



普通高等教育“十一五”电气信息类规划教材

DIANQI
XINXILEI

信号与系统

■ 郭银景 等编著



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS



普通高等教育“十一五”电气信息类规划教材

信号与系统

郭银景 王凤瑛 王浩英 武光收 编著

机械工业出版社

本书全面介绍了信号与系统的基础理论与分析方法。全书共分为 8 章。内容包括：信号与系统的基本概念；连续系统的时域分析；离散系统的时域分析；连续系统的频域分析；复频域分析；离散时间系统的 z 域分析；系统函数；系统的状态变量分析等。

本书采用数学概念与物理概念并重的处理方式，阐述了连续时间信号与离散时间信号通过线性时不变系统的时域分析与变换域分析，并配有适量的例题与习题供学生练习。

本书语言精练、论述清楚、概念明确、重点突出。可作为高等院校电子信息工程、通信工程、自动化、电子信息科学与技术、生物医学工程、计算机科学与技术等专业“信号与系统”课程的教材，也可供相关专业科技工作人员参考。

本书是山东省精品课程“信号与系统”的配套教材，是山东科技大学国家级电工电子实验教学示范中心教材群建设的主要教材之一。

本书配有免费电子课件，欢迎选用本书作教材的老师登录 www.cmpedu.com 下载或发邮件到 llm7785@sina.com 索取。

图书在版编目(CIP)数据

信号与系统/郭银景等编著. —北京：机械工业出版社，
2009. 5

普通高等教育“十一五”电气信息类规划教材
ISBN 978-7-111-26371-5

I. 信… II. 郭… III. 信号系统—高等学校—教材
IV. TN911. 6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 023965 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

责任编辑：刘丽敏 版式设计：张世琴 责任校对：张晓蓉

封面设计：张 静 责任印制：李 妍

北京铭成印刷有限公司印刷

2009 年 5 月第 1 版第 1 次印刷

184mm × 260mm · 17.25 印张 · 426 千字

标准书号：ISBN 978-7-111-26371-5

定价：30.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

销售服务热线电话：(010)68326294

购书热线电话：(010)88379639 88379641 88379643

编辑热线电话：(010)88379726

封面无防伪标均为盗版

前言

信号与系统是电气信息类专业的核心基础课,其中的概念和分析方法广泛应用于通信、自动控制、信号与信息处理、电路与系统等领域。本课程的任务在于研究信号与系统理论的基本概念和基本分析方法。可采用课堂教学、网络教学和课程设计相结合的教学方式,采取图、文、声、像、动画等多媒体技术,使内容生动活泼,易于理解。同时,结合教师答疑、学生讨论等形式使该课程体现出交互性、开放性、自主性、协作性等特点。

本书采用从基本概念出发、以实际应用为主要例子的介绍方法,遵循从连续到离散、从时域到变换域、从信号到系统的分析思路,系统地介绍了连续时间与离散时间信号与系统的定义及分析方法。这样安排体现了两者之间理论上的相对独立性特点,同时也考虑了教学过程先易后难,循序渐进的思路。另外,由于学生首次接触交换理论,对概念理解可能比较困惑,因此本书的写作将易懂性与数学严格性完美结合,概念介绍言简意赅,同时配以适量的精挑细选的例题与习题,极大地方便了教与学。为了让广大读者能更深入的理解和掌握,本书在每一章的最后还列举了一些可以深入阅读的材料,以飨读者。

本书内容可以简而言之概括为:两种系统(连续时间系统和离散时间系统),两类方法(时域分析方法和变换域分析方法),三大变换(傅里叶变换、拉普拉斯变换和 Z 变换)。本书共分8章。第1章给出了信号与系统的基本概念。第2章介绍了连续系统的时域分析,包括微分方程的经典解法,系统的零输入响应与零状态响应,冲激响应与阶跃响应,卷积及相关函数的概念与运算等。第3章介绍了离散系统的时域分析,包括差分方程的解,零输入响应与零状态响应,单位序列与单位阶跃响应以及卷积和的概念与求解等。第4章介绍连续系统的频域分析,主要讲述傅里叶级数、傅里叶变换及其性质等。第5章介绍复频域分析,主要介绍拉普拉斯变换的定义、性质、逆变换以及应用拉普拉斯变换对LTI系统进行复频域分析。第6章介绍了离散时间系统的 z 域分析,包括离散时间信号的 Z 变换定义、性质、逆 Z 变换以及离散系统的 z 域分析。第7章介绍了系统函数,主要包括系统函数与系统特性、系统稳定性、信号流图等。第8章介绍了系统的状态变量分析,主要包括状态方程的建立与求解,系统的稳定性等。

本书由山东科技大学的郭银景、王凤瑛、武光收和中国海洋大学的王浩英编著。张瑞金教授审阅了书稿,提出了许多宝贵建议,在此表示衷心的感谢!烟台南山学院的刘新红、中国人民解放军徐州空军学院的李静和山东科技大学的孙红雨、王正杰、张瑞、张同军、郝建军、李丽君、单晓红、逢明祥、丁庆安、赵海涛、王立奎、颜斌、王必胜、吴春艳、穆卫涛、姜平香、李殿涛、冯瑜、衣少磊、邓敏、荆刚、陈贤卿、黄焕、刘宾、王婷、杨军、徐春阳、李攀登、李安亮、陈赓、成志新、高鹏、武腾、曹倩、李国伟、赵媛和张计芬等参加

了本书的编写工作。

本书可以作为电气信息类、计算机科学与技术类专业及其他相关专业的“信号与系统”课程的教材，也可以作为相关专业工程技术人员继续教育的培训教材。

本书是山东省精品课程“信号与系统”的配套教材，山东科技大学国家级电工电子实验教学示范中心教材群建设的主要教材之一。

编 者

2008 年 12 月

目 录

前言

第1章 信号与系统的基本概念 1

1.1 信号 1

1.1.1 确定信号与随机信号 1

1.1.2 连续时间与离散时间信号 1

1.1.3 周期信号与非周期信号 2

1.1.4 能量信号与功率信号 3

1.1.5 模拟信号与数字信号 4

1.2 基本信号及其特性 4

1.2.1 常见的连续时间信号 5

1.2.2 常见的离散时间信号 11

1.3 常见的信号运算 13

1.3.1 平移 13

1.3.2 反折 13

1.3.3 尺度变换 13

1.3.4 混合运算举例 14

1.4 系统的描述与分类 16

1.4.1 系统的数学模型 16

1.4.2 系统的分类 19

习题1 22

第2章 连续系统的时域分析 26

2.1 连续时间系统的响应 26

2.1.1 微分方程的经典解法 26

2.1.2 关于系统在 $t=0_-$ 和 $t=0_+$ 状态的讨论 28

2.1.3 连续 LTI 系统的零输入响应 30

2.1.4 连续 LTI 系统的零状态响应 31

2.2 连续 LTI 系统的冲激响应和阶跃响应 33

2.3 卷积积分 35

2.3.1 连续信号分解为冲激信号的线性组合 35

2.3.2 卷积的计算 36

2.3.3 用卷积积分求解系统的 37

零状态响应 38

2.3.4 卷积积分的性质 39

2.4 相关 43

2.4.1 相关函数 44

2.4.2 相关与卷积的比较 44

2.4.3 相关定理 46

习题2 47

第3章 离散系统的时域分析 51

3.1 离散时间系统的响应 51

3.1.1 差分方程 51

3.1.2 差分方程的经典解 53

3.1.3 零输入响应和零状态响应 56

3.2 单位序列响应和单位阶跃响应 59

3.3 卷积和 63

3.3.1 离散序列分解为单位序列的线性组合 64

3.3.2 卷积和的计算 64

3.3.3 用卷积和求解系统的零状态响应 67

3.3.4 卷积和的性质 68

习题3 70

第4章 连续系统的频域分析 73

4.1 信号的正交分解 73

4.1.1 正交矢量 73

4.1.2 正交函数集 74

4.1.3 信号分解为正交函数 76

4.2 周期信号的傅里叶级数 77

4.2.1 三角函数形式的傅里叶级数 77

4.2.2 奇、偶函数的傅里叶系数 78

4.2.3 指数形式傅里叶级数 80

4.3 周期信号的频谱 81

4.3.1 周期信号的幅度频谱和相位频谱 81

4.3.2 周期矩形脉冲的频谱 81

4.3.3 周期信号频谱的特点	83	5.1.3 常见信号的拉普拉斯变换	142
4.3.4 周期信号的功率	83	5.2 单边拉普拉斯变换的性质	143
4.4 非周期信号的频谱	85	5.2.1 线性性质	143
4.4.1 非周期信号的频谱函数	85	5.2.2 时移性质	144
4.4.2 傅里叶变换	86	5.2.3 尺度变换性质	145
4.4.3 典型信号的频谱函数	87	5.2.4 复频移性质	146
4.5 傅里叶变换的性质	92	5.2.5 时域微积分特性	146
4.5.1 线性性质	92	5.2.6 复频域的微积分特性	148
4.5.2 对称性	92	5.2.7 初值和终值定理	150
4.5.3 尺度变换特性	93	5.2.8 卷积定理	152
4.5.4 频移特性	94	5.3 单边拉普拉斯逆变换	153
4.5.5 时移特性	95	5.3.1 查表法	153
4.5.6 卷积定理	95	5.3.2 部分分式展开法	154
4.5.7 频域微积分特性	98	5.3.3 留数法	157
4.5.8 时域微积分特性	98	5.4 LTI 系统的复频域分析	159
4.5.9 能量谱和功率谱	100	5.4.1 微分方程的复频域求解	159
4.6 周期信号的傅里叶变换	102	5.4.2 系统函数	161
4.6.1 正弦弦函数的傅里叶变换	102	5.4.3 系统的复频域框图	162
4.6.2 复指数信号的傅里叶变换	103	5.4.4 电路的复频域模型及求解	163
4.6.3 单位冲激序列 $\delta_T(t)$ 的傅里叶变换	104	5.5 线性系统的双边拉普拉斯变换分析	165
4.6.4 一般周期函数的傅里叶变换	104	5.5.1 双边拉普拉斯变换的性质	165
4.7 LTI 系统的频域分析	106	5.5.2 双边拉普拉斯逆变换	166
4.7.1 频率响应	106	5.5.3 线性系统的双边拉普拉斯变换分析例题	167
4.7.2 无失真传输	110	习题 5	168
4.7.3 滤波器	111	第 6 章 离散时间系统的 z 域分析	173
4.8 取样定理	120	6.1 Z 变换	173
4.8.1 限带信号和抽样信号	120	6.1.1 Z 变换的定义	173
4.8.2 信号的取样	121	6.1.2 Z 变换的收敛域	173
4.8.3 时域取样定理	123	6.1.3 常见序列的 Z 变换	175
4.8.4 频域取样定理	127	6.2 Z 变换的性质	176
4.9 希尔伯特变换	128	6.2.1 线性	176
4.9.1 希尔伯特变换的定义	128	6.2.2 移位性	176
4.9.2 希尔伯特变换的应用	130	6.2.3 序列乘 a^k	178
习题 4	132	6.2.4 卷积定理	179
第 5 章 复频域分析	139	6.2.5 序列乘 $k(z$ 域微分)	179
5.1 拉普拉斯变换	139	6.2.6 序列求和	180
5.1.1 拉普拉斯变换的推导与定义	139	6.2.7 初值与终值定理	181
5.1.2 拉普拉斯变换收敛域	140		



6.3 逆 Z 变换	183	7.6 系统模拟	212
6.3.1 幂级数展开法	183	7.6.1 n 阶系统的框图模拟方法	212
6.3.2 反演积分法	184	7.6.2 系统的互联结构	215
6.3.3 部分分式展开法	186	习题7	219
6.4 离散系统的 z 域分析	187	第8章 系统的状态变量分析	222
6.4.1 系统差分方程的变换域解	187	8.1 引言	222
6.4.2 系统函数	188	8.2 状态方程	222
6.4.3 系统的 z 域框图	189	8.2.1 状态变量与状态方程	222
习题6	191	8.2.2 状态变量分析法	224
第7章 系统函数	194	8.2.3 动态方程的一般形式	224
7.1 系统函数零极点的概念	194	8.3 系统状态方程的建立	227
7.1.1 系统函数的零极点	194	8.3.1 连续系统状态方程的建立	227
7.1.2 系统函数的零极点图	195	8.3.2 离散系统状态方程的建立	237
7.2 系统函数的零极点分布与 系统的时域特性	195	8.4 状态方程的求解	239
7.2.1 连续时间系统	195	8.4.1 连续系统状态方程的求解	239
7.2.2 离散时间系统	198	8.4.2 离散系统状态方程的求解	244
7.3 从零极点分布求频率响应	201	8.5 系统的可控制性和可观测性	247
7.3.1 连续时间系统	201	8.5.1 状态矢量的线性变换	247
7.3.2 离散时间系统	203	8.5.2 系统的可控制性和可观测性	249
7.4 系统的稳定性	204	8.5.3 可控制性、可观测性和 系统函数的关系	252
7.4.1 系统因果性判定	204	习题8	253
7.4.2 系统稳定性判定	204	附录	256
7.5 信号流图	207	附录A 傅里叶变换表	256
7.5.1 信号流图概述	207	附录B 常用信号的拉普拉斯变换	265
7.5.2 信号流图的性质及化简	208	附录C 序列的 Z 变换表	266
7.5.3 梅森公式	210	参考文献	268

第1章 信号与系统的基本概念

内容提要

本章主要讲述信号与系统的概念、信号的描述与分类、常见信号的时域特性、信号的基本运算规律、LTI 系统的描述与性质。

1.1 信号

一个信号就是一组数据或信息。例如：人声、犬吠、狮吼、鸟鸣、手语等。现代高速信号包括：电话线中的电压、无线电设备或者电视发射机发出的电波以及光纤内的光强度等。被称为随机信号的噪声也是一种时变物理现象，但是它并不像信号那样经常携带有用信息，因而人们并不希望噪声的存在。

从物理上讲，信号是信息表现的形式；从数学上来看，信号是一个或多个变量的函数；从形态上来说，信号表现为一种波形。描述信号的方法是写出它的数学表达式，本书的信号多以时间 t 或 k 为函数变量，绘出的函数图形称为信号的波形。例如一个正弦信号，可以用如图 1-1 所示的波形，也可以用式(1-1)表示。其中 A 为振幅， ω 为角频率， θ 为初相。

$$f(t) = A\sin(\omega t + \theta) \quad (1-1)$$

本书主要考虑按时间特性分类的几种信号：确定信号与随机信号，连续时间信号与离散时间信号，周期信号与非周期信号，能量信号与功率信号，模拟信号与数字信号等。

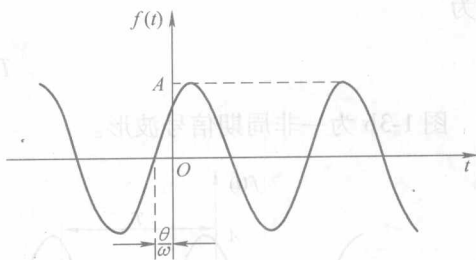


图 1-1 正弦信号

1.1.1 确定信号与随机信号

无论用数学形式还是图形方式，假如信号的物理描述是完全确定的，则该信号就是一个确定信号。信号值不能准确地预测到，而仅能通过概率描述来了解(比如均值或均方值)的信号是随机信号。本书只研究确定信号。

1.1.2 连续时间与离散时间信号

如果信号是在时间 t 的连续值上给出的，则该信号是一个连续时间信号(也可存在有限间断点)，如图 1-2a 所示；而当信号只在 t 的离散值上定义，该信号就是一个离散时间信号，如图 1-2b 所示。电话和视频摄像机等设备的输出信号都是连续时间信号，而国内生产总值(GDP)走势图、公司的月销售额以及证券市场的每日平均值等都是离散时间信号。

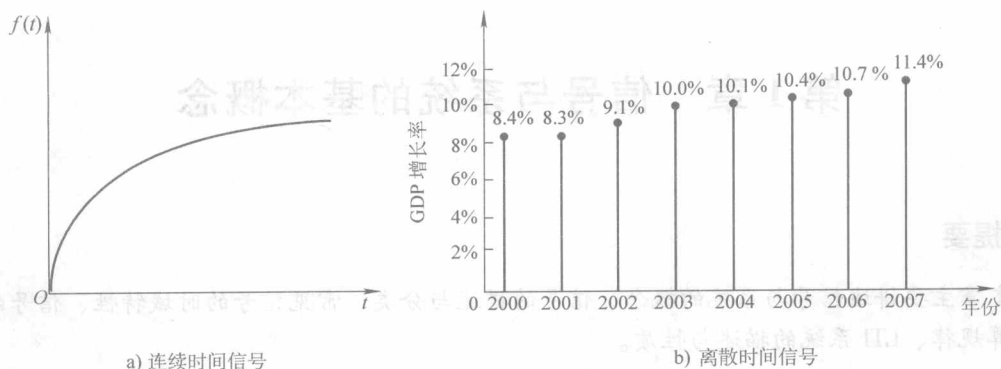


图 1-2 连续时间信号与离散时间信号

1.1.3 周期信号与非周期信号

对于连续时间信号 $f(t)$ ，若存在 $T > 0$ ，使得

$$f(t) = f(t + mT) \quad (1-2)$$

式中， m 为整数，则这个信号是周期性的，周期为 T 。

图 1-3a 为正弦信号 $f(t) = A \sin(\omega t + \theta)$ 的波形，其周期 T 、频率 f 和角频率 ω 之间的关系为

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} \quad (1-3)$$

图 1-3b 为一非周期信号波形。

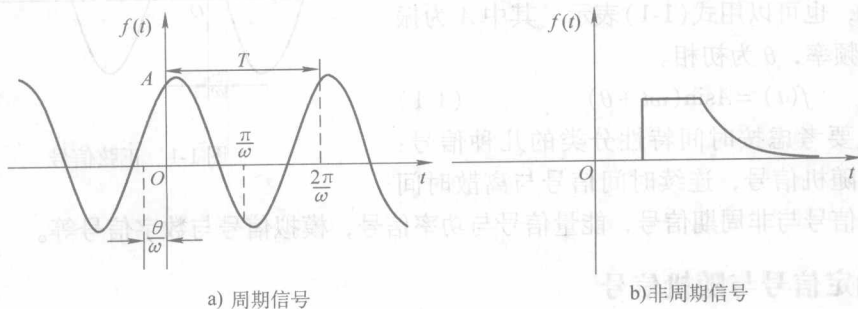


图 1-3 周期与非周期连续信号

同理，对于离散信号 $f(k)$ ，若存在 $N > 0$ ，使得

$$f(k) = f(k + nN) \quad (1-4)$$

式中， k 与 n 均为整数，则 $f(k)$ 是一个以 N 为周期的信号。

图 1-4 为一离散周期信号。

显然，若知道了周期信号在一个周期内的变化过程，就可以确定整个定义域内的信号取值。非周期信号不具有周期性，若令周期信号的周期趋

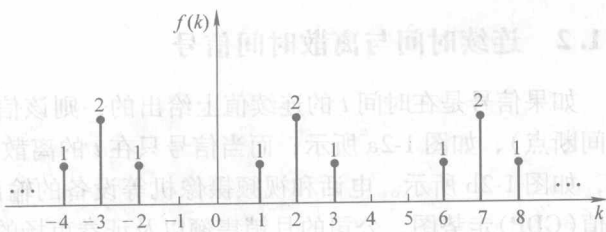


图 1-4 周期序列信号

于无穷大,则就变成了非周期信号。

正弦序列是一种常见的离散时间信号,表达式为

$$f(k) = A \cos(\Omega_0 k + \varphi) \quad (1-5)$$

式中, Ω_0 为数字角频率; A 、 φ 分别为振幅和初相,如图 1-5 所示。

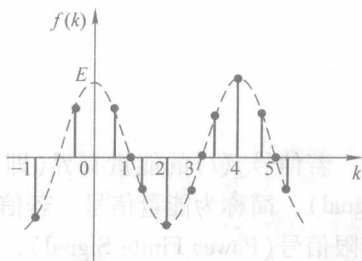


图 1-5 正弦序列

正弦序列并不一定是周期序列。下面讨论离散正弦序列为周期序列的条件。

若式(1-5)所示正弦序列为周期序列,则必须满足

$$f(k) = f(k + mN) = A \cos(\Omega_0 k + \Omega_0 mN + \varphi) \quad (1-6)$$

式中, m 、 N 均取整数,且 N 为最小正整数。

由式(1-6)可知,只有当 $\Omega_0 N = 2n\pi$, $n = 1, 2, 3, \dots$ 时,式(1-5)所示正弦序列才是周期序列,并且重复周期为 $N = 2n\pi/\Omega_0$ 。

1) 当 $2\pi/\Omega_0$ 为整数时,正弦序列 $f(k)$ 为一个周期性离散时间信号,重复周期 $N = 2\pi/\Omega_0$ 。

2) 当 $2\pi/\Omega_0$ 为有理数时,正弦序列 $f(k)$ 也是一个周期性的离散时间信号,重复周期为 $2n\pi/\Omega_0$; 例如 $f(k) = 10 \cos\left(\frac{2\pi}{11}k - \frac{\pi}{3}\right)$ 为周期 $T = 11$ 的正弦周期信号。

3) 当 $2\pi/\Omega_0$ 为无理数时,正弦序列 $f(k)$ 不再是周期性的离散时间信号,但其样值的包络仍为正弦周期信号。例如 $f(k) = 3 \cos\left(\frac{k}{8}\right)$ 不是周期信号。

【例 1-1】 判断下列序列是否为周期信号,若是,确定其周期。

(1) $f_1(k) = \sin(3\pi k/4) + \cos(0.5\pi k)$

(2) $f_2(k) = \sin(2k)$

解 (1) $\sin(3\pi k/4)$ 和 $\cos(0.5\pi k)$ 的数字角频率分别为 $\beta_1 = \frac{3}{4}\text{rad}$, $\beta_2 = 0.5\pi\text{rad}$, 由于 $\frac{2\pi}{\beta_1} = \frac{8}{3}$, $\frac{2\pi}{\beta_2} = 4$ 为有理数,故它们的周期分别为 $N_1 = 8$, $N_2 = 4$, 故 $f_1(k)$ 为周期序列,其周期为 N_1 和 N_2 的最小公倍数 8。

(2) $f_2(k) = \sin(2k)$ 的数字角频率为 $\beta_1 = 2\text{rad}$; 由于 $\frac{2\pi}{\beta_1} = \pi$ 为无理数,故 $f_2(k) = \sin(2k)$ 为非周期序列。

1.1.4 能量信号与功率信号

信号(电压或电流)在单位电阻上的能量或功率称为归一化能量或归一化功率。信号 $f(t)$ 在区间 $(-\alpha, \alpha)$ 上的归一化能量用字母 E 表示为

$$E = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\alpha}^{\alpha} |f(t)|^2 dt \quad (1-7)$$

归一化功率用字母 p 表示为

$$p = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{2\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} |f(t)|^2 dt \quad (1-8)$$

离散信号有时也需要讨论能量和功率,其归一化能量和功率表达式为

$$E = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^{N-1} |f(k)|^2 \quad (1-9)$$

$$p = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{k=-N}^{N-1} |f(k)|^2 \quad (1-10)$$

若信号 $f(t)$ 的能量有界(即 $0 < E < \infty$, 这时 $p = 0$) 则称其为能量有限信号(Energy Finite Signal), 简称为能量信号。若信号 $f(t)$ 的功率有界(即 $0 < p < \infty$, 这时 $E = \infty$) 则称其为功率有限信号(Power Finite Signal), 简称为功率信号。周期信号、阶跃信号是功率信号, 它们的能量为无限, 只能从功率的角度去考察。非周期信号可以是功率信号(如直流信号), 也可以是能量信号(如单个矩形脉冲信号)。

1.1.5 模拟信号与数字信号

模拟信号是指幅度在某一个连续范围内能够取到任何值的信号。如果信号的幅度只能取到有限个值, 这种信号就是数字信号。与数字计算机相关的信号总是数字信号, 因为它们只能取两个值(二元信号)。

注意: 连续时间与模拟的概念是不同的, 同样离散时间与数字的概念也是不一样的。连续时间和离散时间是根据信号沿时间(水平)轴的特征来认定的, 而模拟与数字的概念则是依据信号的幅度(垂直轴)属性判定的。图 1-6 给出了各种类型信号的例子, 表明模拟的不一定是连续的, 而数字的也不一定是离散的。

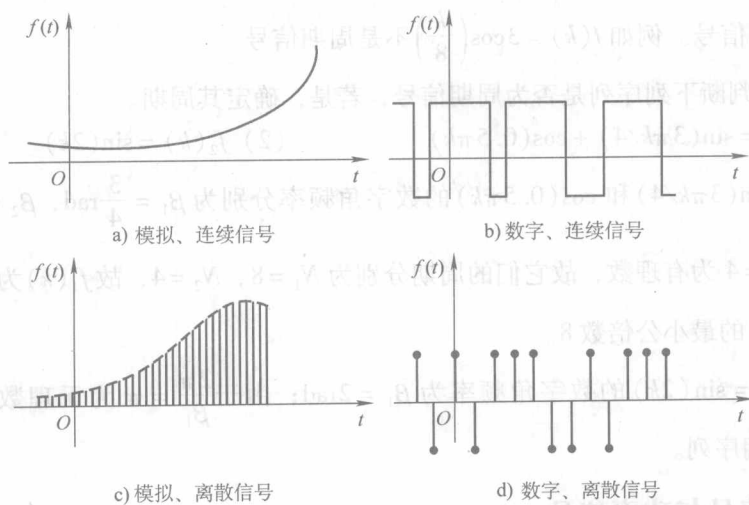


图 1-6 各种类型信号举例

1.2 基本信号及其特性

下面给出几个常见的连续时间与离散时间信号的表达式及其时域特性, 在工程实际应用与理论研究中经常会遇到。

1.2.1 常见的连续时间信号

函数本身有不连续点(跳变点)或其导数与积分有不连续点的一类函数统称为奇异信号或奇异函数。本节主要介绍单位阶跃信号、单位冲激信号和冲激偶信号,它们都是奇异信号。抽样信号与指数信号也比较常见。

1. 单位阶跃信号 $\varepsilon(t)$

连续时间单位阶跃信号用 $\varepsilon(t)$ 表示, 定义为

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (1-11)$$

当 $t=0$ 时, $\varepsilon(t)$ 取值没有定义, 其波形如图 1-7 所示。

延迟 t_0 ($t_0 \geq 0$) 的单位阶跃信号可以用下式表示:

$$\varepsilon(t-t_0) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 1 & t > t_0 \end{cases} \quad (1-12)$$

其波形如图 1-8 所示。

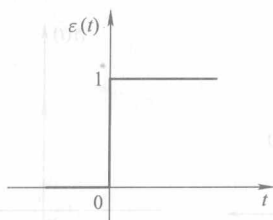


图 1-7 连续时间单位阶跃信号

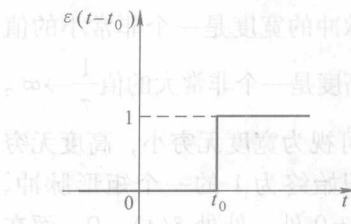


图 1-8 有延迟的单位阶跃信号

利用单位阶跃信号可以方便地表示符号信号 $\text{sgn}(t)$ 和单位斜坡信号 $r(t)$, 其各自的函数定义式为

$$\text{sgn}(t) = 2\varepsilon(t) - 1 = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases} \quad (1-13)$$

其波形如图 1-9 所示。

$$r(t) = t\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t \geq 0 \end{cases} \quad (1-14)$$

其波形如图 1-10 所示。

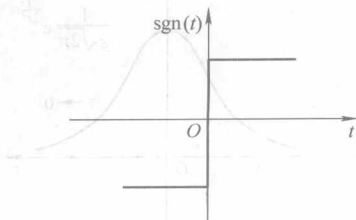


图 1-9 符号信号

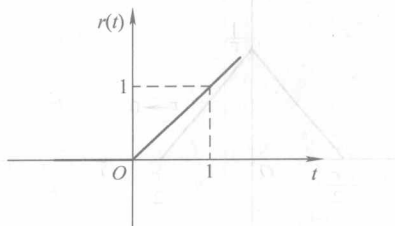


图 1-10 单位斜坡信号

利用单位阶跃信号和延迟单位阶跃信号之差可以表示矩形脉冲(即门函数), 其波形如

图 1-11 所示。图中 τ 表示矩形脉冲的宽度。图 1-11a 所示门函数的表达式为

$$g_1(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t - \tau) \quad (1-15a)$$

图 1-11b 所示门函数的表达式为

$$g_2(t) = \varepsilon\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - \varepsilon\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \quad (1-15b)$$

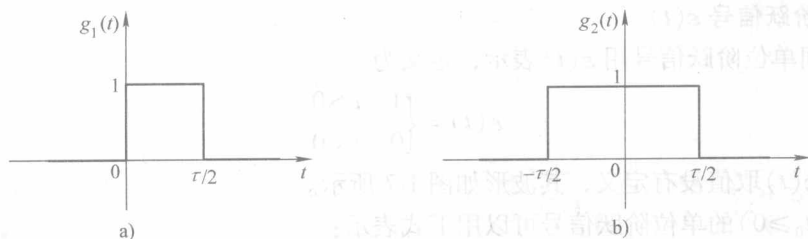


图 1-11 门函数

2. 单位冲激信号 $\delta(t)$

我们可以将冲激函数想象成如图 1-12a 所示那样的一个具有单位面积的又高又窄的矩形脉冲。这个脉冲的宽度是一个非常小的值

$\tau \rightarrow 0$ ，而高度是一个非常大的值 $\frac{1}{\tau} \rightarrow \infty$ 。

因此 $\delta(t)$ 可视为宽度无穷小，高度无穷大，总面积始终为 1 的一个矩形脉冲。于是，除 $t=0$ 外，处处 $\delta(t) = 0$ ，而在 $t=0$ 时刻，无定义。单位冲激用图 1-12b 所示的箭头符号表示。

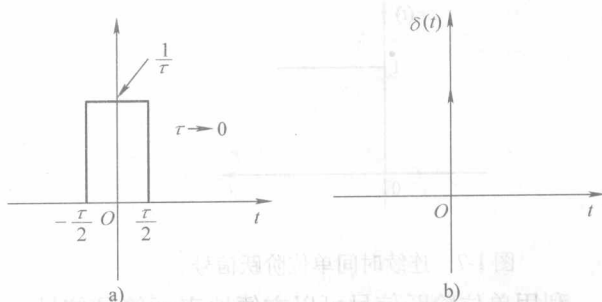


图 1-12 单位冲激及其近似表示

单位冲激函数 $\delta(t)$ 被狄拉克 (P. A. M. Dirac) 定义为

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \\ \delta(t) = 0, t \neq 0 \end{cases} \quad (1-16)$$

在冲激信号的近似中也可以用其他的一些脉冲信号，比如三角脉冲、指数脉冲或高斯型脉冲等，如图 1-13 所示。单位冲激信号的重要特点并不在其形状，而是其有效持续期(脉冲

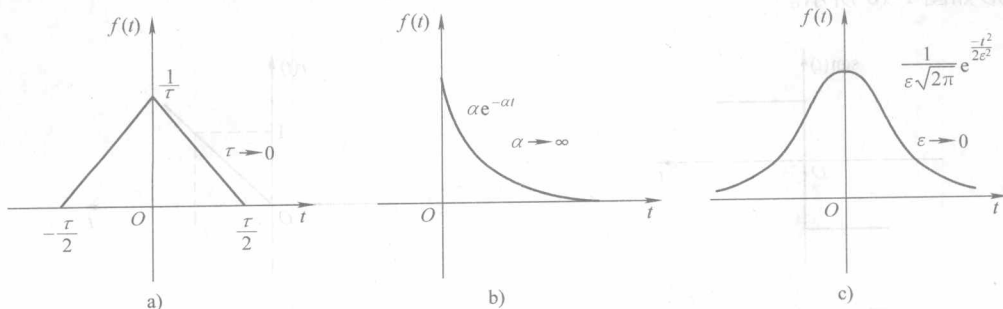


图 1-13 单位冲激函数的其他可能近似表示

宽度)趋近于零的同时,面积保持为1。

(1) 单位冲激函数的采样性质

若 $f(t)$ 为在 $t=t_0$ 处连续的普通信号,则有

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt &= f(0) \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt &= f(t_0) \end{aligned} \right\} \quad (1-17)$$

式(1-17)表明一个函数与冲激 $\delta(t)$ 乘积的面积等于那个函数在单位冲激所在时刻的值。这个性质非常重要,称为单位冲激的采样性质或筛选性质。

(2) 与普通函数的乘积

$$\left. \begin{aligned} f(t)\delta(t) &= f(0)\delta(t) \\ f(t)\delta(t-t_0) &= f(t_0)\delta(t-t_0) \end{aligned} \right\} \quad (1-18)$$

式(1-18)表明只要 $f(t)$ 在 $t=t_0$ 连续, $f(t)$ 乘以冲激 $\delta(t-t_0)$ (冲激出现在 $t=t_0$)就产生位于 $t=t_0$,强度为 $f(t_0)$ 的一个冲激。

(3) 尺度变换

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t) \quad (1-19)$$

式中, a 为常数,且 $a \neq 0$ 。

证明:由冲激信号的广义函数定义来研究 $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(at)\varphi(t)dt$,其中 $\varphi(t)$ 为任意的连续时间函数。

若 $a > 0$, $|a| = a$,令 $x = at$

$$\text{由} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(at)\varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi\left(\frac{x}{a}\right)\frac{1}{|a|}dx = \frac{1}{|a|}\varphi(0)$$

而

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|a|}\delta(t)\varphi(t)dt = \frac{1}{|a|}\varphi(0)$$

因此

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$$

若 $a < 0$,同理可证。

(4) 奇偶性

冲激函数 $\delta(t)$ 是偶函数。即有

$$\delta(-t) = \delta(t) \quad (1-20)$$

证明:令 $t = -\tau$,则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(-t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-\tau)\delta(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f(0)\delta(\tau)d\tau = f(0)$$

将此式与式(1-17)比较可知 $\delta(t)$ 是偶函数。

(5) 作为广义函数的单位冲激

按广义函数理论,冲激信号可利用采样性质定义为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f(t)dt = f(0) \quad (1-21)$$

式(1-21)表明:冲激函数 $\delta(t)$ 作用于检验函数 $f(t)$ 的效果是给检验函数 $f(t)$ 赋值 $f(0)$ 。

换句话说, 当一个广义函数与检验函数相乘, 并在 $(-\infty + \infty)$ 区间积分, 恰好赋予检验函数在 $t=0$ 时的值, 则此广义函数被定义为冲激函数。

广义冲激函数的一个应用就是求单位阶跃函数 $\varepsilon(t)$ 在 $t=0$ 处的导数 $\frac{d\varepsilon(t)}{dt}$ 。即

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon(t)}{dt} f(t) dt &= \varepsilon(t) f(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(t) f'(t) dt \\ &= f(\infty) - 0 - \int_0^{\infty} f'(t) dt \\ &= f(\infty) - f(t) \Big|_0^{\infty} \\ &= f(0) \end{aligned}$$

结果显示 $\frac{d\varepsilon(t)}{dt}$ 满足 $\delta(t)$ 的采样性, 因此在广义函数意义下它就是一个冲激函数 $\delta(t)$, 即

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \delta(t) \quad (1-22)$$

从而有

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \varepsilon(t) \quad (1-23)$$

也可以从图 1-13b 中得到以上结果。从图 1-13b 可以看出, 若 $t < -\varepsilon/2$, 则从 $-\infty$ 到 t , $\delta(t)$ 极限形式下的面积为零; 若 $t > \varepsilon/2$, 面积为 1, 其中 $\varepsilon \rightarrow 0$ 。因此有

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases} = \varepsilon(t) \quad (1-24)$$

式(1-24)表明通过积分单位冲激函数可以得到单位阶跃函数。同样, 积分单位阶跃函数可以得到单位斜坡函数 $r(t) = t\varepsilon(t)$ 。一直做下去, 积分单位斜坡函数可以得到单位抛物线函数 $t^2/2$ 等。

3. 冲激偶信号 $\delta'(t)$

冲激函数的微分(阶跃函数的二阶导数)将呈现正、负极性的一对冲激, 称为冲激偶信号, 用 $\delta'(t)$ 表示。

前面讲到冲激信号可以由三角形脉冲近似得到, 相应的, 冲激偶信号也可以由三角形脉冲引出, 图 1-14 说明了这一过程。

图 1-14a 为一三角形脉冲, 其底宽为 τ , 高度为 $1/\tau$ 。当 $\tau \rightarrow 0$ 时, 三角形脉冲变为冲激信号, 如图 1-14b 所示。对三角形脉冲求导可得到正负极性的两个矩形脉冲, 称为脉冲偶对, 如图 1-14c 所示。当 $\tau \rightarrow 0$ 时, 脉冲偶对就变成了正负极性的两个冲激函数, 其强度均为无穷大, 这就是冲激偶信号 $\delta'(t)$, 如图 1-14d 所示。

冲激偶信号的一个重要性质为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t) f(t) dt = -f'(0) \quad (1-25)$$

这里 $f'(t)$ 在零点连续, $f'(0)$ 为 $f(t)$ 导数在零点的取值。对延迟 t_0 的冲激偶信号 $\delta'(t - t_0)$, 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t - t_0) f(t) dt = -f'(t_0) \quad (1-26)$$

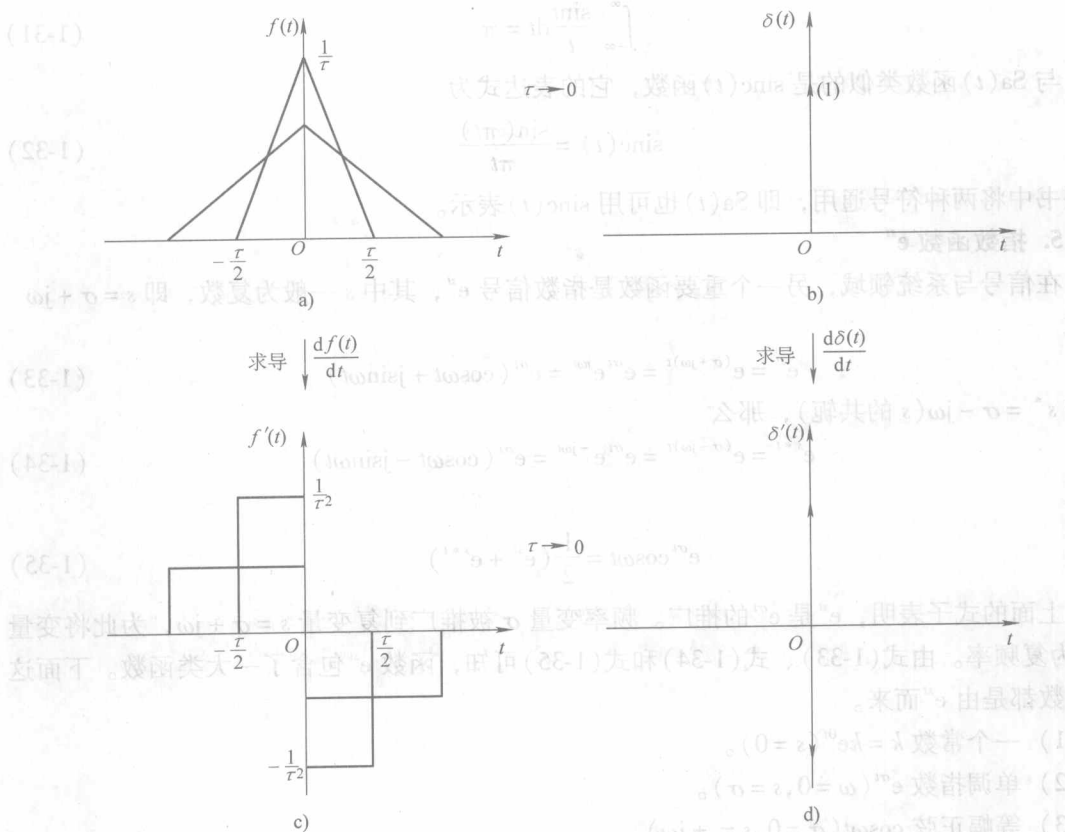


图 1-14 冲激偶的形成

例如
$$\int_{-\infty}^{+\infty} (t-2)^2 \delta'(t) dt = -\frac{d}{dt} [(t-2)^2] \Big|_{t=0} = -2(t-2) \Big|_{t=0} = 4$$

冲激偶信号的另一个重要性质为，它所包含的面积为零，这是因为正负两个冲激的面积相互抵消了。于是有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t) dt = 0 \quad (1-27)$$

对冲激偶信号 $\delta'(t)$ 积分即得冲激信号 $\delta(t)$ ，即

$$\int_{-\infty}^t \delta'(\tau) d\tau = \delta(t) \quad (1-28)$$

4. 抽样函数 $\text{Sa}(t)$

$\text{Sa}(t)$ 函数定义如下

$$\text{Sa}(t) = \frac{\sin t}{t} \quad (1-29)$$

其波形如图 1-15 所示。可以看出，它是一个偶函数，在 t 的正负两方向振幅都逐渐衰减，当 $t = \pm\pi, \pm 2\pi, \dots, \pm n\pi$ 时，函数值为零。

$\text{Sa}(t)$ 函数具有以下性质：

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2} \quad (1-30)$$

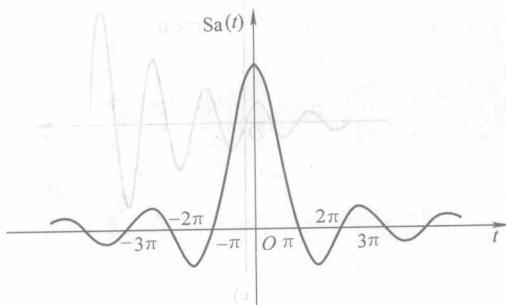


图 1-15 抽样函数