LGB 理工类本科生

21世纪高等学校数学系列教材

线性代数

■ 张益群 杨 球 高遵海 叶牡才 唐博宇 编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

LGB 理工类本科生

Mathematics

21世纪高等学校数学系列教材

线性代数

■ 张益群 杨 球 高遵海 叶牡才 唐博宇 编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/张益群，杨球，高遵海，叶牡才，唐博宇编著．—武汉：武汉大学出版社，2008.7
21世纪高等学校数学系列教材
ISBN 978-7-307-06399-0

Ⅰ.线…　Ⅱ.①张…　②杨…　③高…　④叶…　⑤唐…　Ⅲ.线性代数—高等学校—教材　Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第093157号

责任编辑：李汉保　　　责任校对：刘　欣　　　版式设计：詹锦玲

出版发行：**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件：wdp4@whu.edu.cn 网址：www.wdp.whu.edu.cn)
印刷：湖北金海印务有限公司
开本：787×1092　1/16　印张：12.75　字数：306千字　插页：1
版次：2008年7月第1版　　2008年7月第1次印刷
ISBN 978-7-307-06399-0/O·388　　定价：27.00元

编委会

内容简介

本书是根据国家教育部高等学校线性代数课程的教学基本要求编写的。全书共分七章，内容包括：n阶行列式、线性变换与矩阵、向量空间、线性方程组、矩阵特征值问题、二次型、线性代数理论的应用等。在最后一章通过实例介绍了数学软件MATLAB在线性代数中的应用。其目的是培养学生运用现代数学软件学习线性代数和应用线性代数知识解决实际问题的能力。习题按节安排，全书后面还编写了六套总复习题、书末附有习题参考答案和总复习题的详细参考解答、便于学生练习检验，大量的练习题也可以供考研学生复习参考。

本书可以供理工科院校各专业本科生和经济管理专业本科生作为教材使用，也可以用做考研参考书，还可以供相关科技工作者阅读和参考。

序

数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的科学。长期以来，人们在认识世界和改造世界的过程中，数学作为一种精确的语言和一个有力的工具，在人类文明的进步和发展中，甚至在文化的层面上，一直发挥着重要的作用。作为各门科学的重要基础，作为人类文明的重要支柱，数学科学在很多重要的领域中已起到关键性、甚至决定性的作用。数学在当代科技、文化、社会、经济和国防等诸多领域中的特殊地位是不可忽视的。发展数学科学，是推进我国科学研究和技术发展，保障我国在各个重要领域中可持续发展的战略需要。高等学校作为人才培养的摇篮和基地，对大学生的数学教育，是所有的专业教育和文化教育中非常基础、非常重要的一个方面，而教材建设是课程建设的重要内容，是教学思想与教学内容的重要载体，因此显得尤为重要。

为了提高高等学校数学课程教材建设水平，由武汉大学数学与统计学院与武汉大学出版社联合倡议，策划，组建21世纪高等学校数学课程系列教材编委会，在一定范围内，联合多所高校合作编写数学课程系列教材，为高等学校从事数学教学和科研的教师，特别是长期从事教学且具有丰富教学经验的广大教师搭建一个交流和编写数学教材的平台。通过该平台，联合编写教材，交流教学经验，确保教材的编写质量，同时提高教材的编写与出版速度，有利于教材的不断更新，极力打造精品教材。

本着上述指导思想，我们组织编撰出版了这套21世纪高等学校数学课程系列教材。旨在提高高等学校数学课程的教育质量和教材建设水平。

参加21世纪高等学校数学课程系列教材编委会的高校有：武汉大学、华中科技大学、云南大学、云南民族大学、云南师范大学、昆明理工大学、武汉理工大学、湖南师范大学、重庆三峡学院、襄樊学院、华中农业大学、福州大学、长江大学、咸宁学院、中国地质大学、孝感学院、湖北第二师范学院、武汉工业学院、武汉科技学院、武汉科技大学、仰恩大学（福建泉州）、华中师范大学、湖北工业大学等20余所院校。

高等学校数学课程系列教材涵盖面很广，为了便于区分，我们约定在封首上以汉语拼音首写字母缩写注明教材类别，如：数学类本科生教材，注明：SB；理工类本科生教材，注明：LGB；文科与经济类教材，注明：WJ；理工类硕士生教材，注明：LGS，如此等等，以便于读者区分。

武汉大学出版社是中共中央宣传部与国家新闻出版署联合授予的全国优秀出版社之一。在国内有较高的知名度和社会影响力、武汉大学出版社愿尽其所能为国内高校的教学与科研服务。我们愿与各位朋友真诚合作，力争使该系列教材打造成为国内同类教材中的精品教材，为高等教育的发展贡献力量！

21世纪高等学校数学系列教材编委会

2007年7月

前　言

为了使高等教育教材更好地适应科学技术和经济发展的需要，更好地适应教学与改革的需要，武汉大学出版社策划、组建21世纪高等学校数学系列教材编委会，在一定范围内，组织高等学校从事数学教学和科研的老师进行积极的探索和交流，融汇并吸取了长期从事教学的教师所积累的丰富教学经验，合作编写了数学课程系列教材，本书是该套21世纪高等学校数学课程系列教材之一。

线性代数是高等学校理工科学生的一门重要基础课程，线性代数既是学习后续的数学课程和专业课程的必备基础，也是自然科学和工程技术领域中应用广泛的数学工具。随着计算机在各个领域的日益普及，线性代数在理论和应用两方面的重要性越来越突出，同时使得高等学校计算机、物理、信息工程、通信、自动控制、系统工程等专业对线性代数课程在内容的深度和广度上都提出了更高的要求。

本书是根据国家教育部高等学校线性代数课程的教学基本要求，参考全国硕士研究生数学入学考试大纲，并结合我们长期从事线性代数课程教学改革的研究与实践，为适应不同专业对线性代数的教学要求而编写的。在编写过程中，我们认真阅读了多种线性代数教材和硕士研究生入学考试复习教程，在基本保持传统线性代数体系和经典内容的同时，注重渗透现代教学思想和方法，在内容的取舍与编排上有所创新，在现有线性代数内容的基础上有所拓宽，使其内容更为丰富且更有深度，其目的是为了满足读者学习后续课程的需要。

线性代数是一门既严谨又抽象的课程。为了使学生既易于入门，又能领会数学抽象的概念，本书列举了许多具有实际背景的例子，从具体计算入手，逐步地、自然而然地建立抽象的概念和理论。该教材系统地介绍了线性代数的基本知识，将矩阵的概念、运算、秩和初等变换集中介绍，而向量组的线性相关性的讨论以矩阵为工具进行，线性方程组的求解是矩阵和向量理论的应用，重点建立矩阵和向量空间两大理论工具，并将它们贯穿于全书，以突出线性代数课程的核心内容，力求做到通俗易懂。

本书内容分为七章，前六章内容适用于理工和经济管理类本科专业的教学，第7章通过实例介绍了非常流行的数学软件 MATLAB 在线性代数中的应用，并在每节附有专门用MATLAB做的练习题，这对培养广大学生运用现代数学软件学习线性代数和应用代数知识解决实际问题都能起到良好的作用，本书配备了丰富的例题、习题和总复习题，以帮助读者加深对概念、理论的理解和掌握，习题按节安排，全书后面编写了六套总复习题，书末附有习题参考答案和总复习题的详细参考解答，便于学生练习检验。大量的练习题也可以供考研学生复习参考。

本教材第1章和第4章由叶牡才编写；第2章、第3章的§3.1～§3.4、第5章、第6章由张益群编写；第7章由杨球编写；第3章的第5节、第6节由高遵海编写；第1章～第6章的部分例题、习题、以及总复习题由田木生、唐博宇编写。教材最后由张益群审核定稿。在

编写过程中，我们参阅了国内外部分院校的相关教材，主要参考书目列于书后的参考文献；部分内容取自中国地质大学叶牡才教授、李星教授、沈远彤教授编写的《线性代数》一书。

在本书的编写过程中，我们得到了中国地质大学数学与物理学院的领导和老师的大力支持；本书从立项、组织编写到出版，一直得到武汉大学出版社与21世纪高等学校数学系列教材编委会的支持和关心；李汉保编辑详细审阅了全稿，并提出了许多宝贵的意见和建议，为本书的出版付出了辛勤的劳动，谨在此向他们表示衷心的感谢！

由于作者水平有限，书中难免有不妥之处和缺点，敬请广大读者批评指正。

作　者

2008年6月

目　录

第 1 章　n 阶行列式

行列式不仅是线性代数中的一个重要概念，而且是后续课程及解决许多工程技术问题强有力的数学工具. 本章通过求解二元与三元线性方程组，引出二阶、三阶行列式，然后推广到 n 阶，即讨论 n 阶行列式的问题.

§1.1　引　　例

设有二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1-1}$$

用加减消元法解该方程组：

用 a_{22} 乘第一式各项，得

$$a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_1a_{22} \tag{1-2}$$

用 a_{12} 乘第二式各项，又得

$$a_{12}a_{21}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_2a_{12} \tag{1-3}$$

式(1-2)减式(1-3)消去 x_2，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，有

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

同理，在方程组(1-1)中用 a_{21} 乘第一式各项，用 a_{11} 乘第二式各项，然后相减，当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，得

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

于是，当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，方程组(1-1)的解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases} \tag{1-4}$$

为了便于记忆和应用，引入新的符号表示式(1-4)这个结果，令

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1-5}$$

并把式(1-5)叫做一个二阶行列式. 利用式(1-5)，可以把式(1-4)中 x_1 与 x_2 表达式的分子分别表示为

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\qquad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

则当行列式 $D\neq 0$ 时，方程组(1-1)有惟一解，即

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D} \tag{1-6}$$

记号 D 表示对应于线性方程组的系数行列式.

对于含有三个未知量的三个方程所组成的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{1-7}$$

用加减消元法，当

$$D=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\neq 0$$

时，可以得式(1-7)的解.

与引进二阶行列式一样，用符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

来表示 D，即

$$\begin{aligned} D=&\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ =&a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned} \tag{1-8}$$

式(1-8)称为三阶行列式.

在 D 中把第一列、第二列、第三列元素分别换成式(1-7)中的常数项，得到 D_1、D_2、D_3，当 $D\neq 0$ 时，方程组(1-7)有惟一解，即

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D} \tag{1-9}$$

如何把二阶、三阶行列式的意义推广到一般的 n 阶行列式，并利用 n 阶行列式来表达由 n 个未知量 n 个方程所组成的线性方程组的解呢？从上面的推导可知，由两个未知量消去一个比较容易，而由三个未知量消去两个就已经很麻烦了. 对于一般情形，在 n 个未知量中消去 $n-1$ 个，在理论上虽然是可能的，但要具体实施，其难度可想而知. 因此，n 阶行列式的定义也就不宜用上面的类似方法导得.

§1.2 n 阶行列式的概念

1.2.1 排列与逆序数

为了给出 n 阶行列式的定义，我们来研究一下三阶行列式的结构，找出其内在的规律，从方程组(1-7)的求解公式中，观察 x_1,x_2,x_3 的分母各项，其中每一项都可以写成下面的形式

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

其中 j_1,j_2,j_3 是正整数 1,2,3 的某排列，而数字 1,2,3 的所有排列为

$$123,231,312,321,132,213$$

这些排列正好是式(1-8)中各项的第二个下标，至于各项所带的符号，当它们的第一个下标都按自然数顺序排列时，则依赖于第二个下标的排列顺序. 为此，引入逆序、逆序数的概念.

定义 1.1　由 n 个正整数 $1,2,\cdots,n$ 构成的一个 n 级排列 $S_1S_2\cdots S_n$，如果有较大的数 S_i 排在较小的数 S_j 的前面($S_i>S_j$)，则称 S_i 与 S_j 构成一个逆序. 一个 n 级排列中逆序的总数，称为这个排列的逆序数，记为

$$\tau(S_1S_2\cdots S_n)$$

如果排列 $S_1S_2\cdots S_n$ 的逆序数 $\tau(S_1S_2\cdots S_n)$ 是奇数，则称为奇排列，是偶数则称为偶排列.

例如，5 级排列 43152 的逆序数为 6，即 $\tau(43152)=6$. 所以 43152 为偶排列.

排列 34152 的逆序数是 5，是奇排列.

排列 $12\cdots n$ 的逆序数是零，是偶排列.

关于逆序数还有如下结论：

定理 1.1　一个排列中的任意两个数对调，其逆序数的奇偶性改变.

证　先讨论对调相邻两个数码的特殊情形，设排列为 $AijB$，其中 A、B 表示除 i、j 两个数码外其余的数码；调换相邻两数码 i、j，变为排列 $AjiB$，比较两排列中的逆序数，显然 A、B 数码的次序没有改变，仅改变了 i 与 j 的次序. 因此，当 $i<j$ 时，经调换后，i、j 两数构成逆序，排列的逆序数增加 1，当 $i>j$ 时，经调换后两数不构成逆序，排列的逆序数减少 1，所以调换 i、j 改变 $AijB$ 逆序数的奇偶性.

再考虑一般情形，设排列为

$$AiS_1S_2\cdots S_kjB$$

经调换 i、j，变为排列

$$AjS_1S_2\cdots S_kiB$$

新排列可以由原排列中数码 i 依次与 $S_1,S_2,\cdots,S_k,j$ 作 $k+1$ 次相邻调换，变换为

$$AS_1S_2\cdots S_kjiB$$

再将 j 依次与 $S_k,\cdots,S_2,S_1$ 作 k 次相邻调换得到，即新排列可以由原排列共经过 $2k+1$ 次相邻调换得到，所以调换 i、j 改变了逆序数的奇偶性.

1.2.2　n 阶行列式的定义

对于引例中的式(1-5)可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum(-1)^{\tau}a_{1j_1}a_{2j_2}$$

其中 τ 为排列 j_1j_2 的逆序数，$\sum$ 表示对 1、2 两个数的所有排列求和.

对于引例中式(1-8)可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum(-1)^{\tau}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

其中 τ 为排列 $j_1j_2j_3$ 的逆序数，$\sum$ 表示对 1、2、3 三个数的所有排列 $j_1j_2j_3$ 求和．

仿此，我们把行列式的概念推广到 n 阶．

定义 1.2 设 n^2 个数，排成 n 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

作出表中位于不同行不同列的 n 个数的乘积，并冠以符号 $(-1)^{\tau}$；得到形如

$$(-1)^{\tau}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

的项，其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，τ 为这个排列的逆序数. 这样的排列共有 $n!$ 个，称 $n!$ 项的代数和

$$\sum(-1)^{\tau}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

为 n 阶行列式，记做

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{\tau}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1-10}$$

简记为 $\det(a_{ij})$，a_{ij} 称为行列式第 i 行第 j 列的元素.

例 1 求对角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的值.

解 根据行列式的定义得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{\tau}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

且当 $1<j_1\leqslant n$ 时，$a_{1j_1}=0$，而当 $a_{1j_1}=a_{11}$ 时，$2\leqslant j_2\leqslant n$，但当 $2<j_2\leqslant n$ 时，$a_{2j_2}=0$，所以取 $a_{2j_2}=a_{22}$，此时 $3\leqslant j\leqslant n$，但当 $3<j_3\leqslant n$ 时，$a_{3j_3}=0$，所以取 $a_{3j_3}=a_{33}$，这样继续下去，就得到 n 阶行列式，除 $(-1)^{\tau}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 这一项外，其他各项都等于 0，而 $\tau(123\cdots n)=0$，所以

$$原式=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 2 求行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

的值.

解　由 n 阶行列式的定义知:当 $1\leqslant j_1\leqslant n-1$ 时,$a_{1j_1}=0$,所以取 $j_1=n$,即 $a_{1j_1}=a_{1n}$;当 $1\leqslant j_2<n-1$ 时,$a_{2j_2}=0$,所以取 $a_{2j_2}=a_{2,n-1}$,仿此,$a_{3j_3}=a_{3,n-2},\cdots,a_{nj_n}=a_{n1}$,这样就得到该 n 阶行列式除

$$(-1)^{\tau}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

这一项外,其他各项都等于 0,而

$$\tau(n\cdots 321)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}$$

所以

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

类似地可以证明,上三角形、下三角形行列式的值分别为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

类似的还有

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

上述结论很重要,这个结论提供了一个计算 n 阶行列式的重要方法. 因为按定义计算一个 n 阶行列式,需要计算出 $n!$ 个项,而每一项又需要进行 $n-1$ 次乘法运算,这项工作是十分繁琐的,这样就使我们想到能否将原行列式的某些元素全化为零呢? 如果可以,那么 n 阶行列式的值很快就可以算出来了,但如何化呢? 下一节我们将解决这个问题.

n 阶行列式的定义中决定各项符号的规则还可以由下面的结论来替代.

定理 1.2　n 阶行列式 D 的一般项可以记为

$$(-1)^{S+T}a_{i_1j_1}\,a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n} \tag{1-11}$$

其中 S 与 T 分别为 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 与 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数.

证　由于 $i_1i_2\cdots i_n$ 与 $j_1j_2\cdots j_n$ 都是 n 级排列,因此,式(1-11)中的 n 个元素是取自 D 的不同的行不同的列.

若交换式(1-11)中两个元素 $a_{i_sj_s}$ 与 $a_{i_tj_t}$,则其行标排列由 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 换为 $i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$,由定理 1.1 可知其逆序数奇偶性改变;列标排列由 $j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n$ 换为$j_1\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n$,

其逆序数奇偶性亦改变.但对变换后两下标排列逆序数之和的奇偶性则不变,即有

$$(-1)^{\tau(i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n)+\tau(j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n)}=(-1)^{\tau(i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n)+\tau(j_1\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n)}$$

所以交换式(1-11)中元素的位置,其符号不改变.这样总可以经过有限次交换式(1-11)中元素的位置,使其行标 $i_1i_2\cdots i_n$ 换为自然数顺序排列,设此时列标排列变为 $p_1p_2\cdots p_n$,则式(1-11)变为

$$(-1)^{\tau(12\cdots n)+\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

上式即为定义 1.2 中 D 的一般项,也就是说 D 的一般项也可以记为式(1-11)的形式.

如果将行列式中各项的第二个下标按自然数顺序排列,则相应的第一个下标排列记做 $q_1q_2\cdots q_n$,于是由定理 1.2,行列式(1-10)又可以定义为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{\tau}a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn} \tag{1-12}$$

其中 τ 为排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 的逆序数,$\sum$ 是对 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列求和.

习题 1.2

1. 求下列各排列的逆序数

(1)134782695;(2)987654321.

2. 计算下列行列式

(1) $\begin{vmatrix} 6 & 42 & 27 \\ 8 & -28 & 36 \\ 20 & 35 & 135 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 10 & 8 & 2 \\ 15 & 12 & 3 \\ 20 & 32 & 12 \end{vmatrix}$

3. 试在五阶行列式中,确定下列各式前应取什么符号:

(1)$a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}a_{55}$;(2)$a_{21}a_{13}a_{34}a_{55}a_{42}$

4. 用行列式的定义证明

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0$$

5. 当 k 取何值时下式成立?

$$\begin{vmatrix} k & 3 & 4 \\ -1 & k & 0 \\ 0 & k & 1 \end{vmatrix}=0$$

6. 设一个 n 阶行列式中零元素的个数多于 n^2-n 个,证明这个行列式等于零.