



面向 21 世纪 课 程 教 材  
Textbook Series for 21st Century

# 概 率 论 与 数 理 统 计

## 修 订 版

郝志峰 谢国瑞 汪国强 编



高 等 教 育 出 版 社  
HIGHER EDUCATION PRESS

面向 21 世纪课程教材  
Textbook Series for 21st Century

# 概率论 与数理统计

修订版

郝志峰 谢国瑞 汪国强 编



高等教育出版社  
HIGHER EDUCATION PRESS

## 内容提要

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材,是大学本科(非数学类)各专业概率论与数理统计课程的教材,内容包括基本概念、基本定理、离散型随机变量、连续型随机变量、多维随机变量、数理统计的基本概念、统计推断的基本问题等7章,并附有习题解答。全书取材的广深度合适,注重联系应用,强调数学建模思想的融入,符合大学本科教学对本门课程的教学要求与实际需要。本书的起点较低、知识系统、详略得当、举例丰富、讲解透彻、难度适宜,内容展开的思路清晰,易教易学,有利于培养学生用概率统计的思想方法去分析问题、解决问题,并注意激发学生学习的兴趣和主动性。

本书可作为普通高等学校非数学类专业概率论与数理统计课程教材使用。

## 图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/郝志峰,谢国瑞,汪国强编. —2  
版(修订版). —北京:高等教育出版社,2009.2

ISBN 978 - 7 - 04 - 026123 - 3

I. 概… II. ①郝…②谢…③汪… III. ①概率  
论 - 高等学校 - 教材②数理统计 - 高等学校 - 教材  
IV. O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第207807号

策划编辑 于丽娜 责任编辑 高尚华 封面设计 张楠 责任绘图 郝林  
版式设计 马敬茹 责任校对 王雨 责任印制 朱学忠

---

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010 - 58581118
社 址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800 - 810 - 0598
邮政编码	100120	网 址	<a href="http://www.hep.edu.cn">http://www.hep.edu.cn</a>
总 机	010 - 58581000		<a href="http://www.hep.com.cn">http://www.hep.com.cn</a>
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	<a href="http://www.landaco.com">http://www.landaco.com</a>
印 刷	保定市中国画美凯印刷有限公司		<a href="http://www.landaco.com.cn">http://www.landaco.com.cn</a>
		畅想教育	<a href="http://www.widedu.com">http://www.widedu.com</a>
开 本	787 × 960 1/16	版 次	2002年8月第1版
印 张	17.25		2009年2月第2版
字 数	310 000	印 次	2009年2月第1次印刷
		定 价	18.90元

---

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 26123 - 00

## 修订版前言

本书初版作为普通高等教育“九五”国家教委重点教材、面向 21 世纪课程教材于 2002 年出版。这些年来,本书的编写指导思想及教材内容的选取与处理方面的特点(见第一版前言)逐步得到不少师生及同行们的认可,收到了很好的反响,同时编者也在实践编写指导思想中积累了新的经验。借本书被列入普通高等教育“十一五”国家级规划教材的机会,我们对原书作了修订,力求使本书能更好地符合大学工科、经济、管理等专业对概率论与数理统计课程的教学需要。

概率论与数理统计作为高等学校本科数学基础课程中的一门重要的必修课,是进一步学习许多相关的重要应用数学分支(如随机过程、多元统计、抽样技术等)的必备基础。因此,作为一门 30—50 学时左右的基础课而言,一方面,希望能较好体现该课程的教学基本要求,保持教学内容的稳定;另一方面,希望能够反映发展,体现学科的生动面与广泛应用,以适应高等教育大众化及时代发展带来的新要求。这次的修订版试图把握好这一平衡,吸收与借鉴国内外教材编写的成功经验,根据实际情况和需要,按照学生的认识规律,从满足应用的角度来介绍概率论与数理统计,力求获得较宽的适用面。修订版在基本保持原书体系、格局下,对特别是原第 4 章后的内容作了较多增补、调整与删节,使全书的教学内容更为充实,结构更趋合理,力求能更好体现“概率论与数理统计”课程的教学要求,以期通过使用本教材进行教学能更好地培养学生分析问题、解决问题的思想与方法。教材继续保持数学概念、理论的严密,注意提高数学素养,力求与横向的数学必修课高等数学、线性代数建立一些结合点,一起构筑好大部分学生的数学基础。

本书以使用教材的师生为本,编排科学而有特色的教材体系,有助于实现“易教易学”,在展开教学内容时,时刻注意培养学生的思维能力、习惯并调动其学习兴趣及主动性。例如在概率论中,强调了条件概率的意义,说明一事件的发生对概率估计产生的影响,这对掌握概率论而言是有重要意义的。把离散型随机变量与连续型随机变量分章论述,使得许多概念(如分布、数字特征)变得容易理解,同时,教材中介绍贝叶斯决策的示例,也开阔了师生解决随机运筹问题的思路,而避免了传统教材中概率是专为数理统计打基础的片面看法。这样的写法,使得本教材承上启下的作用也可显现出来,既可作为后续课程的桥梁,又

可借此回顾、总结、提高前面所学的内容。

此次再版总体上考虑三大方面:(1) 将数学基础课程教材作为系列教材出版,除《概率论与数理统计》之外,还包括《高等数学(一元微积分)》、《高等数学(多元微积分)》、《线性代数》,体现对学生在概率论与数理统计方面的基本数学素养的要求,加强概率统计与微积分、线性代数的相互引用及联系,有效地激发学生的学习兴趣;(2) 体现将“数学建模”融入主要数学基础课的思想,将原教材的应用特色再提高一个层次,结合案例,使学生较早接触数学建模的思想和方法,促进学生学习概率论与数理统计更大的积极性。通过本教材的使用,促进学生更好地学习、掌握概率论与数理统计主干课程,体会将来会用到的随机数学的思想和方法,在一定程度上学到一些数学建模的思想和方法;(3) 从发现问题、提出问题的角度组织教材,培养学生的创新思想,把原教材中分析问题、解决问题的过程提高一个层次。主要修改包括以下几个方面:① 增加由实际问题导致出现“混合型”随机变量(既不是离散型,也不是连续型)的示例(第4章例18,习题4题27);② 增加用全概率公式及其思考方式,分析、解决问题的示例,以强化对有关方法的理解与掌握(第3章例13、例16,第5章例22等);③ 增加用分解随机变量为和的方法求数学期望(第5章例11),利用方差计算协方差、相关系数(第5章例15)等示例,使数字特征的性质及利用性质进行计算的内容显得更为丰满;④ 加强对多维正态分布及有关知识的介绍,对两个正态分布变量不相关与独立等价的命题,分别用证明及反例的形式,作了较以前更为详尽的说明,并介绍一些值得关注的相关知识(第5章例18、例19及其后的注);⑤ 将以前分散处理的中心极限定理、大数定律的内容,集中在5.6节中介绍,引入随机变量列依概率收敛的概念,删去原4.3节“在可靠性理论上的应用”一节;⑥ 对数理统计部分的修订,致力于对基本概念及基础知识的介绍更为集中、精练,而对如假设检验中的原假设的提出,两类错误相互制约的分析这样的基本问题,作了较前更为清晰的说明;并将原来分成两章的参数估计、假设检验合并成目前的一章,即第7章“统计推断的基本问题”;⑦ 对发现的笔误、印刷错误给予更正。

这次修订工作是在华南理工大学和西交利物浦大学两校领导的大力支持下完成的。感谢华南理工大学理学院和西交利物浦大学数理教学中心(MPTC)为我们修订这本教材所创造的条件和给予的支持,感谢西交利物浦大学数理教学中心(MPTC)各位老师给我们的帮助,以及两所学校教务部门对本书给予的关心和帮助。同时,广东工业大学应用数学学院的领导,以及李大红、郝同壬教授也实际参与了这一次的修订工作,他们提出的不少意见都起了重要作用。

这次修订工作虽经过编者竭力而为,但终因时间仓促又囿于编者的水平与见闻,留存书中的错、漏、不妥之处仍在所难免,热诚欢迎各位教师,特别是使用本书作为学习用书或参考用书的学生们,对本书提出批评、建议。

编者

于广州大学城

2008年10月

## 第一版前言

编写本书的目的是为(非数学专业)大学生提供一本“概率论与数理统计”课程的教材,全书由目录所示的8章组成,前五章是概率论部分,后三章是数理统计引论部分。

熟悉内容的读者从目录可以看出本书与许多概率统计教材的一些不同之处,本书的第1章和第2章通常是被作者们处理在同一章内的,而许多教材独立成章的“数学期望”(或数字特征)、“极限定理”则被本书分散到第3章至第5章去了。这里,要对这两点稍作说明,供使用本书的师生们参考,并请多予批评、指正。

本书第1章的中心是阐明概率的意义,在解释频率与概率的区别与联系中,阐发了统计概率的思想,并用古典概率、几何概率等直接计算予以强化。另外,这里也直面主观概率,指出在许多重要应用中(特别涉及经济问题、社会科学等领域)需以主观概率概念来解释,对于非数学专业学生一般不甚关心的公理化概率论,在此让其似影子般地闪现了一下,但还是点明了它的意义所在,这样的处理为教师留出了较大的余地,既可以一闪而过,又可在认为需予介绍时辅以适当的材料而略作展开。第2章的主题是概率计算最重要的法则,是全书有用的概率间接算法,不论对统计概率、主观概率,抑或在公理化的概率论中,这些法则都是很有用的,这里的全概率公式、贝叶斯公式等不仅是一套公式,也反映了解决问题的正确思路,同时也显现了互斥、独立、条件概率等重要概念的用处。这两个主题构成了演绎全书的基础。从第3章引入随机变量、概率分布的概念之后,对涉及随机的问題就有了更正确的提法,诸如对于像“某射手要对一目标进行3次独立的射击”这样的事,就不会再提出“他将命中几次?”的问题,而将提成“他命中次数的概率分布是什么?”这从一个侧面体现了“随机意识”的增强。但是,在得到了概率分布的信息后,怎样利用?怎样解决相关的问题?处理确定性问题的思想方法是否还有用?这些问题就自然地产生,在此适时地引入“数学期望”的概念能较好地解决这些问题。“随机意识”的提高是个素质问题;提出问题、解决问题的能力既是能力问题,也是素质问题,这些都需要在实践中反复锤炼、提高。在本书中将这些内容分散到几个章节中去处理,不仅因为先对离散随机变量讲这些概念要简易一些,更是希望在本书中就造成多次接触、深化认识的机会。在这些章里,以例或习题的形式插进了涉及面较宽的许多应用示例。这样做,一是为了提高学习的兴趣,更是试图引发读者的联想,去解释或解

决一两个自己曾经碰到过或将要碰到的问题,学以致用。当然,若因学时数所限或特定学习对象等原因,书中的某些应用示例(特别像4.3节这样大段的应用课题),教师是完全可以选讲或不讲或更换成自己更有精深见解的例子来讲,而将材料留给学生自己看(现在看或将来看),这样做应该是无损于掌握内容的连贯性的。

全书每一章都配了一定数量的习题,对其中一部分(特别是有的应用题),若安排一些时间进行讨论,可能是有益的。

虽说本书主要是为大学本科学学生设计、编写的一本“概率论与数理统计”课程的教材,但也完全可以只用前五章作为“概率论”课程的教材,甚至若只用前三章作为教学内容,对于高职高专的许多学生也应该是合适的。

本书是在编者们在各自长期执教该课程的实践经验分工写出初稿的基础上,由我统稿完成的。在此,要感谢教育部有关领导和专家们给我们编写这本“九五”国家教委重点教材的荣誉和信任,我们还要特别感谢前国家教委工数课程教学指导委员会的马知恩主任,感谢他对编写、出版本书给予的无私支持,也要感谢华南理工大学国家工数教学教学基地的诸多专家、教授以及广东工业大学郝同壬教授等所给予的关心和帮助。由于成书时间仓促,书中难免留有不妥之处,敬祈专家、读者们不吝指正。

谢国瑞

2002年春节

于上海南汇科教园区



# 目 录

<b>第 1 章 基本概念</b> .....	1
1.1 随机试验 .....	1
1.2 随机事件 .....	2
1.2.1 样本空间 .....	2
1.2.2 随机事件 .....	3
1.2.3 事件的关系和运算 .....	3
1.3 事件的概率 .....	9
1.3.1 概率是什么 .....	9
1.3.2 概率的直接计算 .....	13
1.3.3 再论概率是什么 .....	23
习题 1 .....	25
<b>第 2 章 基本定理</b> .....	29
2.1 加法定理 .....	29
2.2 乘法定理 .....	35
2.2.1 条件概率 .....	35
2.2.2 乘法定理 .....	37
2.2.3 独立事件 .....	39
2.3 贝叶斯公式 .....	43
2.3.1 全概率公式 .....	44
2.3.2 贝叶斯公式 .....	47
习题 2 .....	51
<b>第 3 章 离散型随机变量</b> .....	55
3.1 随机变量 .....	55
3.1.1 随机变量概念 .....	55
3.1.2 离散型随机变量及其概率分布 .....	56
3.2 重要的离散型随机变量 .....	58
3.2.1 独立试验序列 .....	58
3.2.2 二项分布 .....	60
3.2.3 泊松定理与泊松分布 .....	65
3.2.4 其他重要离散型随机变量 .....	69

3.3 数字特征	72
3.3.1 随机变量的数学期望	73
3.3.2 随机变量函数的数学期望	79
3.3.3 方差	82
习题 3	86
<b>第 4 章 连续型随机变量</b>	90
4.1 连续型随机变量的概念	90
4.1.1 随机变量的分布函数	90
4.1.2 连续型随机变量	93
4.1.3 数学期望	98
4.2 重要的连续型随机变量	102
4.2.1 均匀分布	102
4.2.2 正态分布	104
4.2.3 指数分布	110
习题 4	114
<b>第 5 章 多维随机变量</b>	118
5.1 二维随机变量的概念	118
5.1.1 二维离散型随机变量的联合概率分布律	118
5.1.2 联合分布函数	119
5.1.3 二维连续型随机变量的联合概率密度	120
5.2 边缘分布、条件分布	123
5.2.1 边缘分布的概念	123
5.2.2 条件分布	126
5.3 随机变量的独立性	130
5.4 数字特征	132
5.4.1 数学期望	132
5.4.2 二维随机变量的协方差	134
5.5 二维随机变量函数的概率分布	141
5.5.1 和的分布	142
5.5.2 商的分布	148
5.5.3 其他的例	149
5.6 极限定理简介	152
5.6.1 中心极限定理	152
5.6.2 大数定律	159

习题 5 .....	162
<b>第 6 章 数理统计的基本概念</b> .....	169
6.1 总体与样本 .....	169
6.1.1 总体与个体 .....	169
6.1.2 样本 .....	170
6.1.3 经验分布函数 .....	170
6.2 统计量 .....	172
6.2.1 基本概念 .....	172
6.2.2 性质 .....	173
6.2.3 $\bar{\xi}$ 与 $S^2$ 的计算 .....	174
6.3 抽样分布 .....	175
6.3.1 三个常用分布 .....	175
6.3.2 上侧分位点 .....	179
6.3.3 抽样分布 .....	182
习题 6 .....	187
<b>第 7 章 统计推断的基本问题</b> .....	190
7.1 点估计 .....	190
7.1.1 点估计概念 .....	190
7.1.2 点估计方法 .....	191
7.1.3 点估计的优良性 .....	198
7.2 区间估计 .....	200
7.2.1 基本概念 .....	200
7.2.2 正态总体参数的区间估计 .....	201
7.2.3 两个正态总体参数的区间估计 .....	205
7.3 假设检验 .....	210
7.3.1 假设检验的一般概念 .....	210
7.3.2 单个正态总体的参数假设检验 .....	215
7.3.3 两个正态总体的参数假设检验 .....	219
7.3.4 总体分布的假设检验 .....	226
习题 7 .....	230
参考书目 .....	234
习题答案 .....	235
附表 .....	249

# 第 1 章 基本概念

## 1.1 随机试验

考虑如下的试验(这里“试验”一词包括通常所谓的观察在内):

$E_1'$ : 在标准大气压(约 101 kPa)下,将水加热到 100 °C;

$E_2'$ : 在静电场中,观察同性电荷的行为;

$E_3'$ : 在地面上信手垂直上抛一石块.

当分别重复进行上述各种试验时,其呈现出的不变性质分别是,对  $E_1'$  是水必沸腾;对  $E_2'$  是电荷必相斥;对  $E_3'$  是石块必回落到地面. 在这些试验中看到的现象通常称为**确定性现象**,这些结果在实施试验之前就知道,只要试验的条件一实现(不论重复多少次),就会出现相应的唯一确定的结果. 但是,有一类试验,在重复实施时,每一次的结局却并不是唯一确定的. 例如考虑下面的一些试验:

$E_1$ : 某足球队在主场进行一场足球比赛;

$E_2$ : 某出租车公司电话订车中心,记录一天内接到订车电话的次数;

$E_3$ : 某射手对一活动靶进行射击,记录在一轮射击中,到击中为止,所进行的射击次数;

$E_4$ : 从一批灯泡中,任取一只,测定灯泡的使用寿命.

当重复进行这些试验时,其出现的结果并非是确定不变的. 对  $E_1$  的结局,可能是主队胜,也可能是主队败,或者是主、客队成平局. 对  $E_2$  的结果,有可能一天之内根本未曾接到过任何客户订车的电话,当然,至少从理论上来说,也有可能一天内的订车电话数超过一千或一万等,因此,可合理地认为一天内接到的订车电话数总是自然数集的某个元素. 对  $E_3$ ,当射手在一轮重复进行这样的射击时,有时可以一次射击结束本轮的射击,而有时可能会无休止地持续下去(至少在理论上是可能的). 这样,实施  $E_3$ ,得到的结果会是某个正整数. 对于  $E_4$ ,每个灯泡点亮时数(从开始使用起,直到损坏为止的小时数)当然是个非负数.

以上这几个试验,都可以看做**随机试验**. 一般地,我们将具有如下的基本特点的试验称为**随机试验**:

(1) 试验可以在相同的条件下重复进行;

(2) 试验的可能结果不止一个,但明确知道其所有可能会出现的结果;

(3) 在每次试验前,不能确知这次试验的结果,但可以肯定,试验的结果必是所有可能结果中的某一个.

从随机试验观察到的现象称为**随机现象**,当观察随机现象时,在具体实现试验条件之前,不能确知会出现怎样的结果,而只能预言一旦实现试验条件,试验所有可能结果之一将会发生的事实.

今后,常将随机试验简称为**试验**.可以看出,前面列举的  $E_1 \sim E_4$  都满足条件(1)~(3),故确实都可称为**试验**(即**随机试验**).对于随机试验,其在重复实施中呈现的不变性质(即**规律性**)是**概率规律性**,在以后的讨论中,我们会逐步明白这种规律性的正确含义.

## 1.2 随机事件

### 1.2.1 样本空间

在讨论一个随机试验时,试验的所有可能结果的集合是明确知道的,称这个集合为该试验的**样本空间**,常用  $\Omega$ (或  $S$ )表示,其元素称为**样本点**,常用  $\omega$  记之,是试验的一个可能结果.

对于上节提到的四个试验,它们的样本空间分别可看作是:

$$\Omega_1 = \{\text{胜, 负, 平}\};$$

$$\Omega_2 = \mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\};$$

$$\Omega_3 = \mathbf{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\};$$

$$\Omega_4 = [0, \infty) = \{x \in \mathbf{R} | 0 \leq x < +\infty\}.$$

在不少情况下,无法确切定出一试验的全部可能结果,但可以知道它不超出某个(尽可能小的)范围,这时,就用这个范围作为该试验的样本空间,只要每次试验的结果必是一个样本点即可.其实,上述的  $\Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$  就正是这样处理后写出的.

**例 1** 抛一枚硬币.观察哪一面向上.约定带有金额的是正面,另一面是反面,并假定抛落的硬币不可能直立.这样,就可写出

$$\Omega = \{\text{正面, 反面}\}$$

若规定用  $\omega_1$  表示正面,  $\omega_2$  表示反面,则有  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ .

**例 2** 一个袋中装有大小相同的3个白球和2个黑球,现从中任取出一球.为描述此试验的可能结果,一种办法是先对球予以编号,1、2、3号球是白球,而4、5号球是黑球,约定用  $\omega_i$  表示取得  $i$  号球,即有

$$\omega_i = \{\text{取得第 } i \text{ 号球}\}$$

则  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$ .

这两个示例中的样本空间以及前面的  $\Omega_1$ , 都只含有限个元素, 称为有限样本空间; 而前面的  $\Omega_2, \Omega_3$  以及  $\Omega_4$  则都是无限样本空间.

### 1.2.2 随机事件

在实际问题中, 面对一个随机试验, 我们可能会更关心某些特定的事情在重复试验下是否会发生. 如在出租车公司的示例中, 公司方面可能关心的是“电话订车中心一天中接到订车电话数不超过 100”这件事是否经常发生. 如果是, 那就要考虑采取扩大广告宣传或紧缩编制等措施以提高经济效益.

“电话订车中心一天中接到订车电话数不超过 100”可表示为样本空间  $\Omega_2$  的一个子集  $\{0, 1, \dots, 99, 100\}$ . 这件事在重复进行试验时是有时发生, 有时不发生的, 我们称具有这样特征的事为随机事件. 用集合论的语言, 随机事件为样本空间的子集, 简称事件, 通常用大写拉丁字母  $A, B, C$  等记之. 当一次试验结果出现在这个集合时, 即当一次试验结果  $\omega \in A$  时, 就称这次试验中事件  $A$  发生, 否则, 当结果  $\omega \notin A$  时就称  $A$  不发生. 在出租车公司的示例中, 若用  $A$  表示“电话订车中心一天中接到订车电话数不超过 100”这一件事, 那么, 当一天结束时统计下来的订车电话为 105 次时, 就说在这一天事件  $A$  没有发生.

为讨论方便, 我们把一个试验的样本空间  $\Omega$  也作为事件, 由于每次试验的结果必是某个样本点, 这就是说, 作为事件,  $\Omega$  是在每次试验中都必然要发生的, 故称之为必然事件. 另外, 也把不含任一样本点的空集  $\emptyset$  看做一事件, 由于在每次试验中这个事件都不会发生, 故称为不可能事件. 有时, 也把单个样本点  $\omega$  称作是试验的基本事件(更正确地说, 只含单个样本点的集合为基本事件).

例 3 对例 2 中讨论的摸球试验, 试用样本空间子集表示下列事件:

“摸出的是白球”;

“摸出的是白球或黑球”;

“摸出的是红球”;

“摸出的是黑球”;

“摸出的是 3 号球”.

解 “摸出的是白球” =  $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} = A$ ;

“摸出的是白球或黑球” =  $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\} = \Omega$ ;

“摸出的是红球” =  $\emptyset$ ;

“摸出的是黑球” =  $\{\omega_4, \omega_5\} = B$ ;

“摸出的是 3 号球” =  $\{\omega_3\} = C$ .

### 1.2.3 事件的关系和运算

经常会遇到这样的情况, 我们感兴趣的是一个较为复杂的事件, 但通过种种

方法,可使之与一些较为简单的事件联系起来,这时,我们就可设法利用这种联系通过简单事件去研究这些较为复杂的事件.

### 1.2.3.1 事件的关系

#### 事件的蕴含与包含

若当事件  $A$  发生时  $B$  必发生,则称  $A$  蕴含  $B$  或者说成  $B$  包含  $A$ , 记作  $A \subset B$ .

作为样本空间的子集,事件  $A$  蕴含事件  $B$  也即集合  $A$  是  $B$  的一个子集.

显然,任一事件  $A$  都蕴含必然事件  $\Omega$ ;而对例3的摸球试验来说,明显地有  $C$  蕴含  $A$ ,亦即摸到的球若是3号球( $C$ 发生),则必摸到的是个白球( $A$ 发生).

常用文氏图(Venn diagram)方法帮助说明事件的关系和运算.这时,总将试验设想成是向一方框内投点(而方形图就表示必然事件  $\Omega$ ),而事件  $A, B$  等分别表示“所投的点落在图中所标示闭曲线内部”的事件.于是,从图1-1可以看出,如果点落在  $A$  内,当然也是落在  $B$  内的,这就是  $A$  蕴含  $B$ .从图可明白看出,  $A$  蕴含  $B$  当然也就是  $B$  包含  $A$ .

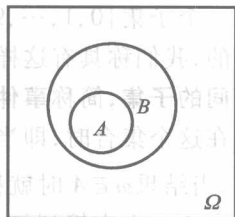


图1-1  $A \subset B$

#### 事件的相等

若  $A$  与  $B$  互相蕴含,即  $A \subset B$  且  $B \subset A$ ,则称两事件  $A$  与  $B$  相等,记为  $A = B$ .

两事件  $A, B$  相等,意即它们应是样本空间的同一个子集,充其量不过是代表着同一事件的不同说法而已.如对例3的摸球试验,若以  $D$  记“摸出球的号码不超过3”,则显然有  $D = A$ .

#### 事件的互斥(或称互不相容)

若事件  $A, B$  不能在同一次试验中都发生(但可以都不发生),则称它们是互不相容或互斥的.

若一些事件中任意两个都互不相容,则称这些事件是两两互不相容的,或简称互不相容的.

互不相容事件作为样本空间的子集看,其交集是空集,这一点也可参看图1-2(a).

对例3的摸球试验,事件  $B, C$  显然是互不相容事件.

#### 事件的对立(或称逆)

互不相容的一个重要特例是“对立”.称事件

$$B = \{A \text{ 不发生}\}$$

为  $A$  的对立事件或逆事件,常记作  $\bar{A}$ .换言之,  $A$  不发生就是  $\bar{A}$  发生.

作为样本空间的子集,逆事件  $\bar{A}$  是  $A$  (相对于全集  $\Omega$ ) 的余集(或补集),这一点也可参看图1-2(b).

对于例3的摸球试验,所示的事件  $B$  不仅与  $A$  是互不相容的,而且还是  $A$

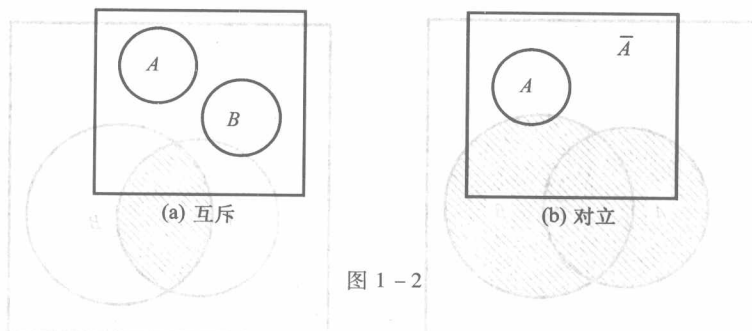


图 1-2

的对立事件,因而也可将  $B$  记作  $\bar{A}$ . 当然,也可将  $A$  看做  $B$  的逆事件而记作  $\bar{B}$ , 即有

$$A = \bar{\bar{A}} = \bar{B}$$

在这里,虽然  $C$  与  $B$  互不相容,但  $C$  不是  $B$  的逆事件.

从图 1-2 可直接看出,若  $A$  与  $B$  互不相容,则必

$$B \subset \bar{A} \text{ 及 } A \subset \bar{B} \quad (1-1)$$

### 1.2.3.2 事件的运算

#### 事件的并(或称和)

对给定的事件  $A, B$ , 定义一个称为并或和的事件,以  $A \cup B$  记之:

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{A \text{ 发生或 } B \text{ 发生}\} \\ &= \{A, B \text{ 至少有一个发生}\} \end{aligned} \quad (1-2)$$

作为样本空间的子集,集合  $A \cup B$  正是集合  $A, B$  之并. 当已知  $A, B$  互不相容时,常将  $A \cup B$  记成  $A + B$ .

如图 1-3(a) 所示,  $A \cup B$  表示“投点落入由  $A, B$  外缘所围成区域”的事件,这个区域比  $A, B$  都“大”(至少不会“小”),由  $A, B$  两部分合并而成. 当然,作为集合,重复部分只计入一次. 对例 3 的摸球试验,事件“摸出球的号码大于 2”就是  $B + C$ ; 而  $A \cup C$  就是  $A$ .

一般地,若  $A \subset B$ , 则必  $A \cup B = B$ , 称之为并的“吸收律”.

事件的并,可自然地推广到多个事件的情形,  $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$  或  $\bigcup_{i=1}^n A_i$  是

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^n A_i &= \{A_1 \text{ 发生或 } A_2 \text{ 发生} \cdots \text{ 或 } A_n \text{ 发生}\} \\ &= \{A_1, A_2, \cdots, A_n \text{ 中至少有一发生}\} \end{aligned}$$

类似地,  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$  则为一列事件  $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$  中至少有一发生的事件.

#### 事件的交(或称积)

对给定事件  $A, B$ , 定义一个交或积的事件,以  $AB$  记之:



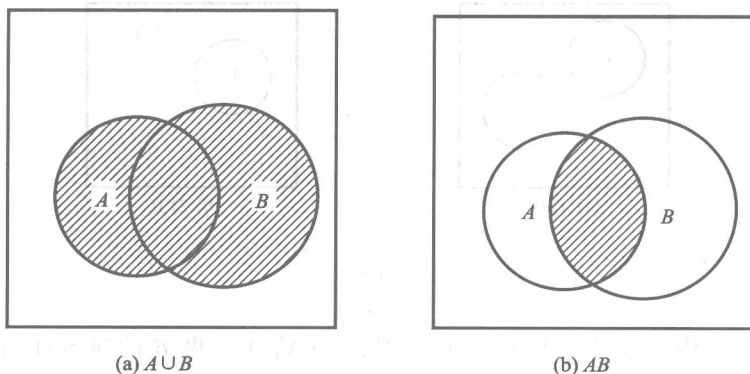


图 1-3 事件运算

$$\begin{aligned} AB &= \{A \text{ 发生且 } B \text{ 发生}\} \\ &= \{A, B \text{ 同时发生}\} \end{aligned} \quad (1-3)$$

作为样本空间的子集,集合  $AB$  正是  $A, B$  之交,故也常将交事件  $AB$  记成  $A \cap B$ .

如图 1-3(b) 所示,  $AB$  表示“投点落入  $A, B$  重叠部分区域(图中阴影部分)”的事件. 显然,  $AB$  既蕴含  $A$  也蕴含  $B$ ,

$$AB \subset A, \quad AB \subset B$$

事件  $A_1, A_2, \dots, A_n$  互不相容,即为

$$A_i A_j = \emptyset, \quad 1 \leq i < j \leq n$$

而  $A, B$  互为对立事件,就是同时成立

$$A \cup B = \Omega, \quad A \cap B = \emptyset$$

对例 3 的摸球试验,有  $AC = C$ . 一般地,对同一试验下的事件  $A, B$ ,若有  $A$  蕴含  $B$ ,即  $A \subset B$ ,则必  $AB = A$ .

事件的交也可自然地推广到多个事件的情形,  $A_1 A_2 \cdots A_n$  或  $\bigcap_{i=1}^n A_i$  是

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = \{A_1, A_2, \dots, A_n \text{ 同时发生}\}$$

类似地,  $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$  则是一系列事件  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  全都发生的事件.

**例 4** 设  $A, B, C$  是事件,则

- (1) 事件“ $A, B$  都发生,但  $C$  不发生”可表示  $ABC\bar{C}$ ;
- (2) 事件“ $A, B, C$  都发生”可表示成  $ABC$ ;
- (3) 事件“ $A, B, C$  中恰有两个发生”可表示成  $ABC\bar{C} + A\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C}$ ;