明的通项公式.

除了给出通项外,一个数列也可以通过开始的几项及递推公式来确定,例如定义$\{a_n\}$为:

$$a_1=a_2=1, \tag{12}$$

$$a_{n+1}=a_n+a_{n-1}, \tag{13}$$

这个数列称为斐波那契数列.斐波那契(L. Fibonacci,约 1170—1250)是意大利数学家莱奥纳尔多的笔名.

可以求出斐波那契数列的通项公式(参见 8.2 节)为

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right),n=1,2,\cdots. \tag{14}$$

通项公式与递推公式各有优点.例如斐波那契数列,由递推公式(13)及初始条件(12),不难推出数列的前若干项

$$1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,\cdots \tag{15}$$

并且容易得出数列的每一项都是正整数.而由通项公式(14),则可以知道数列是无界的,第 n 项的大小约是 $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}$.

训练营

例 1 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为

$$a_n=n+(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5), \tag{16}$$

写出它的前 6 项.

解 $a_1=1, a_2=2, a_3=3, a_4=4, a_5=5, a_6=6+5\times4\times3\times2\times1=126$.

例 2 写出以下数列的一个可能的通项公式,使它的前 4 项分别是:

(i) 1,2,3,4;

(ii) 1,−1,1,−1.

解 (i) $a_n=n$.

(ii) $a_n=(-1)^{n-1}$.

点评 严格来说,根据有限多项来推断其他的项或导出通项公式,是一件不可能的事.以(i)为例,它很可能是自然数数列(1).但也可能是例 1 中的(16),或者是

$$a_n=n+(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)f(n), \tag{17}$$

其中 $f(n)$ 是一个 n 的多项式.

通常,我们是在众多(实际上有无限多种)可能中,选取一种最简单、最合理的可能作为它的通项公式.

根据有限多项来推断其他的项或找出"规律",这种方法是归纳法.

通过观察、归纳、分析,找出一个简单、合理的规律,

需要一定的能力，这种能力需要通过练习加以培养（下一节我们将要举出一些例子作为练习）.

当然，这种归纳是不完全归纳法，不能完全相信. 而且，上面已经指出，可能有多种通项公式，所找出的只是较为简单的一种.

§1.2 通项与递推关系

本节首先讨论数列的通项公式(当然,在众多可能中,应尽量找出最简单的一种).

训练营

例 1 写出下面数列的一个通项公式,使它的前 6 项分别为下列各数:

(i) 1,4,7,10,13,16,…;

(ii) 1,2,4,8,16,32,…;

(iii) 3,3,3,3,3,3,…;

(iv) 1,0,1,0,1,0,…;

(v) 2,6,12,20,30,42,….

解 (i) $a_n=3n-2=1+3(n-1)$.

点评 这是下一讲要讨论的等差数列.

(ii) $a_n=2^{n-1}$.

点评 这是第三讲要讨论的等比数列.

(iii) $a_n=3$.

点评 这是常数数列.

(iv) $a_n=\dfrac{1-(-1)^n}{2}$.

点评　如果不要求用一个统一的式子，分开表示成

$$a_n=\begin{cases}1, & n\text{ 为奇数},\\ 0, & n\text{ 为偶数}\end{cases}$$

也非常简单明了.

更一般的数列

$$a,b,a,b,a,b,\cdots$$

的通项公式为

$$a_n=\frac{a+b}{2}-(-1)^n\cdot\frac{a-b}{2}=\frac{1-(-1)^n}{2}\cdot a+\frac{1+(-1)^n}{2}\cdot b.$$

(v) $a_n=n(n+1)$.

很多数列的通项公式由一些简单数列的通项公式复合而成.

例 2　写出以下数列的通项公式：

(i) $-1,4,-9,16,-25,64,\cdots$;

(ii) $2,3,5,9,17,33,\cdots$;

(iii) $2,0,6,0,10,0,14,0,\cdots$;

(iv) $0,\dfrac{3}{5},\dfrac{8}{10},\dfrac{15}{17},\dfrac{24}{26},\dfrac{35}{37},\cdots$;

(v) $\dfrac{1}{2},\dfrac{7}{6},\dfrac{25}{12},\dfrac{61}{20},\dfrac{121}{30},\dfrac{211}{42},\cdots$.

解

(i) $a_n=(-1)^n\cdot n^2$.

(ii) $a_n=2^{n-1}+1$.

(iii) $a_n=(1-(-1)^n)\cdot n$.

(iv) $a_n=\dfrac{n^2-1}{n^2+1}$.

点评 本题应将分子、分母分开考虑.题中$\frac{8}{10},\frac{24}{26}$等均不约分,正是为了保持分子、分母各自的规律.

(v) 分母正是例1中的(v).如将各项写成带分数,数列即

$$\frac{1}{2},1\frac{1}{6},2\frac{1}{12},3\frac{1}{20},4\frac{1}{30},5\frac{1}{42},\cdots$$

所以 $a_n=(n-1)+\frac{1}{n(n+1)}$.

数列的递推公式往往可以通过观察、归纳得到(当然只是最简单的一种).

例3 求数列

$$2,3,7,18,47,123,322,\cdots$$

的连续项之间的关系.

解 $a_n=3a_{n-1}-a_{n-2}$.

例4 $\{a_n\}$的前几项是

$$1,5,34,233,\cdots$$

试找出$\{a_n\}$的递推公式,计算 $a_na_{n+1}-1$,并猜测 $a_na_{n+1}-1$ 与 a_n+a_{n+1} 的关系.

解 递推公式为 $a_{n+1}=7a_n-a_{n-1}$.

数列 $a_na_{n+1}-1$ 的前三项分别为

$$4,169,7921,$$

即 $2^2,13^2,89^2$.而 a_n+a_{n+1} 的前三项分别为

$$6,39,267,$$

于是猜测