

大學叢書

高等統計學

下 冊

陳超塵 編著

臺灣商務印書館 發行

大學叢書

高等統計學

下冊

陳超塵編著

臺灣商務印書館發行

高等統計學 / 陳超塵編著。-- 初版。-- 臺北市：臺灣商務，1997 [民86]
冊；公分。-- (大學叢書)
ISBN 957-05-1392-6 (一套：平裝)

I. 統計學

510

86003429

大學叢書

高等統計學二冊

定價新臺幣 800 元

編著者	陳超塵
責任編輯	王林齡
校對者	鄭銀鐘 陳淑純
發行人	張連生
出版者	臺灣商務印書館股份有限公司
印刷	臺北市重慶南路一段37號
	電話：(02)3116118・3115538
	傳真：(02)3710274
	郵政劃線：0000165-1號
	出版事業：局版臺業字第0836號
	登記證

• 1997年5月初版第一次印刷

版權所有・翻印必究

ISBN 957-05-1392-6 (一套：平裝)

08207000

高等統計學 (下冊)

目 次

第參篇 統計推論的基本原理與方法

第十二章 點推定	361
I. 點推定的意義與導出	361
一、點推定的意義與範圍	361
二、由統計決策理論導出點推定	362
II. 評判推定量的準則	369
一、不偏性	369
二、一致性	374
三、漸近有效性	379
四、充分性	387
五、最小變異不偏性	394
六、各種評判準則的比較	400
III. 尋求推定量的方法	401
一、最概法	402
二、動差法	407
三、貝氏推定法	409
四、各種推定方法的比較	418

摘 要.....	420
問 題.....	423
第十三章 區間推定	429
I. 區間推定的意義與導出.....	429
一、區間推定的意義與作成.....	429
二、最佳信賴區間的探討.....	433
三、由統計決策理論導出區間推定.....	438
II. 建立信賴區間的方法.....	442
一、建立信賴區間的一般方法.....	442
二、建立信賴區間的特殊方法.....	448
III. 各種情況及對象下的區間推定.....	451
一、常態母體均數的區間推定.....	451
二、常態母體變異數的區間推定.....	456
三、常態母體均數與變異數的聯合區間推定.....	459
四、點二項母體均數的區間推定.....	462
五、大樣本下母體參數的區間推定.....	464
六、多個母體均數差的區間推定.....	470
摘 要.....	477
問 題.....	479
第十四章 統計假設的檢定(一)	483
I. 假設檢定的意義與導出.....	483
一、假設檢定的意義與作成.....	483
二、由統計決策理論導出假設檢定.....	488
三、傳統的檢定方式.....	500
II. 最佳檢定的探討.....	504
一、最佳檢定的意義與影響因素.....	504

二、簡單假設下最佳檢定的探討	510
三、複合假設下最佳檢定的探討——對立假設在虛無假設 一邊的複合假設	527
四、複合假設下最佳檢定的探討——對立假設在虛無假設 兩邊的複合假設	533
第十五章 統計假設的檢定(二)	541
III. 尋求檢定的方法	541
一、一般概度比檢定	541
二、常態母體均數假設的檢定	549
三、常態母體變異數假設的檢定	556
四、配合適合度的檢定	561
五、獨立性的檢定	567
摘要	577
問題	580

第肆篇 線性模型及其分析方法

第十六章 迴歸分析	589
一、迴歸分析的意義與內涵	589
I. 簡單常態線性模型	592
一、簡單常態線性模型的意義	592
二、點推定	594
三、區間推定與假設檢定	599
四、預測	602
五、鑑定	607
II. 多元常態線性模型	612

一、多元常態線性模型的意義	612
二、點推定	614
三、區間推定與假設檢定	620
III. 一般線性模型	625
一、簡單一般線性模型	625
二、多元一般線性模型	631
摘要	633
問題	637
第十七章 變異數分析	641
一、變異數分析的意義與特質	641
I. 點推定	644
一、問題及其解決途徑	644
二、最基本的一組可推定函數	647
三、由標準方程式導出的一組基本可推定函數	652
II. 假設檢定與區間推定	660
一、假設檢定	660
二、區間推定	670
III. 分類模型	673
一、單向分類模型	673
二、兩向分類模型	678
摘要	685
問題	689

第十八章 逐次分析法	695
一、逐次分析法的意義與特質	695
I. 理論與方法	698
一、逐次分析法的作成	698
二、檢定力函數	705
三、平均樣本範圍	710
II. 應用方式	714
一、抽樣檢查	715
二、逐次抽查	719
三、常態母體均數的逐次檢定	724
摘要	728
問題	731
第十九章 無參數統計方法	735
I. 無參數統計方法的意義與基本分配	735
一、無參數統計方法的意義與特質	735
二、基本分配	737
II. 一個母體的推論	741
一、母體地位常數與差量的推論方法	741
二、容受界限	748
III. 兩個母體的比較	750
一、兩母體比較的方法	750
二、連檢定法	753
三、中位數檢定法	757
四、兩母體中位數差的信賴區間	761
五、序數檢定法	765

六、檢定效率的比較	768
摘要	774
問題	779

第陸篇 總 論

第二十章 總 論	785
一、統計學的基本架構	785
二、機率論研究的對象與體系	787
三、抽樣分配及其體系	791
四、統計推論的基本原理	798
五、線性模型的建立與推論	805
六、統計推論方法的擴展	812
七、統計方法的基本工具	815
八、資訊利用與推論的可靠度	818
九、統計學的原則	823
機率分配數值表	827
一、標準常態分配數值表	829
二、卡方分配數值表	830
三、 F 分配數值表	831
四、 t 分配數值表	835
五、 t 化全距分配數值表	836
索 引	839

第 參 篇

統計推論的 基本原理與方法

前在第一章中曾提及，所謂統計推論 (statistical inference)，是指如何由樣本推論全體而獲得一般性結論的過程。統計推論順次包括三方面的內涵，第一是統計推論的基本原理與方法，第二是線性模型的估計與應用。這兩方面的內涵通常均含有兩個假定在內，其一是假定母體為常態分配，另一是假定在推論過程中樣本範圍固定不變。為放鬆此兩假定，乃有第三套內涵。第一套內涵順次包括三部分，即點推定、區間推定與假設檢定，此將在第十二至十五章中說明之。第二套內涵包括兩部分，即迴歸分析與變異數分析，此將在第十六及十七兩章中說明之。第三套內涵亦包括兩部分，其一是逐次分析法，這是推論過程中樣本範圍逐漸加大的分析方法，此將在第十八章中說明之；另一是無參數統計方法，這是不拘母體分配型態的分析方法，此將在第十九章中說明之。

第十二章 點推定

I. 點推定的意義與導出

一、點推定的意義與範圍

1. **統計推論的基本過程** 統計推論的最終目的是檢定對全體參數所下的假設是否成立，為達於此目的，首先必須由全體中抽取一組隨機樣本，求算一個統計量以推估此一未知參數，此過程即為所謂的點推定。點推定只推估了全體參數的一個可能數值，為能瞭解推估的誤差有多大，則又必須進一步以點推定的結果為基礎進行區間推定。有了這兩方面的知識以後，即可更進一步進行統計假設的檢定工作。由此可知，統計推論的基本內涵順次包括三方面，即點推定、區間推定與假設檢定。

2. **點推定的意義** 所謂點推定 (point estimation)，即根據樣本資料以決定母體未知參數最佳估計值的方法。其過程如下：



由此過程可看出，點推定工作分為兩個階段來進行。第一個階段是先決定一個利用樣本資料的方式，亦即先決定一個適當的樣本統計量，此在點推定中稱之為點推定量 (point estimator)，簡稱推定量。第二個階段是將樣本資料代入此推定量求得一個確定的數值，以此確定

數值去推估未知參數，此確定數值在點推定中稱之為點推定值 (point estimate)，簡稱推定值。有了推定量以後求推定值甚為簡單，只要將樣本資料代入推定量予以化簡即可，這是一種機械性的運算，不影響推定結果的可靠度。影響推定結果可靠度的是第一個階段，即樣本資料的利用方式，亦即所謂的推定量，推定量不同，雖樣本資料不變，但所求得的推定值不同，如此即影響推定結果的可靠度。由此可知，點推定研究的對象是點推定量，不是點推定值。

3. 點推定的範圍 一個參數的點推定量可能為數很多，例如可以用樣本的均數 \bar{x} 去推估母體的均數 μ ，也可以用樣本的中位數 Me 去推估母體的均數 μ ，諸如此類像這樣的推定量還有很多。如此即產生兩個問題，即第一、用什麼標準去評判一個推定量的好壞，第二、用什麼方法把好的推定量找出來。因此點推定的研究範圍包含兩部分，第一部分是推定量的評判準則，第二部分是尋求推定量的方法，此將在第Ⅱ及第Ⅲ兩大節中說明之。

二、由統計決策理論導出點推定

統計決策理論 (statistical decision theory) 是統計推論的上層理論，由統計決策理論導出點推定，可以居高臨下看出點推定的許多基本特質。茲舉例以說明之。

設有一個母體，其機率密度函數為下列常態分配：

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2} = n(x; \mu, 1) \quad \begin{array}{l} -\infty < x < \infty \\ -\infty < \mu < \infty \end{array}$$

其均數 μ 為未知，但知其所在範圍為 $(-\infty, \infty)$ ；其變異數 $\sigma^2 = 1$ 。今由其中隨機抽取 n 個變量為一組樣本，各變量為 X_1, X_2, \dots, X_n 。試據此以討論 μ 的點推定問題。

此為一個統計決策問題，其解決方法含有七個步驟，茲順次說明如下：

1. 確定樣本空間 每一組樣本可以坐標圖中的一點表示之，此稱之為樣本點 (sample point)，所有可能樣本的樣本點的集合稱之為樣本空間 (sample space)。本例之樣本空間為：

$$S = \{(X_1, X_2, \dots, X_n) : -\infty < X_i < \infty; i = 1, 2, \dots, n\}$$

式中 S 代表樣本空間， (X_1, X_2, \dots, X_n) 代表 n 維樣本空間中的一個樣本點。因常態分配為連續分配，故此樣本空間亦為一個連續空間；又因常態變量的所在範圍為 $(-\infty, \infty)$ ，故此樣本空間為 n 維空間的全部。此 n 維空間中的任一點即為一個樣本點，代表一組可能出現的樣本。

確定樣本空間的目的是「知己」。

2. 確定參數空間 參數所有可能數值的集合稱之為參數空間 (parameter space)。本例之未知參數為母體的均數 μ ，其所在範圍為 $(-\infty, \infty)$ ，故本例之參數空間為：

$$\Omega = \{\mu : -\infty < \mu < \infty\}$$

式中 Ω 代表參數空間。本例之參數空間為一維空間的全部，其中任一點代表母體均數 μ 的一個可能數值。本例之母體分配為均數 μ 為未知的常態分配， μ 確定後，該常態分配即行確定，這是要對 μ 進行推定的原因。

確定參數空間的目的是「知彼」。

3. 設定行動空間 行動是用來判斷未知參數的，一個決策問題所有可能採取的行動的集合稱之為行動空間 (action space)。在點推定上，行動空間有兩個特點，其一是行動空間與參數空間完全一致，另一是行動即為點推定量。事實上，這兩個特點是互有關聯的，即如果行動空間與參數空間完全一致，則行動必即為點推定量；反之亦然。當然行動空間不一定要與參數空間完全一致，但以完全一致者為最簡單。本例之行動空間為：

$$A = \{a : -\infty < a < \infty\}$$

$$a = \hat{\mu}$$

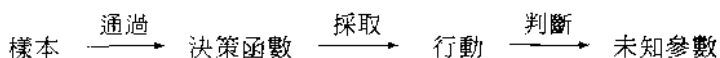
式中 a 代表個別行動， A 代表行動空間。 $\hat{\mu}$ 為 μ 的推定量， $a = \hat{\mu}$ 是指所採行動 a 即為 μ 的推定量。又此行動空間與上述參數空間完全一致，均為一維空間的全部。

設定行動空間的目的在將最後判斷的可能結果全部列出來，俾知何去何從，從而能瞻前顧後。簡言之，即設定行動空間的目的是「瞻顧」。

4. 建立決策函數 決策函數 (decision function) 的一般形式為：

$$d(X_1, X_2, \dots, X_n) = a$$

$d(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是指決策函數為樣本的函數，代表利用樣本資料的方式。 $d(X_1, X_2, \dots, X_n) = a$ 是指函數的結果與行動結合的方式。這兩部分是否確當均影響決策的好壞。一個好的決策函數不但可獲得正確的結論，同時可獲得可靠的結論。由此可知，決策函數為決策過程中最重要的項目，決策函數不佳，其他一切努力均屬枉然。又由上式可看出，決策函數為樣本與行動之間的關係式，為利用樣本資料進行判斷的一種決策機制，其情形如下：



由此可知，建立決策函數的目的是「謀斷」。決策函數的前段是「慎謀」，後段是「能斷」。

本例之決策函數為數甚多，茲舉出比較具有代表性的三種決策函數加以討論，其情形如下：

(1) 第一種決策函數為樣本的均數 \bar{X} ，即

$$a = d_1(X_1, X_2, \dots, X_n) = \frac{1}{n} \sum X = \bar{X}$$

此決策函數是指將樣本資料求成算術平均數 \bar{X} ，以推估全體的均

數 μ ，即 $\hat{\mu} = \bar{X}$ 。

(2)第二種決策函數為樣本中第一個出現的變量 X_1 ，即

$$\begin{aligned} a &= d_2(X_1, X_2, \dots, X_n) \\ &= 1X_1 + 0X_2 + \dots + 0X_n = X_1 \end{aligned}$$

此決策函數是指即採用樣本第一個出現的變量 X_1 以推估全體的均數 μ ，即 $\hat{\mu} = X_1$ ，其他變量均棄置不用。

(3)第三種決策函數為常數 5，意即根本不用任何樣本資料，而隨便亂猜，即

$$\begin{aligned} a &= d_3(X_1, X_2, \dots, X_n) \\ &= 0X_1 + 0X_2 + \dots + 0X_n + 5 = 5 \end{aligned}$$

此決策函數是指隨便舉一個數字假定是 5，來推估全體的均數 μ ，即 $\hat{\mu} = 5$ 。

根據直覺判斷，當然是第一種決策函數亦即推定量為最佳，因其採用了樣本中的全部資料；第二種次之，因其在樣本的 n 個變量中，只用了第一個變量，而將其餘的 $n-1$ 個變量棄置不用；而以第三種推定量為最差，因其根本未用任何樣本資料，亦即根本不顧事實而隨便亂猜。這是直覺上的判斷，但科學之所以為科學，是要有理論依據，不能全憑直覺，統計決策理論即是提供此理論依據的學問。

5. 選定損失函數 為能評判推定量的優劣，必須對錯誤的推估一種懲罰，此懲罰以具體數字表示者稱之為損失。在通常情況下，小錯誤給予小損失，大錯誤給予大損失，因此損失是錯誤程度的函數，稱之為損失函數 (loss function)。又誤差有正有負，誤差不論正負皆是誤差，為消除此困擾，損失函數通常均取錯誤程度的平方，如此不但可消除此困擾，同時對大誤差加重其懲罰，亦頗合理。就本例而言， a 為推估的手段亦即推定量， μ 為推估的對象，推估的誤差為 $a - \mu$ ，取其平方即得損失函數如下：

$$l(a; \mu) = (a - \mu)^2$$

此種損失函數稱為平方誤差損失函數 (squared error loss function)，最為常用。此函數當推估無誤時， $a = \mu, l = 0$ ；推估有誤時， $a \neq \mu, l > 0$ ；合於損失函數的基本要求。

選定損失函數的目的是「辨別」，亦即辨別決策函數的好壞。

6. 求算風險函數 上列損失函數中，推定量 $a = d(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 為樣本的函數，是一個隨機變數，如此損失 l 也成為一個隨機變數，其結果損失的大小隨所出現樣本之不同而異，缺乏客觀性。其解決之法是求算損失函數的期望數，亦即求算所有可能樣本下損失的平均數，作為評判推定量是否為優的依據。損失函數的期望數稱為風險函數 (risk function)。由此可知，求算風險函數的目的是「通評」，亦即進行通盤的評量。本例所列舉的三個決策函數，其風險函數可求得如下：

(1) 第一種決策函數的風險函數為：

$$\begin{aligned} R_{d1}(\mu) &= E[(a - \mu)^2] = E[(\bar{X} - \mu)^2] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{x} - \mu)^2 f(\bar{x}) d\bar{x} \\ &= \frac{\sigma^2}{n} = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

(2) 第二種決策函數的風險函數為：

$$\begin{aligned} R_{d2}(\mu) &= E[(a - \mu)^2] = E[(X_1 - \mu)^2] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \mu)^2 f(x) dx \\ &= \sigma^2 = 1 \end{aligned}$$

(3) 第三種決策函數的風險函數為：

$$\begin{aligned} R_{d3}(\mu) &= E[(a - \mu)^2] = E[(5 - \mu)^2] \\ &= (5 - \mu)^2 \end{aligned}$$