大學叢書

高等統計學

下冊

陳超塵 編著

臺灣商務印書館 發行

大 學 叢 書

高 等 統 計 學

下 册

陳超塵編著

臺灣商務印書館發行

高等統計學 / 陳超塵編著. -- 初版. -- 臺北
市：臺灣商務, 1997 [民86]
冊； 公分. -- (大學叢書)
ISBN 957-05-1392-6 (一套：平裝)

1. 統計學

510　　　　86003429

大學叢書

高等統計學 二冊

定價新臺幣 800 元

編著者　陳超塵
責任編輯　王林齡
校對者　鄭銀鐘　陳淑純
發行人　張連生
出版者 印刷所　臺灣商務印書館股份有限公司
臺北市重慶南路 1 段 37 號
電話：(02)3116118・3115538
傳眞：(02)3710274
郵政劃撥：0000165-1 號
出版事業登記證：局版臺業字第 0836 號

・1997 年 5 月初版第一次印刷

ISBN 957-05-1392-6 (一套：平裝)　　08207000

高等統計學（下冊）

目　次

第叁篇　統計推論的基本原理與方法

第伍篇　統計推論方法的擴展

第陸篇　總　論

第 叁 篇

統計推論的
基本原理與方法

前在第一章中曾提及，所謂統計推論 (statistical inference)，是指如何由樣本推論全體而獲得一般性結論的過程。統計推論順次包括三方面的內涵，第一是統計推論的基本原理與方法，第二是線性模型的估計與應用。這兩方面的內涵通常均含有兩個假定在內，其一是假定母體為常態分配，另一是假定在推論過程中樣本範圍固定不變。為放鬆此兩假定，乃有第三套內涵。第一套內涵順次包括三部分，即點推定、區間推定與假設檢定，此將在第十二至十五肆章中說明之。第二套內涵包括兩部分，即迴歸分析與變異數分析，此將在第十六及十七兩章中說明之。第三套內涵亦包括兩部分，其一是逐次分析法，這是推論過程中樣本範圍逐漸加大的分析方法，此將在第十八章中說明之；另一是無參數統計方法，這是不拘母體分配型態的分析方法，此將在第十九章中說明之。

第十二章　點推定

I.　點推定的意義與導出

一、點推定的意義與範圍

1. 統計推論的基本過程　統計推論的最終目的是檢定對全體參數所下的假設是否成立，為達於此目的，首先必須由全體中抽取一組隨機樣本，求算一個統計量以推估此一未知參數，此過程即為所謂的點推定。點推定只推估了全體參數的一個可能數值，為能瞭解推估的誤差有多大，則又必須進一步以點推定的結果為基礎進行區間推定。有了這兩方面的知識以後，即可更進一步進行統計假設的檢定工作。由此可知，統計推論的基本內涵順次包括三方面，即點推定、區間推定與假設檢定。

2. 點推定的意義　所謂點推定 (point estimation)，即根據樣本資料以決定母體未知參數最佳估計值的方法。其過程如下：

$$\text{樣本資料} \xrightarrow{\text{代入}} \underset{\text{（點推定量）}}{\text{樣本統計量}} \xrightarrow{\text{求得}} \underset{\text{（點推定值）}}{\text{確定數值}} \xrightarrow{\text{估計}} \text{未知參數}$$

由此過程可看出，點推定工作分為兩個階段來進行。第一個階段是先決定一個利用樣本資料的方式，亦即先決定一個適當的樣本統計量，此在點推定中稱之為點推定量 (point estimator)，簡稱推定量。第二個階段是將樣本資料代入此推定量求得一個確定的數值，以此確定

數值去推估未知參數，此確定數值在點推定中稱之為點推定值 (point estimate)，簡稱推定值。有了推定量以後求推定值甚為簡單，只要將樣本資料代入推定量予以化簡即可，這是一種機械性的運算，不影響推定結果的可靠度。影響推定結果可靠度的是第一個階段，即樣本資料的利用方式，亦即所謂的推定量，推定量不同，雖樣本資料不變，但所求得的推定值不同，如此即影響推定結果的可靠度。由此可知，點推定研究的對象是點推定量，不是點推定值。

3. 點推定的範圍 一個參數的點推定量可能為數很多，例如可以用樣本的均數 $\overline{X}$ 去推估母體的均數 μ，也可以用樣本的中位數 Me 去推估母體的均數 μ，諸如此類像這樣的推定量還有很多。如此即產生兩個問題，即第一、用什麼標準去評判一個推定量的好壞，第二、用什麼方法把好的推定量找出來。因此點推定的研究範圍包含兩部分，第一部分是推定量的評判準則，第二部分是尋求推定量的方法，此將在第 II 及第 III 兩大節中說明之。

二、由統計決策理論導出點推定

統計決策理論 (statistical decision theory) 是統計推論的上層理論，由統計決策理論導出點推定，可以居高臨下看出點推定的許多基本特質。茲舉例以說明之。

設有一個母體，其機率密度函數為下列常態分配：

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2} = n(x;\mu,1) \qquad \begin{array}{l} -\infty < x < \infty \\ -\infty < \mu < \infty \end{array}$$

其均數 μ 為未知，但知其所在範圍為 $(-\infty,\infty)$；其變異數 $\sigma^2 = 1$。今由其中隨機抽取 n 個變量為一組樣本，各變量為 $X_1, X_2, \cdots, X_n$。試據此以討論 μ 的點推定問題。

此為一個統計決策問題，其解決方法含有七個步驟，茲順次說明如下：

1. 確定樣本空間　每一組樣本可以坐標圖中的一點表示之，此稱之為樣本點 (sample point)，所有可能樣本的樣本點的集合稱之為樣本空間 (sample space)。本例之樣本空間為：

$$S = \{(X_1, X_2, \cdots, X_n) : -\infty < X_i < \infty;\ i = 1, 2, \cdots, n\}$$

式中 S 代表樣本空間，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 代表 n 維樣本空間中的一個樣本點。因常態分配為連續分配，故此樣本空間亦為一個連續空間；又因常態變量的所在範圍為 $(-\infty, \infty)$，故此樣本空間為 n 維空間的全部。此 n 維空間中的任一點即為一個樣本點，代表一組可能出現的樣本。

確定樣本空間的目的是「知己」。

2. 確定參數空間　參數所有可能數值的集合稱之為參數空間 (parameter space)。本例之未知參數為母體的均數 μ，其所在範圍為 $(-\infty, \infty)$，故本例之參數空間為：

$$\Omega = \{\mu : -\infty < \mu < \infty\}$$

式中 Ω 代表參數空間。本例之參數空間為一維空間的全部，其中任一點代表母體均數 μ 的一個可能數值。本例之母體分配為均數 μ 為未知的常態分配，μ 確定後，該常態分配即行確定，這是要對 μ 進行推定的原因。

確定參數空間的目的是「知彼」。

3. 設定行動空間　行動是用來判斷未知參數的，一個決策問題所有可能採取的行動的集合稱之為行動空間 (action space)。在點推定上，行動空間有兩個特點，其一是行動空間與參數空間完全一致，另一是行動即為點推定量。事實上，這兩個特點是互有關聯的，即如果行動空間與參數空間完全一致，則行動必即為點推定量；反之亦然。當然行動空間不一定要與參數空間完全一致，但以完全一致者為最簡單。本例之行動空間為：

$$A = \{a : -\infty < a < \infty\}$$

$$a = \hat{\mu}$$

式中 a 代表個別行動，A 代表行動空間。$\hat{\mu}$ 為 μ 的推定量，$a = \hat{\mu}$ 是指所採行動 a 即為 μ 的推定量。又此行動空間與上述參數空間完全一致，均為一維空間的全部。

設定行動空間的目的在將最後判斷的可能結果全部列出來，俾知何去何從，從而能瞻前顧後。簡言之，即設定行動空間的目的是「瞻顧」。

4. 建立決策函數 決策函數 (decision function) 的一般形式為：

$$d(X_1, X_2, \cdots, X_n) = a$$

$d(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是指決策函數為樣本的函數，代表利用樣本資料的方式。$d(X_1, X_2, \cdots, X_n) = a$ 是指函數的結果與行動結合的方式。這兩部分是否確當均影響決策的好壞。一個好的決策函數不但可獲得正確的結論，同時可獲得可靠的結論。由此可知，決策函數為決策過程中最重要的項目，決策函數不佳，其他一切努力均屬枉然。又由上式可看出，決策函數為樣本與行動之間的關係式，為利用樣本資料進行判斷的一種決策機制，其情形如下：

$$\text{樣本} \xrightarrow{\text{通過}} \text{決策函數} \xrightarrow{\text{採取}} \text{行動} \xrightarrow{\text{判斷}} \text{未知參數}$$

由此可知，建立決策函數的目的是「謀斷」。決策函數的前段是「慎謀」，後段是「能斷」。

本例之決策函數為數甚多，茲舉出比較具有代表性的三種決策函數加以討論，其情形如下：

(1)第一種決策函數為樣本的均數 $\overline{X}$，即

$$a = d_1(X_1, X_2, \cdots, X_n) = \frac{1}{n}\sum X = \overline{X}$$

此決策函數是指將樣本資料求成算術平均數 $\overline{X}$，以推估全體的均

數 μ，即 $\hat{\mu}=\overline{X}$。

(2)第二種決策函數為樣本中第一個出現的變量 X_1，即

$$a=d_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$$
$$=1X_1+0X_2+\cdots+0X_n=X_1$$

此決策函數是指即採用樣本第一個出現的變量 X_1 以推估全體的均數 μ，即 $\hat{\mu}=X_1$，其他變量均棄置不用。

(3)第三種決策函數為常數 5，意即根本不用任何樣本資料，而隨便亂猜，即

$$a=d_3(X_1,X_2,\cdots,X_n)$$
$$=0X_1+0X_2+\cdots+0X_n+5=5$$

此決策函數是指隨便舉一個數字假定是 5，來推估全體的均數 μ，即 $\hat{\mu}=5$。

根據直覺判斷，當然是第一種決策函數亦即推定量為最佳，因其採用了樣本中的全部資料；第二種次之，因其在樣本的 n 個變量中，只用了第一個變量，而將其餘的 $n-1$ 個變量棄置不用；而以第三種推定量為最差，因其根本未用任何樣本資料，亦即根本不顧事實而隨便亂猜。這是直覺上的判斷，但科學之所以為科學，是要有理論依據，不能全憑直覺，統計決策理論即是提供此理論依據的學問。

5. 選定損失函數　為能評判推定量的優劣，必須對錯誤的推估一種懲罰，此懲罰以具體數字表示者稱之為損失。在通常情況下，小錯誤給予小損失，大錯誤給予大損失，因此損失是錯誤程度的函數，稱之為損失函數 (loss function)。又誤差有正有負，誤差不論正負皆是誤差，為消除此困擾，損失函數通常均取錯誤程度的平方，如此不但可消除此困擾，同時對大誤差加重其懲罰，亦頗合理。就本例而言，a 為推估的手段亦即推定量，μ 為推估的對象，推估的誤差為 $a-\mu$，取其平方即得損失函數如下：

$$l(a;\mu)=(a-\mu)^2$$

此種損失函數稱為平方誤差損失函數 (squared error loss function)，最為常用。此函數當推估無誤時，$a=\mu, l=0$；推估有誤時，$a\neq\mu, l>0$；合於損失函數的基本要求。

選定損失函數的目的是「辨別」，亦即辨別決策函數的好壞。

6. 求算風險函數 上列損失函數中，推定量$a=d(X_1,X_2,\cdots,X_n)$為樣本的函數，是一個隨機變數，如此損失 l 也成為一個隨機變數，其結果損失的大小隨所出現樣本之不同而異，缺乏客觀性。其解決之法是求算損失函數的期望數，亦即求算所有可能樣本下損失的平均數，作為評判推定量是否為優的依據。損失函數的期望數稱為風險函數 (risk function)。由此可知，求算風險函數的目的是「通評」，亦即進行通盤的評量。本例所列舉的三個決策函數，其風險函數可求得如下：

(1)第一種決策函數的風險函數為：

$$\begin{aligned}R_{d1}(\mu)&=E[(a-\mu)^2]=E[(\overline{X}-\mu)^2]\\&=\int_{-\infty}^{\infty}(\overline{x}-\mu)^2f(\overline{x})d\overline{x}\\&=\frac{\sigma^2}{n}=\frac{1}{n}\end{aligned}$$

(2)第二種決策函數的風險函數為：

$$\begin{aligned}R_{d2}(\mu)&=E[(a-\mu)^2]=E[(X_1-\mu)^2]\\&=\int_{-\infty}^{\infty}(x_1-\mu)^2f(x)dx\\&=\sigma^2=1\end{aligned}$$

(3)第三種決策函數的風險函數為：

$$\begin{aligned}R_{d3}(\mu)&=E[(a-\mu)^2]=E[(5-\mu)^2]\\&=(5-\mu)^2\end{aligned}$$