课程学习指导教材

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$$

朱匀华　周健伟　胡建勋　编著

数学分析的思想方法

中山大学出版社

课程学习指导教材

数学分析的思想方法

朱匀华　周健伟　胡建勋　编著

中山大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学分析的思想方法/朱匀华，周健伟，胡建勋编著．—广州：中山大学出版社，1998．10

ISBN 7-306-01486-2

Ⅰ．数…　Ⅱ．①朱…　②周…　③胡…　Ⅲ．数学分析—方法　Ⅳ．O17

中山大学出版社出版发行
（地址：广州市新港西路135号　邮编：510275
电话：020-84111998、84037215）
广东新华发行集团股份有限公司经销
广东省农垦总局印刷厂印刷
（地址：广州市沙河东莞庄路　邮编：510612　电话：(020)87290355
850毫米×1168毫米　32开本　16.25印张　407千字
1998年10月第1版　　2001年8月第2次印刷
印数：1001—2500册　定价：23.80元

序　　言

数学分析是高等院校数学各专业的一门主干基础课，它不仅对许多后继课程的学习有直接影响，而且对学生基本功的训练与良好素质的培养起着十分重要的作用。中山大学数学系的数学分析课，从 1992 年起被列为校级重点课程，于 1995 年被列为省级重点课程。根据课程建设的需要，为了帮助学生学好本课程，我们在总结多年教学实践的基础上编写了本书，作为数学分析教学中配合讲课与习题课使用的指导教材。本书不按通常的内容层次安排，而从指导学习的角度，围绕学习数学分析必须掌握的“四个基本”（基本概念、基本理论、基本方法和基本技巧）以及常用思考方法而展开讨论，旨在帮助初学者掌握数学分析的思想方法。

全书包括序篇和五章，内容如下：

序篇介绍了微积分的发展简史，目的是让读者了解一点微积分的来龙去脉，以有助于理解数学分析的思想方法。

第一章针对数学分析的重要基本概念，进行通俗的讲述和分析，以帮助读者正确地理解和掌握它们。

第二章针对数学分析基本理论的主要内容，进行专题的剖析，以帮助读者较深入地掌握这些理论和学会钻研理论问题的方法。

第三章针对数学分析这门基础学科，集中地介绍了它的常用思考方法，并细致地阐明每种方法的思想，以帮助读者提高灵活运用的能力。

第四章针对数学分析的基本内容，总结了比较典型的方法和常用的技巧，以帮助读者克服学习中遇到的在方法和技巧上的困难。

第五章针对当前数学考试中大量使用的题型，选编了500多道各种类型的习题与试题，包括3份综合自测题和6份中山大学数学系招考硕士研究生试题，以供读者练习和自我考查之用。

本书内容丰富，典型例题较多。全书选编了200多道典型例题，包括部分研究生入学试题，着重通过例题的分析，揭示数学分析思想方法的规律。

本书采用了平行和有机联系的结构，对于正在学习或已经学过数学分析的读者来说，它的各部分内容具有相对独立性。读者既可以系统地学习本书，也可以按需要选择阅读某些内容。本书能适应不同读者的需要，无论是学习感到困难的学生，还是学有余力的学生，都可从学习本书中得到收获。本书适合综合性大学、理工科大学和师范院校数学系、应用数学系、力学系、计算机系的学生作为学习指导教材，也适合高等院校数学教师作为教学参考书，还可供自学成才者阅读，以及报考研究生的青年复习时进一步提高解题能力使用。

本书的编写得到中山大学数学与计算科学学院院长邓东皋教授的关心与支持，在此特表示衷心的感谢。

由于我们的水平有限，编写时间比较匆促，本书难免会有不少缺点和错误，殷切地希望同行专家和读者批评与指正。

作者

1996年8月初稿
1998年8月定稿 于康乐园

目　　录

序篇　微积分发展简史

微积分又称“数学分析”，通常称为“分析学”。实际上，“数学分析”是在微积分发展趋于成熟时期才比较通用的名称。

当今通用的数学分析或微积分教科书，大都以函数概念、极限与连续、实数理论、微分与积分……这样的顺序安排内容，主体是微分和积分。这一逻辑顺序是为满足现代数学严密性和系统性的需要而形成的，与数学分析的历史发展顺序截然不同。

众所周知，牛顿（Newton，1642—1727）和莱布尼兹（Leibniz，1646—1716）大约在17世纪70年代前后建立起微积分。其标志是有了微商和积分的概念（建立在直观基础上），建立了用反微商来计算定积分的基本定理，同时引进了一套合适的符号。可是，实数系的逻辑基础却迟至19世纪后叶才建立起来，比微积分的发明晚了整整两个世纪。

我们在此选编微积分发展过程中的一些大事件，用以展示微积分发展过程中数学思想的演变。

一、微积分的前史

微积分的思想起源于求积问题，其源头可追溯到古老的埃及和巴比伦。在那里，已经有了圆面积的近似表示，有了求截棱锥体乃至球体体积的方法。类似的方法在古希腊数学中也可以找到。希腊人在直观的基础上假定像圆、椭圆这样一些简单的几何图形都具有面积。它们的面积和多边形的面积是同一类几何量。

当给定曲线图形 S 时，他们试图借助于充满或“穷竭” S 的多边形序列 P_1，P_2，$P_3\cdots$来确定 S 的面积。从当今数学分析

中的极限理论很容易看出：当 $n\to\infty$ 时，P_n 的面积 $a(P_n)$ 的极限即为 S 的面积。但由于当时极限概念并无确切的解释，因此，欧多克斯（Eudoxus，公元前约 400—前 350）提出了“穷竭法”。其目的就是想利用一种严格的处理方法来代替令 $n\to\infty$ 取 $a(P_n)$ 的极限。实际上，希腊人的严格观念也表现了他们“对无限的恐惧”。

古希腊的阿基米德（Archimedes，公元前 287—前 212）在解答数学的某些问题时，已经十分接近微分和积分的计算。这些计算实际上给出了微积分的原始雏形。阿基米德将穷竭法扩展为“括约法”（method of compression），用来证明几何量 S 等于给定的量 C。阿基米德首次提出度量圆周长的问题，还补充了许多关于平面曲线图形求积法和确定曲面所围立体体积等方面的研究。值得一提的是，他在《方法》一书中所用的“力学方法”后来被发展成为“不可分量法”，这一方法直接导致微积分的迅速发展。阿基米德在这些研究中预见了极微分割的概念，采用一种共同的一般程序解决了几个不同的、但类似的体积问题。尽管阿基米德的工作最终导致微积分的产生，但我们并不能说他发明了微积分。因为他并没有明确微积分的三个必不可少的组成部分：极限概念的明确引入、建立计算面积和体积的一般法则、确认求积问题与求切线问题之间的互逆性。

我国古代也早孕育了极限的思想，战国时期的《庄子·天下篇》（约公元前 300 年）中提出了“一尺之棰，日取其半，万世不竭。”三国时期（3 世纪）刘徽的割圆术指出“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣！”这种无限细分和无限逼近的思想比起古希腊人，可以说是大胆而彻底的。

尽管阿基米德的工作距现代微积分仅相距一步，但微积分理论却没有在阿基米德的时代确立，而是直到 17 世纪才确立。首

先是因为从欧几里德（Euclid，公元前约 330—前 275）、阿基米德和阿波罗尼斯（Apollonius，公元前约 262—前 190）之后，整个希腊文化，特别是希腊的理论数学开始进入衰落时期，随着 5 世纪西罗马帝国的崩溃，西欧进入了长期的黑暗时代。在这期间，过去的科学成就几乎完全被遗忘。其次是因为 17 世纪以前生产和自然科学所提出的问题，初等数学大都可以解决，对微积分的需求不够迫切。然而，到 17 世纪，欧洲封建社会开始解体，资本主义开始发展，自然科学从神学的桎梏下解放出来，开始大踏步地前进。生产和自然科学部门向数学提出一系列必须从运动和发展观点来研究事物的新问题。

第一个试图阐明阿基米德方法并推广其应用范围的是开普勒（Kepler，1571—1630）。他在 1615 年出版的《测定酒桶体积的新方法》一书中，仿效并发展了“穷竭法”。开普勒想象给定的几何图形被分成无穷个小的同维数图形（不可分量）。他用某种特定的方法把这些图形的面积或体积加起来，便得到给定图形的面积或体积。开普勒不同于阿基米德的是，他在发展使用无穷小方法上，承认无穷小并用直接推导的方法（不是反证法）得出阿基米德的一系列结果。

开普勒观念的继承者及“不可分量方法”的奠基者是卡瓦列利（Cavalieri，1598—1647）。他认为几何图形是由无穷多个维数较低的不可分量组成的。他首先建立起两个给定图形的不可分微元之间的一一对应关系，如果两个给定图形的对应的不可分量具有某种比例，则他便可断定两个图形的面积或体积也具有同样的比例。不可分量法的代表性命题是“卡瓦列利原理”（1623 年确立），即中国的“祖暅原理”（5—6 世纪）。

继承和发展不可分量学说的还有费马（Fermat，1601—1665）和帕斯卡（Pascal，1623—1662），值得一提的是，英国学者瓦里斯（Wallis，1616—1703）在 1655 年出版的《无穷算术》一书中

把极限过程明确地提了出来，并发明了表示无穷大的符号∞。瓦里斯是牛顿、莱布尼兹之前把分析方法引入微积分的工作做得最多的人。

到17世纪上半叶，积分学的发展已经离一般积分概念仅一步之隔，而微分学的研究则才刚刚起步。在微分学的基本问题——作曲线的切线问题上，理论进展很慢。微分学的创始人应该是费马，他研究了微分学的两个问题：求最大最小值与确定切线。

费马是通过考虑函数在其极值附近的特性来解决极大极小值问题的第一人。费马的法则可用函数记号表述如下：要找$f(A)$有最大值或最小值的A值，费马先写近似等式

$$f(A+E)=f(A) \quad \text{或} \quad f(A+E)-f(A)=0$$

两边除以E得

$$\frac{f(A+E)-f(A)}{E}=0$$

在这个等式中，令$E=0$（这相当于取$E\to 0$时的极限），于是得到“真正”的等式：

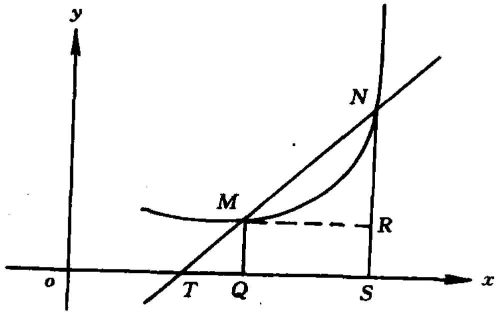
$$\left.\frac{f(A+E)-f(A)}{E}\right|_{E=0}=0$$

用当今微积分的记号即为$f'(A)=0$。其实，E就是自变量A的很小的增量（如果不是无穷小的话）。

费马在同一著作中指出，他的上述法则也可用来求曲线的切线问题。对费马确定切线的方法作若干不重要的改变，即可推广到以隐函数$f(x,y)=0$所确定的曲线上。费马在微分学的发展上虽然功绩很大，但他未曾指出过微分学的基本概念——导数与微分，也未建立微分学的算法，未觉察出他的问题与求积问题之间的关系。

在微积分的先驱中，功绩显赫的当属牛顿的老师巴罗（Barrow，1630—1677），他在《光学及几何学讲义》（1669—1670）里载有切线作法，他改进了费马构造由 $f(x,y)=0$ 定义的曲线的切线的方法。他考虑曲线的一般“任意小的弧”（如下图），写出两端点坐标 $M(x,y)$ 和 $N(x+e,y+a)$，则

$$f(x+e,y+a)-f(x,y)=0$$



因为 M 和 N 都是曲线上的点。然后，他舍弃“一切包含 a 和 e 的幂或者二者之积的项”，最后，他把“任意小的弧” $\overset{\frown}{MN}$ 和直线段 $\overline{MN}$ 看成是一样的，并且注意到三角形 TQM 和“特征三角形”（由莱布尼兹命名）MRN 的相似性。由上述方程解出过点 M 的切线的斜率 $y/t=a/e$。这样，巴罗利用了“特征三角形”的概念——实质上是把切线视为当 a 和 e 趋向于零时割线的极限位置这种思想，并且通过忽略“高阶无穷小”的办法来取极限。

托里拆利（Torricelli，1608—1647）和罗伯瓦尔（Roberval，1602—1675）几乎同时发展了利用瞬时运动的直观概念求切线的方法。这种应用时间和运动的概念研究曲线，使得托里拆利和巴罗至少在直观上认识到切线问题和求积问题之间的关系。巴罗在他的《光学及几何学讲义》中曾证明了现在符号下的等式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x 2\mathrm{d}x = 2$$

二、微积分的创立

在牛顿之前，已有了许多科学积累：哥伦布（Columbus，1451—1506）发现新大陆（1492），哥白尼（Copernicus，1473—1543）创立日心说（1543），伽利略（Galileo，1564—1642）出版《力学对话》（1638），开普勒发现行星运动定理（1619），笛卡尔（Descartes，1596—1650）、费马创立解析几何（1637）。航海、矿山开发、火药枪炮制作提出了一系列的力学和数学问题。微积分在这样的条件下诞生是科学发展的必然。

在17世纪，至少有10多位大数学家探索过微积分。而我们说微积分是由牛顿和莱布尼兹发明的，原因在于其他人研究的都是个例形态，而牛顿和莱布尼兹则超越他们，从众多的个例中提炼出具有共性的东西——无穷小分析，并将其提升，确立为数学理论。

1. 牛顿的研究

1642年圣诞节，牛顿生于英国林肯郡的一个农民家庭，在襁褓中丧父，少年时没有表现出特殊的才华。牛顿于1661年夏入剑桥大学，1665年初获文学学士学位。1669年，巴罗辞去他的教授职位，推举牛顿作为他的继承人。1695年，在担任25年教授之后，牛顿由于严重的神经衰弱，不得不放弃研究而就任伦敦造币厂总监。1727年牛顿去世，被葬于威斯特敏斯特大教堂。

1665和1666两年流行瘟疫，剑桥大学被迫关闭，23岁的牛顿回到了林肯郡的家乡，他平生三大成就：流数术（微积分）、万有引力和光谱分析，都发端于此时。

牛顿对微积分的研究大致可分为三个阶段：第一阶段是静态的无穷小量方法；第二阶段是变量流动生成法；第三阶段是牛顿所谓的“始比”和“末比”的方法。

1669年，牛顿完成了他的第一篇微积分论文——《运用无

穷多项方程的分析学》。论文首先在朋友中散发，1771 年才正式发表。该文具体体现了他在第一阶段的工作，其中不仅给出了一个变量对于另一个变量的瞬时变化率的普遍方法，并证明了面积可以由求变化率的逆过程得到，揭示了微积分的基本性质，即现在所谓的微积分基本定理。当然，牛顿的推导方法在逻辑上是不严密的。

牛顿第二阶段的微积分工作主要体现在 1671 年的《流数术和无穷级数》中，此书发表于 1736 年。此时，牛顿改变了第一阶段静止的观点，认为变量是由点、线、面连续运动而产生的。此外，在本书中，牛顿引进了他独特的符号和概念。他称随时间变化的量为流量，用字母 v，x，y，z 来表示；把流量的变化率称为流数，或者简称为速度，用 $\dot{v}$，$\dot{x}$，$\dot{y}$，$\dot{z}$ 来表示，如果把 x 和 y 当作流量的话，那么其流数分别为 $\dot{x}$ 和 $\dot{y}$。下面我们举例说明牛顿的流数的求法。

例 1　为求函数 $x=t^2$ 的流数，先给 t 添加一个“流量”（无穷小增量）0，相应地，x 便从 t^2 变为 $(t+0)^2$，故 x 获得的流量为 $(t+0)^2-t^2=2t\cdot 0+0^2$，计算两者的比值：

$$\frac{(t+0)^2-t^2}{0}=2t+0$$

最后，再在所得结果中把 0 项舍去。这样就得到

$$\dot{x}=2t$$

在《流数术和无穷级数》中，牛顿主要解决以下问题：

——已知连续运动的路程，求某一时刻的速度（即微分法）。

——已知运动的速度，求某一确定时间内经过的路程（即积分法）。

——将流数术用于求曲线的极值，计算曲线的切线、曲率、弧长、面积等。

牛顿微积分工作的第三阶段明显地表现在他的《曲线求积