算子范数与 Hilbert 型不等式

The Norm of Operator and Hilbert-type Inequalities

杨必成 著

科学出版社
www.sciencep.com

算子范数与 Hilbert 型不等式

The Norm of Operator and Hilbert-type Inequalities

杨必成　著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书是系统探讨 Hilbert 型不等式理论的一部专著. 作者应用实分析、泛函分析中的思想与不等式的权系数及参量化方法, 在多类赋范线性空间建立核为负数齐次的 Hilbert 型不等式、逆式及其等价式, 讨论其常数因子的最佳性, 并用算子理论描述其构造形态, 用算子范数刻画其最佳常数因子, 还讨论了 Hilbert 型积分算子有界的若干条件. 本书覆盖了近 100 年来 200 余篇原始文献及若干本数学专著的成果, 其陈述深入浅出, 实例颇多且具有从一般到特殊等特点. 阅读本书需要实分析及泛函分析的基础知识.

本书可作为函数论及应用数学方向的研究生教材或教学参考书, 也适合对解析不等式感兴趣的广大数学爱好者阅读欣赏.

图书在版编目(CIP)数据

算子范数与 Hilbert 型不等式 = The Norm of Operator and Hilbert-type Inequalities/杨必成著. —北京: 科学出版社, 2009

ISBN 978-7-03-023339-4

I. 算… II. 杨… III. ①算子-研究 ②不等式-研究 IV. 0177 0178

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008) 第 171939 号

责任编辑: 王丽平　房　阳 / 责任校对: 陈玉凤
责任印制: 钱玉芬 / 封面设计: 王　浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

骏杰印刷厂 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2009 年 1 月第 一 版　开本: B5(720×1000)
2009 年 1 月第一次印刷　印张: 24
印数: 1-2500　字数: 467 000

定价: 68.00 元

作 者 简 介

杨必成, 男, 1947 年生, 广东汕尾人, 数学教授. 现任广东教育学院应用数学研究所所长, 兼任欧洲《数学文摘》及美国《数学评论》评论员, 数学专业杂志 *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, *The Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications* 及《不等式研究通讯》编委. 自 1986 年至今, 从事可和性、解析数论、算子理论与解析不等式的研究, 已发表论文 220 余篇, 其中有 32 篇为 SCI 收录, 另有 13 篇发表在《数学学报》、《数学年刊》及《数学进展》等期刊上. 曾获多项科研资助及科研奖励, 2007 年被授予 "广东省师德先进个人" 荣誉称号.

前　言

100 年前, 即 1908 年, 德国数学家 D. Hilbert 发表了以他的名字命名的不等式. Hilbert 不等式声名卓著, 应用甚广, 经数学家及数学研究者的不懈努力, 至今已发展成为以该不等式为特例的 Hilbert 型不等式理论. 然而, 历史上除英国数学家 G. H. Hardy 等著的 *Inequalities* (1934), 克罗地亚数学家 J. E. Mitrinovic 等著的 *Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives* (1991) 及我国数学家胡克著的《解析不等式的若干问题》(2003) 各辟一章, 较为集中地收录并论述 Hilbert 不等式的发表成果外, 尚未见其他专著系统阐述它.

1991 年, 我国知名数学家徐利治发表论文, 首创了权系数方法以改进 Hilbert 不等式, 使该不等式的研究有了新的突破. 受他思想的启迪, 我从 1998 年开始逐步优化权系数方法, 引入独立参量及 Beta 函数, 在国际 SCI 期刊及国内权威期刊发表了推广或改进 Hilbert 不等式的数十篇研究论文, 由此触发了对 Hilbert 型不等式的全方位研究. 2004 年, 作者提出了引入及配置两对共轭指数与独立参数的参量化思想, 用科学的参数系统表述各类推广的 Hilbert 型不等式. 2006 年以来, 随着用线性算子刻画各类 Hilbert 型不等式的思想方法的诞生与发展, 该课题的理论体系亦随之确立. 本书借鉴了近百年来大量发表文献的思想成果, 用权系数的方法、参量化的思想及线性算子理论系统阐述各类 Hilbert 型不等式及逆式, 并用实分析技巧及级数求和的估值理论处理连续及离散问题, 使之浑然成一体系. 本书可看作国内外系统论述 Hilbert 型不等式理论的第一部专著.

编写本书的目的, 除想借此完成对业已发展成型的 Hilbert 型不等式理论进行系统描述外, 还想借本书的出版提升对该课题领域的研究水平, 使本书的读者能以更新、更清晰的眼光审视 Hilbert 型不等式, 进一步推动对 Hilbert 型不等式理论的应用研究.

值得称谢的是, “广东省教育厅自然科学基金重点项目”(05Z026), “广东省自然科学基金”(7004344) 及 “广东教育学院教授博士基金” 相继资助了编写本书的科研课题. 在编写本书的过去一年里, 我曾在自己主持的 “解析不等式讨论班” 上宣讲过书稿的部分章节, 其间得到不少师生的批评指正, 特别是钟五一副教授, 她通读了初稿, 并对本书的大量例题逐一演算, 指正了不少错漏, 为本书增色不少, 在此谨对钟老师及讨论班的学员表示衷心感谢. 广东教育学院院长刘劲予教授、副院长李龙图教授及数学系的领导对出版本书的支持使我备受鼓舞, 在此一并致谢. 还要深切感谢夫人张敬宏女士和女儿杨玉莹, 她们长期以来对我的关怀支持, 使我能以健

康的体魄及愉快的心情从事教学、管理与数学研究工作, 并顺利完成本书的写作, 本书也是献给她们的一个特殊礼物.

由于水平有限, 且编写时间较为匆促, 书中疏漏仍在所难免, 切望读者不吝赐教.

杨必成

2008 年 7 月 1 日

于广东教育学院

目　　录

第 1 章 绪　　论

本章将系统介绍以 Hilbert 不等式为特例的 Hilbert 型不等式的理论概况及其思想方法的由来与演变, 它涉及国内外大量的研究成果. 特别应强调的是近年关于 Hilbert 型不等式的参量化表示与 Hilbert 型算子的范数刻画等出色工作, 更推动了对这一领域的深入探索. 本章作为引子, 为阅读、理解后面各章节的内容做好准备.

1.1 Hilbert 不等式与 Hilbert 算子

1.1.1 Hilbert 不等式与 Hilbert 算子的研究背景

1908 年, 德国数学家 D. Hilbert 证明了如下著名不等式[1]: 若 $\{a_n\},\{b_n\}$ 为实数列, 满足 $0<\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2<\infty$ 及 $0<\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2<\infty$, 则有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n}<\pi\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.1.1}$$

这里, 常数因子 π 为最佳值. 称式 (1.1.1) 为 Hilbert 不等式. 其常数因子 π 的最佳性证明是由 Schur[2] 于 1911 年完成的, 他同时还给出了式 (1.1.1) 的如下积分类似形式: 若 $f(x),g(x)$ 为可测函数, 满足 $0<\int_0^{\infty}f^2(x)\mathrm{d}x<\infty$ 及 $0<\int_0^{\infty}g^2(x)\mathrm{d}x<\infty$, 则有

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{f(x)g(y)}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\pi\left(\int_0^{\infty}f^2(x)\mathrm{d}x\int_0^{\infty}g^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.1.2}$$

这里, 常数因子 π 仍为最佳值. 式 (1.1.2) 被称作 Hilbert 积分不等式.

式 (1.1.1) 与式 (1.1.2) 是分析学及相关领域的重要不等式, 它们的改进、推广及应用可见中外各类数学文献及不等式专著[3~6].

不等式 (1.1.1) 还可以用如下算子表示形式:

设 l^2 为实序列空间, $T:l^2\to l^2$ 为线性算子, 使对任意的 $a=\{a_m\}_{m=1}^{\infty}\in l^2$, 对应

$$c=\{c_n\}_{n=1}^{\infty}\in l^2,\quad c_n:=(Ta)(n)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{m+n},\quad n\in\mathbb{N} \tag{1.1.3}$$

($\mathbb{N}$ 表示正整数集, 下同). 对任意的 $b=\{b_n\}_{n=1}^{\infty}\in l^2$, 有如下内积表示形式:

$$(Ta,b)=(c,b)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{m+n}\right)b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n}. \tag{1.1.4}$$

用 $\|a\|_2=\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$ 表示 a 的范数, 联系式 (1.1.4), 式 (1.1.1) 可改写为如下抽象形式:

$$(Ta,b)<\pi\|a\|_2\|b\|_2, \tag{1.1.5}$$

这里, $\|a\|_2,\|b\|_2>0$. 可证 T 为有界线性算子[7], 且它的范数 $\|T\|_2=\pi$. 称 T 为 Hilbert 算子. 在 $\|a\|_2>0$ 的条件下, 还有与式 (1.1.5) 等价的算子不等式 $\|Ta\|_2<\pi\|a\|_2$, 具体即是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{m+n}\right)^2<\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2, \tag{1.1.6}$$

这里, 常数因子 π^2 仍为最佳值. 式 (1.1.6) 与式 (1.1.1) 等价[3].

类似地, 在实 $L^2(0,\infty)$ 空间中可以定义 Hilbert 积分算子 $\tilde{T}:L^2(0,\infty)\to L^2(0,\infty)$ 如下: 对任意 $f\in L^2(0,\infty)$, 对应 $h=\tilde{T}f\in L^2(0,\infty)$, 满足

$$(\tilde{T}f)(y)=h(y):=\int_0^{\infty}\frac{1}{x+y}f(x)\mathrm{d}x,\quad y\in(0,\infty). \tag{1.1.7}$$

对 $g\in L^2(0,\infty)$, 可建立如下内积表示形式:

$$(\tilde{T}f,g)=\int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty}\frac{1}{x+y}f(x)\mathrm{d}x\right)g(y)\mathrm{d}y=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{f(x)g(y)}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{1.1.8}$$

用 $\|f\|_2=\left(\int_0^{\infty}f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$ 表示 f 的范数. 若 $\|f\|_2,\|g\|_2>0$, 则式 (1.1.2) 可改写成如下抽象形式:

$$(\tilde{T}f,g)<\pi\|f\|_2\|g\|_2. \tag{1.1.9}$$

可证得[8] $\|\tilde{T}\|_2=\pi$ 且 $\|\tilde{T}f\|_2<\pi\|f\|_2$, 于是可得到式 (1.1.2) 的如下等价式[3]:

$$\int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty}\frac{f(x)}{x+y}\mathrm{d}x\right)^2\mathrm{d}y<\pi^2\int_0^{\infty}f^2(x)\mathrm{d}x, \tag{1.1.10}$$

这里, 常数因子 π^2 仍为最佳值. 显然, 式 (1.1.10) 是式 (1.1.6) 的积分类似形式.

Hilbert 不等式及其等价式的算子刻画深刻揭示了它们的构造特征. 本书将依托这一特性展开全方位、多角度的研究及讨论.

1.1.2 Hilbert 不等式的精确化

若令级数的下标从 0 开始, 则式 (1.1.1) 可等价地表示成如下形式:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n+2}<\pi\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n^2\sum_{n=0}^{\infty}b_n^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.1.11}$$

这里, 常数因子 π 仍为最佳值. 易提出如下疑问: 在使式 (1.1.11) 成立的前提下, 其核 $\dfrac{1}{m+n+2}$ 中的常数 2 能否取较小的值? 历史上, Hardy 等[3] 证明这是肯定的. 它就是如下较为精确的 Hilbert 不等式 (简称 Hilbert 不等式):

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n+1}<\pi\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n^2\sum_{n=0}^{\infty}b_n^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.1.12}$$

这里, 常数因子 π 仍为最佳值. 由于当 $a_m, b_n \geqslant 0, \alpha \geqslant 1$ 时, 有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n+\alpha}\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n+1},$$

因而在此条件下, 式 (1.1.12) 可导出如下含参数 $\alpha \geqslant 1$ 的推广不等式:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n+\alpha}<\pi\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n^2\sum_{n=0}^{\infty}b_n^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.1.13}$$

当 $1 \leqslant \alpha < 2$ 时, 式 (1.1.13) 显然是式 (1.1.11) 的改进. 等价地, 它也是式 (1.1.1) 的改进.

相应于式 (1.1.6), 易得式 (1.1.13) 的如下等价式:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_m}{m+n+\alpha}\right)^2<\pi^2\sum_{n=0}^{\infty}a_n^2,\quad \alpha \geqslant 1. \tag{1.1.14}$$

式 (1.1.14) 可认为是式 (1.1.6) 的改进 (当 $1 \leqslant \alpha < 2$ 时).

至于 $0 < \alpha < 1$ 的情形, 1936 年, Ingham[9] 得出: 当 $\alpha \geqslant \dfrac{1}{2}$ 时, 有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_m a_n}{m+n+\alpha}\leqslant\pi\sum_{n=0}^{\infty}a_n^2; \tag{1.1.15}$$

当 $0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$ 时, 有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_m a_n}{m+n+\alpha}\leqslant\frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}\sum_{n=0}^{\infty}a_n^2, \tag{1.1.16}$$

这可以说是式 (1.1.11) 的进一步 "精确化".

有趣的是, 若在式 (1.1.2) 中作变换 $x=X+\frac{\alpha}{2}, y=Y+\frac{\alpha}{2}, F(X)=f\left(X+\frac{\alpha}{2}\right)$, $G(Y)=g\left(Y+\frac{\alpha}{2}\right)$ $(\alpha\in\mathbb{R})$($\mathbb{R}$ 为实数集, 下同), 则它可等价地变为

$$\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\infty}\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\infty}\frac{F(X)G(Y)}{X+Y+\alpha}\mathrm{d}X\mathrm{d}Y<\pi\left(\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\infty}F^2(X)\mathrm{d}X\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\infty}G^2(X)\mathrm{d}X\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.1.17}$$

可见, 当 $\alpha\geqslant\frac{1}{2}$ 时, 式 (1.1.15) 类似于积分形式 (1.1.17)(令 $G=F$); 当 $0<\alpha<\frac{1}{2}$ 时, 由于常数因子改变了, 式 (1.1.16) 已不再类似于积分形式 (1.1.17).

应用改进的 Euler-Maclaurin 公式 (见第 2 章), Hilbert 不等式的精确化方法将催生出 Hilbert 型不等式精确化的一般思想方法 (详见文献 [10]~[17]). 本书将在第 5 章详细探讨 Hilbert 型不等式的精确化理论.

1.1.3　引入一对共轭指数的 Hilbert 不等式

1925 年, Hardy[18] 与 Riesz 引入一对共轭指数 $(p,q)\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$, 推广式 (1.1.1) 为如下形式: 若 $p>1, a_n, b_n\geqslant 0$, 满足 $0<\sum_{n=1}^{\infty}a_n^p<\infty, 0<\sum_{n=1}^{\infty}b_n^q<\infty$, 则有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n}<\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}b_n^q\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{1.1.18}$$

这里, 常数因子 $\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}$ 为最佳值. 其等价式为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{m+n}\right)^p<\left[\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\right]^p\sum_{n=1}^{\infty}a_n^p, \tag{1.1.19}$$

这里, 常数因子 $\left[\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\right]^p$ 仍为最佳值. 还可推广式 (1.1.12) 及式 (1.1.14)(当 $\alpha=1$ 时) 为如下较式 (1.1.18)、式 (1.1.19) 精确的等价形式[3]:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n+1}<\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n^q\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{1.1.20}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_m}{m+n+1}\right)^p<\left[\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\right]^p\sum_{n=0}^{\infty}a_n^p, \tag{1.1.21}$$

这里, 常数因子仍为最佳值. 相应的等价积分形式 (1.1.2) 与式 (1.1.10) 也得到如下最佳推广[3]:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y < \frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\left(\int_0^\infty f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^\infty g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}, \quad (1.1.22)$$

$$\int_0^\infty\left(\int_0^\infty \frac{f(x)}{x+y}\mathrm{d}x\right)^p\mathrm{d}y < \left[\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\right]^p\int_0^\infty f^p(x)\mathrm{d}x. \quad (1.1.23)$$

称式 (1.1.18) 为 Hardy-Hilbert 不等式; 称式 (1.1.20) 为较为精确的 Hardy-Hilbert 不等式 (简称 Hardy-Hilbert 不等式); 称式 (1.1.22) 为 Hardy-Hilbert 积分不等式.

式 (1.1.20) 还可以用如下算子形式表示: 设 l^p 为实序列空间,$T_p : l^p \to l^p$ 为线性算子, 使对任意非负数列 $a = \{a_m\}_{m=1}^\infty \in l^p$, 对应 $c = \{c_n\}_{n=1}^\infty \in l^p$, 满足

$$c_n := (T_p a)(n) = \sum_{m=0}^\infty \frac{a_m}{m+n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (1.1.24)$$

($\mathbb{N}_0 = \mathbb{N}\cup\{0\}$ 表示非负整数集, 下同). 对任意非负数列 $b = \{b_n\}_{n=1}^\infty \in l^q$, 有如下形式内积:

$$(T_p a, b) = \sum_{n=0}^\infty\left(\sum_{m=0}^\infty \frac{a_m}{m+n+1}\right)b_n = \sum_{n=0}^\infty\sum_{m=0}^\infty \frac{a_m b_n}{m+n+1}. \quad (1.1.25)$$

用 $\|a\|_p = \left(\sum\limits_{n=0}^\infty a_n^p\right)^{\frac{1}{p}}$ 表示 a 的范数, 则式 (1.1.20) 可改写为如下抽象的表示形式:

$$(T_p a, b) < \frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\|a\|_p\|b\|_q, \quad (1.1.26)$$

这里,$\|a\|_p, \|b\|_q > 0$, 称 T_p 为 Hardy-Hilbert 算子.

类似地, 在实 $L^p(0,\infty)$ 空间中, 还可以定义如下 Hardy-Hilbert 积分算子 $\tilde{T}_p : L^p(0,\infty) \to L^p(0,\infty)$: 对任意 $f(\geqslant 0) \in L^p(0,\infty)$, 对应 $h = \tilde{T}f \in L^p(0,\infty)$, 满足

$$(\tilde{T}_p f)(y) = h(y) := \int_0^\infty \frac{1}{x+y}f(x)\mathrm{d}x, \quad y \in (0,\infty). \quad (1.1.27)$$

对任意 $g(\geqslant 0) \in L^q(0,\infty)$, 可建立如下形式内积:

$$(\tilde{T}_p f, g) = \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{x+y}f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \quad (1.1.28)$$

用 $\|f\|_p = \left(\int_0^\infty f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$ 表示 f 的范数, 则式 (1.1.22) 可改写成如下抽象的表示形式:

$$(\tilde{T}_p f, g) < \frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\|f\|_p\|g\|_q. \quad (1.1.29)$$

同法还可改写式 (1.1.18)、式 (1.1.19)、式 (1.1.21) 及式 (1.1.23) 为抽象的算子与范数表示形式.

对于引入非共轭指数 (p,q) 及非独立参数 λ 的情形, 历史上有如下研究结果[3]: 若 $p>1,q>1,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\geqslant 1,0<\lambda=2-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\leqslant 1$, 则有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{(m+n)^{\lambda}}\leqslant K\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}b_n^q\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{1.1.30}$$

这里, $K=K(p,q)$ 只与 p,q 有关; 仅当 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\lambda=2-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 时 K 为最佳值.

在与式 (1.1.30) 相同的参数条件及常数下, 还有如下的积分类似形式:

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{f(x)g(y)}{(x+y)^{\lambda}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant K\left(\int_0^{\infty}f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\infty}g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.1.31}$$

式 (1.1.31) 的一个推广结果为: 设 $p>1,q>1,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>1,0<\lambda=2-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}<1$, 则有[4]

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)g(y)}{|x+y|^{\lambda}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant k(p,q)\left(\int_{-\infty}^{\infty}f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.1.32}$$

当 $f(x),g(x)=0,x\in(-\infty,0]$ 时, 式 (1.1.32) 成为式 (1.1.31). Levin[19] 还讨论了式 (1.1.30) 与式 (1.1.31) 的常数因子表示形式, 但却不能证明它们的最佳性. 1951 年, Bonsall[20] 进一步讨论了引入非共轭指数与非独立参数的一般核的情形.

1.1.4　核为 -1 齐次的双线型不等式及其特例

设 $\lambda>0,k_{\lambda}(x,y)$ 为 $(0,\infty)\times(0,\infty)$ 的可测函数, 使对任意 $x,y,u\in(0,\infty)$, 有关系式 $k_{\lambda}(ux,uy)=u^{-\lambda}k_{\lambda}(x,y)$, 则称 $k_{\lambda}(x,y)$ 为 $(0,\infty)\times(0,\infty)$ 上的 $-\lambda$ 齐次函数.

设 $(p,q)\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$ 为一对共轭指数, $p>1$, $k_1(x,y)\geqslant 0$ 为 $(0,\infty)\times(0,\infty)$ 的 -1 齐次函数. 若 $k=\int_0^{\infty}k_1(u,1)u^{-1/p}\mathrm{d}u$ 为有限数, 作变换 $u=\frac{1}{v}$, 则有 $k=\int_0^{\infty}k_1(1,v)v^{-1/q}\mathrm{d}v$ 及如下一对等价不等式[3]:

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}k_1(x,y)f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant k\left(\int_0^{\infty}f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\infty}g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{1.1.33}$$