高等职业教育教材

高等数学

主编：卢秀惠
刘永渤
章锦红

辽宁大学出版社

高等数学

高 等 数 学

主　编：卢秀惠　刘永渤　章锦红

副主编：杨松梅　王　蕾　张　雷　王　渝

编　者：王晓辉　王殿元　王　蕾　王　渝　卢秀惠
刘永渤　杜吉佩　张　雷　杨松梅　赵海东
章锦红

辽宁大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/卢秀惠，刘永渤，章锦红主编. －沈阳：辽宁大学出版社，2008.8
高等职业教育教材
ISBN 978-7-5610-5558-8

Ⅰ.高…　Ⅱ.①卢…②刘…③章…　Ⅲ.高等数学—高等学校：技术学校－教材　Ⅳ.013

中国版本图书CIP数据核字（2008）第131578号

出 版 者：辽宁大学出版社（地址：沈阳市皇姑区崇山中路66号　邮政编码：110036）
印 刷 者：葫芦岛市新雅印务有限公司
发 行 者：辽宁大学出版社
幅面尺寸：185mm×260mm
印　　张：24.75
字　　数：595千字
出版时间：2008年8月第1版
印刷时间：2008年8月第1次印刷
责任编辑：胡家诗
封面设计：何　力
责任校对：春　里

书　　号：ISBN 978-7-5610-5558-8
定　　价：38.00元
联系电话：024-86864452
邮购热线：024-86830665
网　　址：http://press.lnu.edu.cn
电子邮件：lnupress@vip.163.com

前　言

本书是根据我国高职教育（工科类）的要求，在认真总结多年从事高职高专数学教改经验的基础上编写的。教材内容的选取充分体现了高职高专基础课教学中“以应用为目的，以必须为度”的原则，以“强化概念，注重应用”为依据，既考虑了人才培养的应用性，又能使学生具有一定的可持续发展性。本书吸取了众多同类教材的一些优点，同时具有以下特点：

（1）该书适用于工科类各专业、不同生源的大学一年级的学生，尤其考虑到部分高职学生的实际情况，在不降低教材质量的前提下，本着“必须、够用”的原则，同时还保持该学科知识体系完整性的基础上，尽量降低难度、注重应用。

（2）教材编写本着突出重点，分散难点的原则，注意几何、物理解释，重点培养学生的空间想象能力、抽象概括能力和动手应用能力。

（3）注意体现启发式教学和直观性教学的原则，以有利于不同层次学生对知识的掌握。

（4）为了有效地解决学生在学习的过程中苦于无法找到一本适当的习题教材的问题，本书配备了练习题、节后习题、章后复习题（A、B）、章后学习指导和自测题。习题的编选，本着注重双基训练，不追求复杂的计算和变换过程的原则，适当增加了应用性题目。

（5）章节中打有“*”号的部分，表示可根据不同专业的要求作为选学内容。

本教材由渤海船舶职业学院数学教研室集体编写。全书章节结构体系由杜吉佩教授策划；正文部分由卢秀惠副教授担任主编，习题及章后复习题（A、B）由章锦红副教授担任主编，学习指导及自测题由刘永渤副教授担任主编；参加编写的有杨松梅、王蕾（第一章）、王晓辉、刘永渤（第二章）、卢秀惠（第三章）、杜吉佩教授（第四章）、章锦红、张雷（第五章）、王渝（第六章）、王殿元、赵海东（第七章）；参加编写人员均具有副教授以上职称，并分别负责编写各自章节的正文内容及练习题、节后习题、章后复习题（A、B）、章后学习指导和自测题；本书由卢秀惠副教授统稿并定稿。

本书得到了学院、教务处领导及基础部董志全主任的全力支持，在此表示衷心的感谢。

由于作者水平有限，加之时间比较仓促，书中难免有欠妥之处，敬请读者批评指正。

编　者

二OO八年七月

目 录

第一章　极限与连续

极限是数学中的一个重要的基本概念，它是学习微积分学的理论基础. 本章将在复习和加深函数有关知识的基础上建立函数的极限概念，并讨论函数的连续性.

§1–1　函　数

一、函数的概念

1. 函数的定义

设 x 和 y 是两个变量, D 是一个实数集, 如果对于每个数值 $x\in D$, 按照某种对应关系, y 都有唯一的值和它对应, 那么 x 叫做 y 的**函数**, 记作

$$y=f(x),\ x\in D$$

其中, x 叫做**自变量**, y 叫做**因变量**, 数集 D 叫做函数的**定义域**, 当 x 取遍 D 中的一切实数值时, 与它对应的函数值的集合 M 叫做函数的**值域**（如图 1–1）.

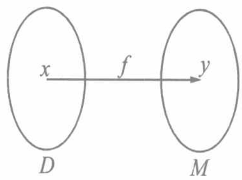


图 1–1

由函数定义可知，定义域和对应法则是函数的两个要素. 如果两个函数具有相同的定义域和对应法则，那么它们是同一函数.

例如：某会员制商店对会员购物提供优惠，会员可按商品价格的 85%购买商品. 但每年需交纳会员费 300 元. 若某人只在此商店购物，至少需购多少钱的商品（按商品价格计算）才能真正受惠？一年内实际受惠多少钱？

假设按商品价格计算，此人一年内购买了 x 元的商品，获得商品优惠 $0.15x$ 元，但因交纳了 300 元会员费，因此实际获得的优惠 $y=0.15x-300$. 表 1–1 给出了 x 与 y 之间的依赖关系.

表 1-1

商品钱数 x/元	0	500	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000
受惠钱数 y/元	–300	–225	–150	–75	0	75	150	225	300

从表 1–1 中可以看出，需购 2000 元以上商品才能真正受惠.

2. 分段函数

有时会遇到一个函数在自变量不同的取值范围内用不同的式子来表示.

例如：函数

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases}$$

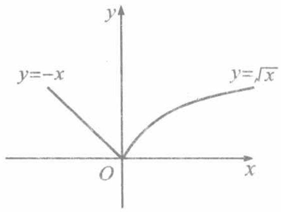


图 1–2

是定义在区间（$-\infty,+\infty$）内的一个函数．当 $x\geqslant 0$ 时 $f(x)=\sqrt{x}$；当 $x<0$ 时 $f(x)=x$，它的图象如图 1–2.

在不同的区间内用不同的式子来表示的函数叫做**分段函数**．求分段函数的函数值时，应把自变量的值代入相应取值范围的表示式进行计算.

例如，在上面的分段函数中，

$$f(4)=\sqrt{4}=2,\ f(-4)=-(-4)=4$$

二、函数的几种特性

设函数 $f(x)$ 在某区间 I 有定义.

1. 奇偶性

设 I 为关于原点对称的区间，若对于任意的 $x\in I$，都有 $f(-x)=-f(x)$，则 $f(x)$ 叫做**奇函数**；若 $f(-x)=f(x)$，则 $f(x)$ 叫做**偶函数**．奇函数的图象关于原点对称（如图 1–3），偶函数的图象关于 y 轴对称（如图 1–4）.

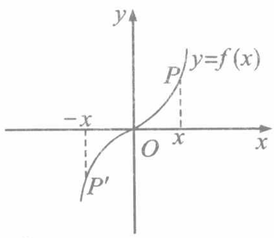


图 1–3

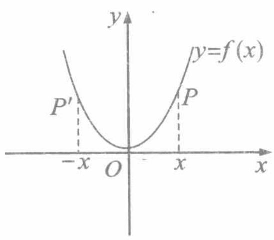


图 1–4

例如 $y=x^3$ 在区间（$-\infty,+\infty$）内是奇函数，$y=x^4+1$ 在区间（$-\infty,+\infty$）内是偶函数．有的函数既不是奇函数也不是偶函数，如 $y=\sin x+\cos x$ 在区间（$-\infty,+\infty$）内是非奇非偶函数.

2. 单调性

若对于区间 I 内任意两点 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上**单调增加**，区间 I 称为**单调增区间**；若 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上**单调减少**，区间 I 称为**单调减区间**．单调增区间和单调减区间统称为**单调区间**．在单调增区间内，函数图象随着 x 的增大而上升（如图 1–5），在单调减区间内，函数图象随着 x 的增大而下降（如图 1–6）.

例如 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty,0)$ 内是单调减少的，在区间 $(0,+\infty)$ 内是单调增加的，在区间（$-\infty,\infty$）内函数 $y=x^2$ 不是单调函数.

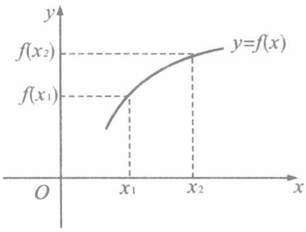


图 1-5

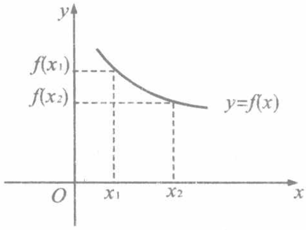


图 1-6

3. 周期性

若存在不为零的数 T，使得对于任意的 $x\in I$，都有 $x+T\in I$，且 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$为**周期函数**，其中 T 叫做函数的**周期**，通常周期函数的周期是指它的**最小正周期**.

例如 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数；$y=\tan x$，$y=\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数.

4. 有界性

若存在正数 M，使得在区间 I 上恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$在 I 上**有界**，否则称 $f(x)$在 I 上无界.

例如函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间$(0,1)$内无界，但在区间$[1,2]$内有界.

三、复合函数

如函数 $y=\sin 2x$，是借助于 $u=2x$ 而成为 x 的函数的，即由 $y=\sin 2u$ 及 $u=2x$ 复合而成.

一般地，给出下面的定义.

定义　如果 y 是 u 的函数 $y=f(u)$ 而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，则称 y 是 x 的**复合函数**，记作 $y=f[\varphi(x)]$，u 叫做**中间变量**.

注意：（1）不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数.

如 $y=\arcsin u$，$u=2+x^2$ 前者定义域为$[-1,1]$，后者 $u=2+x^2\geqslant 2$，故这两个函数不能复合成一个函数.

（2）复合函数可以由两个以上的简单函数复合而成.

例 1　指出下列各复合函数的复合过程：

（1）$y=\sqrt{x+x^2}$　　（2）$y=\cos^2 x$　　（3）$y=\lg(1-x)$

（4）$y=2\sin\sqrt{1-x^2}$　　（5）$y=e^{\sin\frac{1}{x}}$

解　（1）$y=\sqrt{x+x^2}$ 是由 $y=\sqrt{u}$，$u=1+x^2$ 复合而成的；

（2）$y=\cos^2 x$ 是由 $y=u^2$，$u=\cos x$ 复合而成的；

（3）$y=\lg(1-x)$是由 $y=\lg u$，$u=1-x$ 复合而成的；

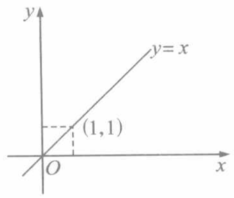
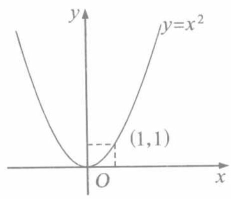
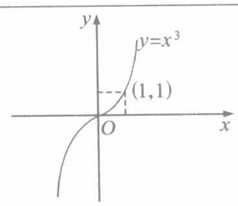
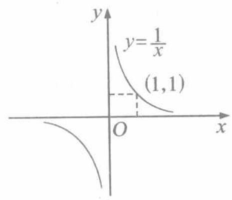
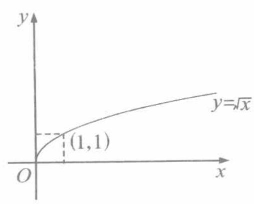
（4）$y=2\sin\sqrt{1-x^2}$ 是由 $y=2\sin u$，$u=\sqrt{v}$，$v=1-x^2$ 复合而成的；

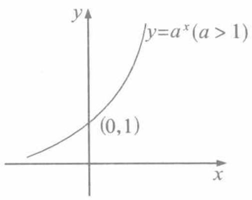
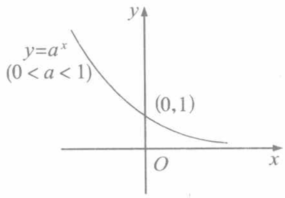
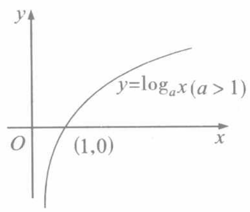
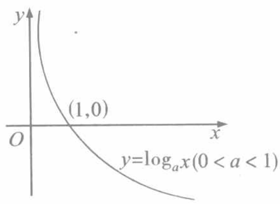
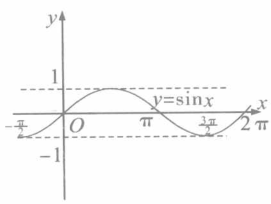
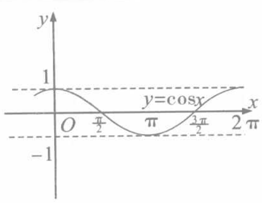
（5）$y=e^{\sin\frac{1}{x}}$是由$y=e^u$，$u=\sin v$，$v=\dfrac{1}{x}$复合而成的.

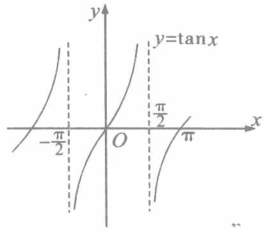
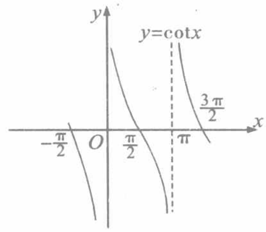
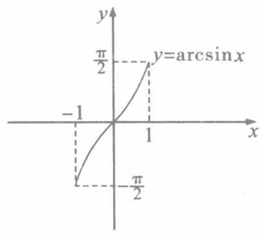
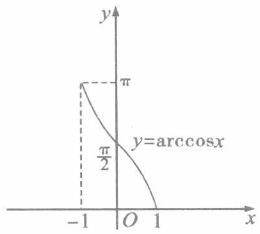
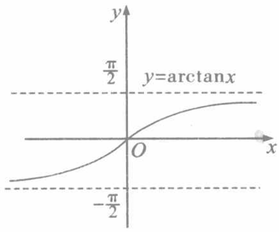
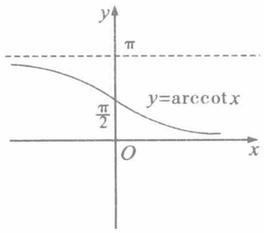
四、基本初等函数 初等函数

我们学过的幂函数$y=x^{\alpha}\,(\alpha\in\mathbf{R})$,指数函数 $y=a^x$ $(a>0,a\neq1)$，对数函数 $y=\log_a x$ $(a>0,a\neq1)$，三角函数和反三角函数统称为**基本初等函数**. 为了今后学习和查阅方便，现将一些常用的基本初等函数的定义域、图象和特性列于表 1–2 中.

表 1–2

函数		定义域和值域	图　象	特　性
幂函数	$y=x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 在$(-\infty,+\infty)$内单调增加
	$y=x^2$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		偶函数 在$(-\infty,0)$内单调减少 在$(0,+\infty)$内单调增加
	$y=x^3$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 在$(-\infty,+\infty)$内单调增加
	$y=x^{-1}$	$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$		奇函数 在$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$内均单调减少
	$y=\sqrt{x}$	$x\in[0,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		在$[0,+\infty)$内单调增加

函数		定义域和值域	图象	特性
指数函数	$y=a^x$ $(a>1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调增加
	$y=a^x$ $(0<a<1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调减少
对数函数	$y=\log_a x$ $(a>1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调增加
	$y=\log_a x$ $(0<a<1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调减少
三角函数	$y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		奇函数，周期 2π，有界，在$\left(2k\pi-\frac{\pi}{2}, 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$内单调增加，在$\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}, 2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$内单调减少$(k\in\mathbf{Z})$
	$y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		偶函数，周期 2π，有界，在$(2k\pi, 2k\pi+\pi)$内单调减少，在$(2k\pi+\pi, 2k\pi+2\pi)$内单调增加$(k\in\mathbf{Z})$

三角函数	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期 π，在 $\left(k\pi-\dfrac{\pi}{2},\ k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加$(k\in\mathbf{Z})$
	$y=\cot x$	$x\neq k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期 π，在（$k\pi$，$k\pi+\pi$）内单调减少$(k\in\mathbf{Z})$
反三角函数	$y=\arcsin x$	$x\in[-1,1]$ $y\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$		奇函数，单调增加，有界
	$y=\arccos x$	$x\in[-1,1]$ $y\in[0,\ \pi]$		单调减少，有界
	$y=\arctan x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$		奇函数，单调增加，有界
	$y=\operatorname{arccot} x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\ \pi)$		单调减少，有界

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的复合步骤所构成的函数叫做**初等函数**.(由常数和基本初等函数经过有限次四则运算构成的函数称为**简单函数**).由于分段函数

$$f(x)=\begin{cases} x & x\geqslant 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$

能化为 $y=\sqrt{x^2}$，而 $y=\sqrt{x^2}$ 是由 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=x^2$ 复合而成的，所以这个分段函数是一个初等函数.

五、建立函数关系式举例

为解决实际问题，先要建立函数关系（即建立数学模型），首先明确问题中的自变量与函数，然后根据题意建立它们之间的函数关系，同时给出函数的定义域.

例 2　某工厂 A 与铁路的垂直距离为 a km，它的垂足 B 到火车站 C 的铁路长为 b km，工厂的产品必须经火车站 C 方能转销外地．已知汽车的运费是 m 元/（t・km）火车运费是 n 元/（t・km）($m>n$)．为节省运费，计划在铁路上另修一小站 M 作为转运站，那么费用的多少决定于 M 的地点．试将运费表示为距离 $|BM|$ 的函数（如图 1–7）.

解　设 $|BM|=x$，运费为 y，根据题意有

$$|AM|=\sqrt{a^2+x^2}\text{，}\quad |MC|=b-x$$

则

$$y=m\sqrt{a^2+x^2}+n(b-x)\text{，}\quad x\in[0,b]$$

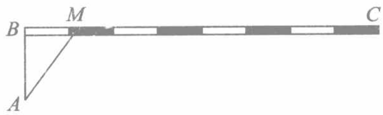


图 1–7

例 3　要建立一个容积为 V 的长方体水池，它的底为正方形．如池底与侧面单位面积造价比为 3:1，试建立总造价与底面边长之间的函数关系.

解　设底面边长为 x，总造价为 y，侧面单位面积造价为 a，由已知可得水池深为 $\dfrac{V}{x^2}$，侧面积为 $4x\cdot\dfrac{V}{x^2}=\dfrac{4V}{x}$，从而得出

$$y=3ax^2+4a\cdot\frac{V}{x}\quad(0<x<+\infty)$$

例 4　某运输公司规定货物的吨公里(t・km)运价为：在 a km 以内，每吨公里为 k 元；超过 a km 时，超过部分为每吨公里 $\dfrac{4}{5}k$ 元．求运价 y 和里程 s 之间的函数关系.

解　根据题意可列出函数关系如下：

$$y=\begin{cases} ks & 0<s\leqslant a \\ ka+\dfrac{4}{5}k(s-a) & s>a \end{cases}$$

例 5　写出如图 1－8 所示的函数（图中 $a>0$，$b>0$）的关系式.

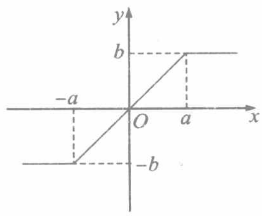


图 1–8

解 由所给函数图象可以看出，这是一个分段函数. 当 $x<-a$ 时，函数的图象是从点 $(-a,-b)$ 向左引出的平行于 x 轴的一条射线，它的方程是 $y=-b$；

当 $-a\leqslant x\leqslant a$ 时，函数的图象是连结 $(-a,-b)$ 与 (a,b) 两点的直线段，它的方程是

$$y=\frac{b}{a}x$$

当 $x>a$ 时，函数的图象是从点 (a,b) 向右引出的平行于 x 轴的一条射线，它的方程是 $y=b$.

归纳以上三种情况，得出所求的函数关系式为 $y=\begin{cases}-b & x<-a \\ \dfrac{b}{a}x & -a\leqslant x\leqslant a \\ b & x>a\end{cases}$.

练习 1-1

1. 求下列函数的定义域：

（1）$y=\arcsin\dfrac{2x}{x^2+1}$ （2）$y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$

2. 下列各组函数是否相同？为什么？

（1）$f(x)=\dfrac{2x^2-2}{x-1}$，$g(x)=2(x+1)$ （2）$f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$

（3）$f(x)=\ln x^2$，$g(x)=2\ln x$ （4）$y=5x+7$，$x=5y+7$

3. 判断函数的奇偶性：

（1）$f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ （2）$f(x)=\begin{cases}-1 & x<0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x>0\end{cases}$

4. 写出下列函数的复合过程：

（1）$y=3^{\sin x}$ （2）$y=\sin^2 5x$

（3）$y=\arccos\sqrt{1-x^2}$ （4）$y=\sqrt[3]{\ln\cos x}$

（5）$y=\ln\sin e^{x+1}$ （6）$y=\arcsin x^2\cdot\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

5. 证明在区间 $(0,+\infty)$ 内，函数 $f(x)=\ln x$ 是单调增加的；函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 是单调减少的.

6. 某种铅笔，每支卖 0.5 元，买 x 支铅笔的钱数（元）是 $y=0.5x$，$x\in\{1,2,3,\cdots\}$，画出它的函数图象.

7. 国际航空信件的邮资是 10 克以内邮资 4 元，超过 10 克的部分每克收取 0.3 元，且信件重量不能超过 200 克，试求邮资 y 与信件重量 x 的函数关系式.

习题 1-1

1. 填空题：

（1） $y=\sqrt{x^2-4}+\sqrt{\log_3 x-1}$ 的定义域是____________.

（2）设 $f(x)=\begin{cases}2^x & -1\leqslant x<0\\ 2 & 0\leqslant x<1\\ x-1 & 1\leqslant x<3\end{cases}$，则 $f(x)$ 的定义域________，$f(0)=$________，$f(1)=$________.

（3）设 $f(\frac{1}{x})=x+\sqrt{1+x^2}\,(x>0)$，则 $f(x)=$____________.

（4） $f(x)=e^{x-1}$，则 $f(2)=$____________，$f[f(1)]=$____________.

（5） $y=e^{\sin 2x}$ 是由__________ __________ __________复合而成的.

2. 单项选择题：

（1）下列各对函数中，（　　）是相同的.

A. $f(x)=\sqrt{x^2}$，$g(x)=x$　　B. $f(x)=\ln x^2$，$g(x)=2\ln x$

C. $f(x)=\ln x^3$，$g(x)=3\ln x$　　D. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$，$g(x)=x-1$

（2）设 $y=f(x)$ 的定义域是 $[-1,1]$，则 $y=f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域是（　　）.

A. $[a-1,a+1]$　　B. $[-a-1,-a+1]$

C. $[1-a,a-1]$　　D. $[a-1,1-a]$

（3）已知函数 $y=-\sqrt{x-1}$，则它的反函数是（　　）.

A. $y=x^2+1$　　B. $y=x^2+1\,(x\leqslant 0)$

C. $y=x^2+1\,(x\geqslant 0)$　　D. 不存在

（4）下列函数中不是复合函数的是（　　）.

A. $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$　　B. $y=e^{1+x^2}$

C. $y=\ln\sqrt{1-x}$　　D. $y=\sin(2x+1)$

（5）下列是初等函数的是（　　）.

A. $x=1$，x 是自变量　　B. $y=\begin{cases}x & x<0\\ x^2 & x>0\end{cases}$

C. $y=e^2+\sin\dfrac{\pi}{7}$　　D. $y=\begin{cases}-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ 1 & x>0\end{cases}$

3. 求下列函数的定义域：

（1） $y=\dfrac{\sqrt{x-1}}{1-\ln x}$

（2） $y=\sqrt{x^2-4}+\sqrt{\log_3 x-1}+\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$