配合上海二期课改

新教材

高中一年级第一学期用

黄汉禹　杨安澜　主编
本册主编　曾国光

辅导与训练

数学

上海科学技术出版社

新教材

数学

辅导与训练

高中一年级第一学期用

黄汉禹　杨安澜　主编

本册主编　曾国光

上海科学技术出版社

内 容 提 要

《新教材数学辅导与训练》一书依据上海市二期课改数学学科课程标准编写而成. 全书分知识提要,解题指导,方法指导,基础训练,自我评估,本章测试等部分组成,本书通过提示各个知识要点,指导各类题的解法,让学生牢固掌握数学基础知识,提高学生分析问题和解决问题的能力.

图书在版编目(CIP)数据

新教材数学辅导与训练. 高中一年级. 第一学期用/黄汉禹,杨安澜主编. —上海:上海科学技术出版社,2008.7 (2009.7 重印)

ISBN 978-7-5323-9444-9

Ⅰ.新... Ⅱ.①黄...②杨... Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 083022 号

责任编辑　王韩欢　周玉刚

上海世纪出版股份有限公司
上 海 科 学 技 术 出 版 社　出版、发行
(上海钦州南路 71 号　邮政编码 200235)
新华书店上海发行所经销　常熟市文化印刷有限公司印刷
开本 787×1092　1/16　印张 11.25　字数 263 000
2008 年 7 月第 1 版　2009 年 7 月第 2 次印刷
印数:8 301—10 550
ISBN 978-7-5323-9444-9
定价:15.70 元

编 写 说 明

本书以上海中小学课程教材改革委员会编制的《二期课改数学学科课程标准》和据此编著的教材为依据，内容紧密配合课本.

本书始于20世纪90年代的“一期课改”后期.由于“一期课改”中小学数学教材的成功编著，数学教材编写组曾于1994年获得了“苏步青教育奖”，在社会上取得良好声誉.与这套教材配套，由上海中学、市西中学和控江中学等三所市重点中学的老师们编写的《数学辅导与训练》，以其“辅导得当，训练有素”而深受广大师生青睐.使用10多年来，已经多次改版，成为教辅市场中的一个重要品牌.为适应当前“二期课改”的教学需要，我们在总结各版优点的基础上，重新修订了这套新的《新教材数学辅导与训练》，旨在帮助学生理解“二期课改”新教材，克服学习上的困难，增长阅读能力和自学能力，提高学科素质，及时消化所学的知识内容(基本知识、基本技能和相关的重点、难点)，并为学有余力的学生提供一些深、广度略高于课程标准与教材内容的学习资料.为更好地理解教材精神，本书每章按节在结构上由知识提要、解题指导、基础训练、方法指导和有效练习等部分组成.

【知识提要】 根据“二期课改课程标准”和据此编写的新教材，简明扼要地归纳每节的“双基”概要，让读者一目了然地了解本节内容的精粹.

【解题指导】 这是本书的核心栏目.根据教学要求，精选例题，力求使每个例题都有其学习背景.每个例题视其选题意图、难易程度，分别设置分析、解(包括多种典型解法)，解后恰如其分地进行概括总结，用“说明”、“注意”、“思考”、“实践”等项目加以阐述.这里“说明”是指通过本例阐明解题的一般规律，总结概括解题的一般思路、方法；“注意”是指出解题时容易出错或疏忽的地方；“思考”是指将本例题的条件和结论改变，作适当的引申，形成新题，以启发思考；“实践”是让学生动手试一试、做一做，以加深印象.总之，通过解题指导，让读者能举一反三，提高解题能力.

【基础练习】 在阐述每个“双基”或重要数学思想方法之后，编制基础练习，以使有关的数学知识、思想方法及时得到落实. 必须指出，这种基础练习具有“一课一练”的功能.

【方法指导】 本栏目设置在每节最后，指在归纳本节中解题的主要技能和思想方法，培养读者具有举一反三的解题能力.

【有效练习】 有效的数学学习，一要切实掌握“双基”和数学思想方法，二要进行有效练习. 本书有效练习不仅体现在基础训练方面，还针对每节内容编制相关的练习题，章后编制各章复习题(A级、B级)，这样可帮助读者巩固所学知识，加深理解，熟练技能，全面掌握本章基本知识、基本技能和思想方法及其应用. 为了让学生及时了解自己的学习状况，最后编制各章自我评估题. 以便读者随时把握自己的学习水平. 这种有效练习必将有利于读者数学成绩的提高.

多年来，参与本套书各数学分册编写的单位有上海中学、市西中学、控江中学、市三女中和曹杨二中等市重点中学，作者们对书稿的体例反复斟酌，力求体现以培养创新能力为核心的素质教育精神，全书渗透了丰富的教学经验，一定程度上揭示了市重点中学数学教学的真谛. 编写过程中始终得到各校领导的大力支持，在此我们表示深深的谢意.

本套书各数学分册由黄汉禹、杨安澜主编，邹一心、周玉刚主审. 为全面提高本书质量，各册专设分册主编，本册由曾国光任主编并统稿，张海森阅读了全稿. 本书第1章由孙晖编写，第2章由曹建华编写，第3章由王蕙萱编写，第4章由王国江编写. 为初、高中师生编写一套适用而又有指导意义的数学辅导书，是我们一贯的心愿，也是当前数学教学的需要. 对于我们所作的努力和尝试，诚挚地期望广大读者给予批评指正.

2008年7月

目　　录

第1章　集合和命题

一、集　合

1.1　集合及其表示法

知识提要

1. 集合的概念

集合是应用广泛的数学语言，它是个原始概念，所以只作描述性的解释：若干个（有限个或无限个）确定对象的全体，可以看作一个集合.

我们称组成集合的对象为集合的元素.

2. 元素与集合的关系

一个集合 A 与一个对象 a，要么 a 是 A 中的元素，记作 $a \in A$（读作 a 属于 A）；要么 a 不是 A 中的元素，记作 $a \notin A$（读作 a 不属于 A）. 这个性质即为集合中元素的确定性.

3. 集合的表示方法

通常，我们用列举法与描述法表示一个集合.

列举法就是把集合中的元素一一列举出来，并写在大括号中. 这个方法常常用于元素不太多的有限集（元素为有限个的集合）的表示. 在用列举法表示集合时，要注意：列举时不考虑元素的顺序，元素也不能重复出现. 这就是集合中元素的无序性与互异性.

描述法就是通过描述集合中所有元素的共同特性来表示集合，一般写作 $\{x \mid x$ 具有某种特性$\}$.

我们应熟练记住一些常用的数集符号：自然数集可以用 $\mathbf{N}$ 表示；正整数集可以用 $\mathbf{N}^*$ 表示；整数集可以用 $\mathbf{Z}$ 表示；有理数集可以用 $\mathbf{Q}$ 表示；实数集可以用 $\mathbf{R}$ 表示.

为方便起见，规定空集是一个集合，它不含有任何元素，符号表示为 $\varnothing$.

解题指导

例1　用符号 $\in$ 或 $\notin$ 填空：

(1) 0 ____ $\{0\}$；　　(2) 0 ____ $\varnothing$；　　(3) 0 ____ $\mathbf{N}$；

(4) $-\dfrac{1}{2}$ ____ $\mathbf{Z}$；　　(5) π ____ $\mathbf{Q}$；　　(6) 2 ____ $\mathbf{R}$.

解 (1) $0 \in \{0\}$;(2) $0 \notin \varnothing$;(3) $0 \in \mathbf{N}$;(4) $-\dfrac{1}{2} \notin \mathbf{Z}$;(5) $\pi \notin \mathbf{Q}$;(6) $2 \in \mathbf{R}$.

注意 $\{0\}$与$\varnothing$的区别,$\varnothing$不含任何元素,而$\{0\}$是仅含有0的单元素集合.

例 2 判断元素1, 2, (1, 2)分别与集合A: $\{y \mid y = x^2 + 1, x \in \mathbf{R}\}$和集合$B$: $\{(x, y) \mid y = x^2 + 1, x \in \mathbf{R}\}$之间的关系.

分析 集合A可以化简为$\{y \mid y \geqslant 1\}$,集合B是有序数对的集合,所以只有数对才可能是集合B的元素.

解 $1 \in A$, $2 \in A$, $(1, 2) \notin A$; $1 \notin B$, $2 \notin B$, $\because$ $2 = 1^2 + 1$, $\therefore$ $(1, 2) \in \{(x, y) \mid y = x^2 + 1\}$.

思考 (2, 1)是集合B中的元素吗?试再写出两个元素,使它们分别属于集合A与B.

例 3 已知集合$A = \{2, a^2 + 1, a^2 - a\}$, $B = \{0, 7, a^2 - a - 5, 2 - a\}$,且$5 \in A$,求集合$B$.

分析 由$5 \in A$,得$a^2 + 1 = 5$或$a^2 - a = 5$. 解得a的值,再代入集合A、B检验其中元素是否符合互异性和无序性.

解 由$5 \in A$,得$a^2 + 1 = 5$或$a^2 - a = 5$.

当$a^2 + 1 = 5$,即$a = \pm 2$时,若$a = 2$,则B中0出现2次,不符合集合元素的互异性,所以$a = 2$舍去;若$a = -2$,则$B = \{0, 7, 1, 4\}$,所以$a = -2$是一个解.

当$a^2 - a = 5$,即$a^2 - a - 5 = 0$时,B中元素0又出现2次,所以$a^2 - a = 5$舍去.

综上所述,$a = -2$.

探索 在上述解题过程中,检验是得到正确答案的重要步骤.你能想出无需检验的解题方法吗?

基础练习 1

1. 下列各组集合:

(1) $P = \{1, 2, 3, \cdots, n-1, n\}$, $Q = \{n, n-1, \cdots, 3, 2, 1\}$;

(2) $P = \{(1, 2)\}$, $Q = \{(2, 1)\}$;

(3) $P = \varnothing$; $Q = \{0\}$;

(4) $P = \{x \mid x = 2k + 1, k \in \mathbf{Z}\}$, $Q = \{x \mid x = 2k - 1, k \in \mathbf{Z}\}$.

其中表示同一个集合的是(　　).

(A) (1)、(2)　　(B) (1)、(3)　　(C) (1)、(4)　　(D) (2)、(3)

2. 用符号"$\in$"或"$\notin$"填空:

$\sqrt{5}$ ____ $\mathbf{Q}$; $\dfrac{7}{8}$ ____ $\mathbf{R}$; 0 ____ $\mathbf{N}$; (1, 2) ____ $\{1, 2, 3\}$; a ____ $\{(a, b)\}$.

3. 已知集合$A = \{y \mid y = x^2 + 1, x \in \mathbf{Z}\}$,判断元素1、2、3、4与集合$A$的关系.

4. 已知集合$A = \{2, 3, a^2 + 4a + 2\}$,集合$B = \{0, 7, a^2 + 4a - 2, 2 - a\}$,若$7 \in A$,求集合$B$.

解题指导

例 4 用列举法表示集合: $\{(x, y) \mid x + y = 6, x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{N}\}$.

分析 对x分别取0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,算出对应的y值.要注意(0, 6)与(6, 0)表示不同的元素.

解 当 $x=0$ 时，由 $x+y=6$，得 $y=6$，$\therefore$ $(0,6)\in\{(x,y)\mid x+y=6,x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N}\}$. 同理可求得该集合中的其他元素 $(1,5)$，$(2,4)$，$(3,3)$，$(4,2)$，$(5,1)$，$(6,0)$. 所以，该集合用列举法表示为 $\{(0,6),(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1),(6,0)\}$.

例 5 用描述法表示：被 6 除余 1，且被 4 除余 3 的整数的集合.

分析 被 6 除余 1 的整数集合可以写作 $\{n\mid n=6k+1,k\in\mathbf{Z}\}$；再考虑形如 $6k+1$ 的数被 4 除的余数，可以对 k 进行分类：(1) k 为奇数；(2) k 为偶数.

解 被 6 除余 1 的整数的集合为 $\{n\mid n=6k+1,k\in\mathbf{Z}\}$，考虑该集合中元素被 4 除的余数：对 $n=6k+1$ 中的 k 分两类讨论.

若 k 为奇数，设 $k=2m+1$，$m\in\mathbf{Z}$，则 $k=12m+7$，k 被 4 除余 3；

若 k 为偶数，设 $k=2m$，$m\in\mathbf{Z}$，则 $k=12m+1$，k 被 4 除余 1.

所以符合题意的整数的集合是 $\{n\mid n=12m+7,m\in\mathbf{Z}\}$.

说明 本题还可以从以下角度思考：将所有整数按被 12 除的余数分类，分成 12 个集合，再看每个集合中的整数除以 6 和 4 的余数.

例 6 用列举法表示函数 $y=x+1$ 的图像与函数 $y=x^2+a$（常数 $a\in\mathbf{R}$）图像交点的集合.

分析 两个函数图像的交点坐标可以通过联立方程组 $\begin{cases}y=x+1,\\y=x^2+a\end{cases}$ 解得.

解 由 $\begin{cases}y=x+1,\\y=x^2+a,\end{cases}$ 得 $x^2+a=x+1$，即 $x^2-x+a-1=0$.

$\Delta=1-4(a-1)=5-4a$.

当 $\Delta>0$，即 $a<\dfrac{5}{4}$ 时，$x_1=\dfrac{1+\sqrt{5-4a}}{2}$，$x_2=\dfrac{1-\sqrt{5-4a}}{2}$，

$y_1=x_1+1=\dfrac{3+\sqrt{5-4a}}{2}$，$y_2=x_2+1=\dfrac{3-\sqrt{5-4a}}{2}$.

所以所求集合为

$$\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5-4a}}{2},\frac{3+\sqrt{5-4a}}{2}\right),\left(\frac{1-\sqrt{5-4a}}{2},\frac{3-\sqrt{5-4a}}{2}\right)\right\};$$

当 $\Delta=0$，即 $a=\dfrac{5}{4}$ 时，$x_1=x_2=\dfrac{1}{2}$，$y_1=y_2=\dfrac{3}{2}$，所以所求集合为 $\left\{\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)\right\}$；

当 $\Delta<0$，即 $a>\dfrac{5}{4}$ 时，x 无实数解，所以所求集合为 $\varnothing$.

说明 本题注意两点：(1) 点的集合用有序数对表示；(2) 函数图像交点的坐标是两个函数构成的方程组的解.

基础练习 2

1. 用列举法表示函数 $y=x+2$ 与函数 $y=2x^2-x+2$ 的图像的交点的集合.

2. 用列举法表示集合 $A=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{6}{3-x}\in\mathbf{Z},x\in\mathbf{Z}\right\}$.

3. 用描述法表示被 3 除余 1 且被 4 除余 1 的整数的集合.

方法指导

1. 如何判断元素与集合之间的关系？

若集合用列举法表示，易判断；若集合用描述法判断，则考察元素是否符合集合中元素的共有属性，若符合，则该元素属于已知集合，若不符合，则该元素不属于这个集合.

如设 $A=\{x \mid x=m+n\sqrt{2},\ n,\ m\in\mathbf{Z}\}$，若 $s,\ t\in A$，问 st 是否是集合 A 的元素，为什么？

因为 $s,\ t\in A$，则存在整数 m_1、n_1、m_2、n_2，使得 $s=m_1+n_1\sqrt{2}$、$t=m_2+n_2\sqrt{2}$，所以 $st=(m_1+n_1\sqrt{2})(m_2+n_2\sqrt{2})=(m_1m_2+2n_1n_2)+(m_1n_2+m_2n_1)\sqrt{2}$. 因为 $m_1m_2+2n_1n_2$、$m_1n_2+m_2n_1$ 为整数，所以 $st\in A$.

2. 在表示集合时，不能违反集合中元素的无序性与互异性.

练习题 1.1

一、选择题

1. 已知下列条件：(1) 充分接近$\sqrt{2}$的实数的全体；(2) 大于 0 且小于 20 的 9 与 12 的公倍数的全体；(3) 实数中不是有理数的所有数的全体；(4) 数轴上到原点距离为 1 的点的全体. 在上述条件中能确定一个集合的是(　　).

(A) (1)、(2)、(3)　　(B) (1)、(2)、(4)

(C) (2)、(3)、(4)　　(D) (1)、(3)、(4)

2. 下列说法正确的是(　　).

(A) 小于 100 的质数的全体可以构成一个集合

(B) 若 $a\in\mathbf{N}$，$b\in\mathbf{N}^*$，则 $a+b$ 最小值为 2

(C) 集合$\{4,\ 5\}$和$\{5,\ 4\}$是两个不同的集合

(D) x 轴附近的点可以构成一个集合

3. 下列表示正确的是(　　).

(A) $\varnothing\in\{0\}$　　(B) $0\in\{x \mid x^2+1=0,\ x\in\mathbf{R}\}$

(C) $1\in\{x \mid x^2-1=0\}$　　(D) $\{1,\ 2\}\in\{1,\ 2,\ 3\}$

二、填空题

1. 已知集合 $A=\{y \mid y=x^2-1,\ |x|\leqslant 2,\ x\in\mathbf{Z}\}$，用列举法表示为________.

2. 设集合 $M=\{x \mid 0<x<4\}$，下列关系：(1) $\pi\notin M$；(2) $\pi\in M$；(3) $\{1,\ 2\}\in M$；(4) $\sqrt{3}\in M$. 其中正确的关系式有________.

3. 方程组 $\begin{cases}x+y=1,\\ x-y=-1\end{cases}$ 的解集是________________.

三、解答题

1. 集合 $A=\{(x,\ y) \mid y=x^2-1,\ |x|\leqslant 2,\ x\in\mathbf{Z}\}$，用列举法写出集合 A.

2. 已知集合 $A=\{x \mid x$ 为小于 6 的正整数$\}$，$B=\{x \mid x$ 为小于 10 的素数$\}$，集合 $C=\{x \mid x$ 为 24 和 36 的正公因数$\}$.

(1) 试用列举法表示集合 $M=\{y \mid y\in A$ 且 $y\in C\}$；

(2) 试用列举法表示集合 $N = \{y \mid y \in B$ 且 $y \notin C\}$.

3. 用列举法表示下列集合：

(1) $\{x \mid x = \sqrt{a},\ a < 36,\ x \in \mathbf{N}^*\}$；　　(2) $\left\{x \,\middle|\, \dfrac{6}{3-x} \in \mathbf{N},\ x \in \mathbf{Z}\right\}$.

1.2　集合之间的关系

知识提要

1. 子集

对于两个集合 A 和 B，如果集合 A 中任何一个元素都属于集合 B，那么集合 A 叫做集合 B 的子集，记作 $A \subseteq B$.

由此可知，若集合 A 中存在一个元素不属于集合 B，则**集合 A 不是集合 B 的子集.**

要注意区别“包含”与“不包含”是集合与集合之间的关系，“属于”和“不属于”是元素与集合之间的关系.

2. 真子集

对于两个集合 A 和 B，如果集合 $A \subseteq B$，并且 B 中至少有一个元素不属于 A，那么集合 A 叫做集合 B 的**真子集**，记作 $A \subsetneqq B$.

空集是任何集合的子集，但空集不是任何集合的真子集，例如：空集不是空集的真子集.

含有 $n(n \in \mathbf{N}^*)$ 个元素的有限集合的子集个数为 2^n 个，非空子集个数为 $2^n - 1$ 个，真子集个数为 $2^n - 1$ 个，非空真子集个数为 $2^n - 2$ 个.

3. 相等的集合

对于两个集合 A 和 B，若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$，则称集合 A 与集合 B 相等，记作：$A = B$.

由定义可知，要证集合 A 与 B 相等，只需证明 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$.

解题指导

例 1　用符号“$\subseteq$、$\supseteq$、$\subsetneqq$、$\supsetneqq$、$=$、$\in$、$\notin$”填空：

(1) $\varnothing$ ____ $\{x \mid x^2 + 1 = 0,\ x \in \mathbf{R}\}$；　　(2) $\varnothing$ ____ $\{0\}$；

(3) 0 ____ $\{0\}$；　　(4) $\{a, b, c\}$ ____ $\{a\}$；

(5) 0 ____ $\varnothing$；　　(6) $\mathbf{N}^*$ ____ $\mathbf{Z}^+$；

(7) $\{a, b, c\}$ ____ $\{b, a, c\}$；　　(8) $\mathbf{Q}$ ____ $\mathbf{R}$.

分析　解决此类问题，首先判断是集合与集合的关系还是元素与集合的关系，若是集合与集合的关系，则在$\subseteq$、$\supseteq$、$\subsetneqq$、$\supsetneqq$、$=$中选取最恰当的符号，若是元素与集合的关系，则在$\in$、$\notin$中选取适当的符号.

解　(1) $\varnothing = \{x \mid x^2 + 1 = 0,\ x \in \mathbf{R}\}$；(2) $\varnothing \subsetneqq \{0\}$；(3) $0 \in \{0\}$；(4) $\{a, b, c\} \supsetneqq \{a\}$；(5) $0 \notin \varnothing$；(6) $\mathbf{N}^* = \mathbf{Z}^+$；(7) $\{a, b, c\} = \{b, a, c\}$；(8) $\mathbf{Q} \subsetneqq \mathbf{R}$.

说明　(1)中 $x \in \mathbf{R}$，方程 $x^2 + 1 = 0$ 无解，所以 $\{x \mid x^2 + 1 = 0,\ x \in \mathbf{R}\}$ 不含任何元素，为空集.

例 2　若集合 A 满足条件 $\{a, b\} \subsetneqq A \subseteq \{a, b, c, d\}$，求集合 A.

分析　因为 $\{a, b\} \subsetneqq A$，所以集合 A 中必有元素 a，b，且至少有 1 个元素不在集合$\{a, b\}$中；又因为 $A \subseteq \{a, b, c, d\}$，所以集合 A 除含有元素 a，b 外，还有元素 c、d 中的 1 个或 2 个.

解　$A = \{a, b, c\}$ 或 $A = \{a, b, d\}$ 或 $A = \{a, b, c, d\}$.

说明 因为含有 $n(n\in \mathbf{N}^*)$ 个元素的有限集合，其非空子集的个数为 2^n-1 个，所以集合 A 的个数等于集合 $\{c, d\}$ 的非空子集的个数 3.

例 3 已知集合 $A=\{x \mid a+1\leqslant x\leqslant 2a-1\}$，集合 $B=\{x \mid -2\leqslant x\leqslant 5\}$，$A\subseteq B$，求实数 a 的取值范围.

分析 可以借助数轴帮助分析问题，要考虑 A 为空集的情况.

解 (1) 当 $A=\varnothing$ 时，则 $a+1>2a-1$，即 $a<2$，符合题意.

(2) 当 $A\neq\varnothing$ 时，因为 $A\subseteq B$，则 $\begin{cases}a+1\leqslant 2a-1,\\ a+1\geqslant -2,\\ 2a-1\leqslant 5.\end{cases}$ 解不等式组，得 $2\leqslant a\leqslant 3$；

综上所述，$a\leqslant 3$.

说明 (1) 空集是任何集合的子集，在解与子集有关问题时，不要遗漏空集情况；(2) 当集合 A 和 B 表示的是一个变量的取值范围时，可借助数轴帮助确定两个集合的关系，特别地，要注意端点的取值情况.

基础练习 1

1. 下列四个关系式：(1) $a\subseteq\{a\}$；(2) $\{a\}\in\{a, b\}$；(3) $\{a\}\subseteq\{a\}$；(4) $\varnothing\in\{a, b\}$. 其中正确的序号是__________.

2. 集合 M 满足 $\{x \mid x^2+1=0, x\in\mathbf{R}\}\subsetneqq M\subseteq\left\{27, \dfrac{1}{27}\right\}$，求集合 M.

3. 设 $A=\{x \mid 2a<x\leqslant 4\}$；$B=\{x \mid 2\leqslant x\leqslant 3a+1\}$，若 $B\subseteq A$，且 $B\neq\varnothing$，求实数 a 的取值范围.

解题指导

例 4 设 a、$b\in\mathbf{R}$，集合 $\{1, a+b, a\}=\left\{0, \dfrac{b}{a}, b\right\}$，求 $b-a$.

分析 因为 $\dfrac{b}{a}$ 有意义，所以 $a\neq 0$，由已知 $0\in\{1, a+b, a\}$，则必有 $a+b=0$.

解法 1 由已知 $a\neq 0$，得 $a+b=0$，即 $\dfrac{b}{a}=-1$，将其代入已知条件，得 $\{1, 0, a\}=\{0, -1, b\}$. 故可得 $a=-1$，$b=1$，$\therefore\ b-a=2$.

解法 2 由已知，得

$$\begin{cases}1+(a+b)+a=0+\dfrac{b}{a}+b,\\[2mm] 1\cdot(a+b)\cdot a=0\cdot\dfrac{b}{a}\cdot b.\end{cases}$$

解方程组，得 $\begin{cases}a=-1,\\ b=1.\end{cases}$ 经检验符合题意. $\therefore\ b-a=2$.

说明 (1) 解法 1 通过集合相等的定义，分析两集合中元素的特点解题，这是集合相等问题中求待定参数的一种常用方法. (2) 解法 2 利用方程的思想来求待定参数，通过两集合元素相同时，和相等以及积相等列出方程组，求解待定参数，但要注意这种解法可能产生增根.

例5 已知集合 $S=\{1, 2\}$，集合 $T=\{x \mid ax^2-3x+b=0\}$，且 $S=T$，求实数 a 的值.

分析 由集合的表示方法可知，集合 T 是方程 $ax^2-3x+b=0$ 的解构成的集合. 由 $S=T$，将题目转化成“若方程 $ax^2-3x+b=0$ 的解为 1，2，求实数 a 的值”，用韦达定理或待定系数法求解.

解法1 由题意，得 1 和 2 是方程 $ax^2-3x+b=0$ 的两个根.

由韦达定理可知 $\begin{cases}1+2=\dfrac{3}{a},\\ 1\times 2=\dfrac{b}{a}.\end{cases}$ 解方程组，得 $\begin{cases}a=1,\\ b=2.\end{cases}$

解法2 由 $ax^2-3x+b=a(x-1)(x-2)$，得 $ax^2-3x+b=ax^2-3ax+2a$. 所以 $\begin{cases}-3=-3a,\\ b=2a.\end{cases}$ 解方程组，得 $\begin{cases}a=1,\\ b=2.\end{cases}$

说明 等价转化思想是一种重要的数学思想，可以将复杂问题简单化.

例6 已知集合 $A=\{x \mid x^2-3x+2=0\}$，集合 $B=\{x \mid x^2-ax+a-1=0\}$，若 $B\subseteq A$，求实数 a 的值.

分析 本题体现的是两个方程的解集之间的关系，现确定 $A=\{1, 2\}$，若 $B\subseteq A$，则 B 有四种情况：$\varnothing$、$\{1\}$、$\{2\}$、$\{1, 2\}$，分别表示方程无解，方程有两个相等的实根，以及方程有两个不相等的实根，然后进行讨论.

解法1 $A=\{1, 2\}$，又因为 $B\subseteq A$，所以 B 可能情况为：$\varnothing$、$\{1\}$、$\{2\}$及$\{1, 2\}$.

(1) 当 $B=\varnothing$ 时，方程 $x^2-ax+a-1=0$ 无解，而 $\Delta=(a-2)^2\geqslant 0$，故 $B=\varnothing$ 这种情况不存在.

(2) 当 $B=\{1\}$ 时，方程 $x^2-ax+a-1=0$ 有两个相等的根为 1. 由 $\Delta=(a-2)^2=0$，得 $a=2$. 将 $a=2$ 代入原方程，得 $x_1=x_2=1$.

(3) 当 $B=\{2\}$ 时，方程 $x^2-ax+a-1=0$ 有两个相等的根为 2. 由(2)得 这种情况不存在.

(4) 当 $B=\{1, 2\}$ 时，由韦达定理，得 $1+2=a$ 且 $1\times 2=a-1$. $\therefore$ $a=3$.

综上所述 $a=2$ 或 $a=3$.

解法2 $B=\{x \mid (x-1)(x-a+1)=0\}$，$\therefore$ $1\in B$. 又 $\because$ $B\subseteq A$，$\therefore$ $B=\{1\}$ 或 $B=\{1, 2\}$.

当 $B=\{1\}$ 时，$a-1=1$，$\therefore$ $a=2$；

当 $B=\{1, 2\}$ 时，$a-1=2$，$\therefore$ $a=3$.

综上所述 $a=2$ 或 $a=3$.

说明 (1) 在讨论含参数的集合是一个确定集合子集时，不要遗漏讨论空集的情况；(2) 在讨论含参数的集合是一个确定集合子集时，可先写出集合的所有情况，再逐一进行讨论.

基础练习 2

1. 已知集合 $M=\{x, xy, \sqrt{x-y}\}$，$N=\{0, |x|, y\}$，若 $M=N$，求实数 x、y.
2. 设集合 $P=\{x \mid x^2+2x-3=0\}$，$Q=\{x \mid mx-1=0\}$，若 $Q\subsetneqq P$，求实数 m 的取值范围.
3. 已知集合 $A=\{x \mid x^2+4x=0\}$，$B=\{x \mid x^2+2(a+1)x+a^2-1=0\}$，若 $B\subseteq A$，求实数 a 的取值范围.

方法指导

1. 在如何确定关系符号“$\in$、$\notin$、$\subseteq$、$\subsetneqq$”这类问题中，首先要判断是集合与集合之间的关系还是元素与集合之间的关系，集合与集合之间存在包含与不包含的关系，而元素与集合之间存在属于和不属于的关系.在符号的选择上，要选择最恰当的符号来体现关系.

2. 在通过集合相等解题的过程中，通常是通过集合相等的定义研究集合中元素的特征来待定参数，此时特别注意集合元素的互异性.

3. 在解决未知集合是已知集合的子集问题时，不要忽略空集是任何集合的子集，所以要考虑未知集合是否可能为空集；另外解题中经常使用到几种重要的数学思想：数形结合(如例 3 可借助数轴来确定端点之间的关系，特别是端点是否可取的问题)、分类讨论(如例 6 中，把已知集合的所有子集罗列出来后进行分别讨论)、等价转化思想(如例 5 把确定集合的问题转化成确定方程的问题).

练习题 1.2

一、填空题

1. 已知集合 $A=\{-1, 3, m\}$，集合 $B=\{3, m^2\}$，若 $B\subseteq A$，则实数 $m=$ ________.

2. 已知集合 $A=\{1, x\}$，$B=\{1, x^2\}$，且 $A=B$，则 $x=$ ________.

3. 已知集合 $A=\{x \mid x=2k+1, k\in \mathbf{Z}\}$，$B=\{x \mid x=4k\pm 1, k\in \mathbf{Z}\}$，则 A ____ B；若集合 $M=\{x \mid x=2m, m\in \mathbf{Z}\}$，$N=\{x \mid x=4n\pm 2, n\in \mathbf{Z}\}$，则 M ____ N.

4. 若集合 $A\subseteq\{1, 2\}$，$B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$，且 $A\subseteq P\subsetneqq B$，则满足上述条件的集合 P 共有____个.

二、选择题

1. 已知集合 $A=\{x \mid x\neq 1$ 或 $x\neq 2, x\in \mathbf{R}\}$，集合 $B=\{x \mid x<1$ 或 $1<x<2$ 或 $x>2\}$，则 A、B 之间的关系是(　　).

(A) $A=B$　　(B) $A\subsetneqq B$　　(C) $A\supsetneqq B$　　(D) $A\subseteq B$

2. 已知集合 $P=\{x \mid x=n^2+1, n\in \mathbf{N}^*\}$，$M=\{x \mid x=m^2-4m+5, m\in \mathbf{N}^*\}$，则集合 P 与 M 的关系是(　　).

(A) $P\subsetneqq M$　　(B) $P=M$　　(C) $P\subseteq M$　　(D) $M\subseteq P$

3. 设集合 $A\subseteq B$，$A\subseteq C$，且 $B=\{0, 1, 2, 3, 4\}$，$C=\{0, 2, 4, 8\}$，则集合 A 的个数为(　　).

(A) 4 个　　(B) 8 个　　(C) 16 个　　(D) 32 个

4. 集合 $A=\left\{x \,\middle|\, x=\dfrac{1}{2}n+1, n\in \mathbf{Z}\right\}$，$B=\left\{x \,\middle|\, x=n\pm\dfrac{1}{2}, n\in \mathbf{Z}\right\}$，$C=\left\{x \,\middle|\, x=\dfrac{1}{2}n-1, n\in \mathbf{Z}\right\}$，三者之间的关系正确的是(　　).

(A) $A=B\subseteq C$　　(B) $B=C\subseteq A$　　(C) $B\subseteq A=C$　　(D) $B\supsetneqq A=C$

三、解答题

1. 已知集合 $A=\{a, a+b, a+2b\}$，$B=\{a, ac, ac^2\}$，若 $A=B$，求 c 的值.

2. 若集合 $A=\{x \mid x^2+px+q=0\}$，$B=\{x \mid x^2-3x+2=0\}$，且 $A\subseteq B$，求 p、q 应

满足的条件.

3. 设集合 $A=\{x \mid 1 \leqslant x<2,\ x \in \mathbf{R}\}$, $B=\{x \mid 1 \leqslant x \leqslant a,\ x \in \mathbf{R}\}$.

(1) 当 $A \subsetneq B$ 时,求 a 的取值范围;

(2) 当 $B \subseteq A$ 时,求 a 的取值范围.

1.3 集合的运算

知识提要

集合的运算从文字语言、符号语言和图形语言三个角度来认识和理解.

1. 交集

(1) 定义　由集合 A 和集合 B 的所有公共元素组成的集合叫做 A 与 B 的交集,记作"$A \cap B$". 即:$A \cap B=\{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$.

(2) 交集的性质

① $A \cap B=B \cap A$;② $A \cap A=A$; ③ $A \cap \varnothing=\varnothing$;④ $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$; ⑤ 若$A \cap B=A$,则 $A \subseteq B$; 反之亦然.

2. 并集

(1) 定义　由所有属于集合 A 或者属于集合 B 的元素组成的集合叫做集合 A 与 B 的并集,记作"$A \cup B$". 即 $A \cup B=\{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$.

(2) 并集的性质

① $A \cup B=B \cup A$;② $A \cup A=A$;③ $A \cup \varnothing=A$;④ $A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$;⑤ 若 $A \cup B=B$,则 $A \subseteq B$; 反之亦然.

3. 补集

(1) 定义　设 U 为全集,A 是 U 的子集,则由 U 中所有不属于集合 A 的元素组成的集合叫做集合 A 在全集 U 中的补集. 记作 $\complement_U A$. 即 $\complement_U A=\{x \mid x \in U$ 且 $x \notin A\}$.

(2) 补集的性质

① $\complement_U(\complement_U A)=A$;② $\complement_U U=\varnothing$, $\complement_U \varnothing=U$;③ $\complement_U A \cap A=\varnothing$, $\complement_U A \cup A=U$;④ 若 $A \subseteq B$,则 $A \cap \complement_U B=\varnothing$;若 $A \subseteq B$,则 $B \cup \complement_U A=U$;⑤ $\complement_U(A \cup B)=\complement_U A \cap \complement_U B$; $\complement_U(A \cap B)=\complement_U A \cup \complement_U B$.

补集是相对于全集而言的,是依赖于全集的存在而存在的,而全集的规定常常是根据实际的需要自定的,一般在题目中会给出全集.

在研究数集时,若不加特别说明,全集就是实数集 $\mathbf{R}$.

4. 集合的交集、并集与补集,可以借助数轴或文氏图帮助理解与运算.

解题指导

例 1　设集合 $A=\{x \mid -1<x<4,\ x \in \mathbf{Z}\}$, $B=\{x \mid -2 \leqslant x \leqslant 5,\ x \in \mathbf{Z}\}$,求 $A \cap B$.

分析　分别用列举法写出两个集合,再寻找它们的所有公共元素.

解　$\because$　$A=\{x \mid -1<x<4,\ x \in \mathbf{Z}\}=\{0, 1, 2, 3\}$,

$B=\{x \mid -2 \leqslant x \leqslant 5,\ x \in \mathbf{Z}\}=\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$,

$\therefore$　$A \cap B=\{0, 1, 2, 3\}$.

说明 解题时注意集合中的元素 $x \in \mathbf{Z}$.

例 2 设集合 $P=\{x \mid 1<x<2\}$, $Q=\{x \mid x<a\}$,若 $P \cap Q=P$,求实数 a 的范围.

分析 $P \cap Q=P$ 转化为 $P \subseteq Q$,利用数轴分析数集 P, Q 之间的关系.

解 $\because$ $P \cap Q=P$, $\therefore$ $P \subseteq Q$,集合 P、Q 在数轴上表示,如图 1-1 所示,要满足 $P \subseteq Q$,则 $a \geqslant 2$.

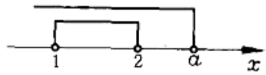

图 1-1

说明 交集的图像特征是取区域的公共部分;利用数形结合的思想有助于直观讨论两数集之间的关系.在本题中特别要注意端点能否取到,这是这类题型的难点.

例 3 设集合 $A=\{y \mid y=x^2-4x+3, x \in \mathbf{Z}\}$, $B=\{y \mid y=-x^2-2x, x \in \mathbf{Z}\}$,求 $A \cap B$.

分析 集合 A 表示当 x 取遍一切整数时,$y=x^2-4x+3$ 的函数值的全体.为了便于解题,借助配方法将 A 用列举法表示出来.同理,B 也可用列举法表示出来.于是 $A \cap B$ 即可求得.

解 $y=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$.因 $x \in \mathbf{Z}$,故若令 $t=|x-2|$,则 t 为非负整数,且 $y=t^2-1$. $\therefore$ $A=\{y \mid y=t^2-1, t \in \mathbf{N}\}=\{-1, 0, 3, 8, \cdots, t^2-1, \cdots\}$.

同理, $B=\{y \mid y=-(x+1)^2+1, x \in \mathbf{Z}\}=\{y \mid y=-s^2+1, s \in \mathbf{N}\}=\{0, -3, -8, \cdots -s^2+1, \cdots\}$.

$\therefore$ $A \cap B=\{0\}$.

说明 本题主要弄清构成集合的元素的特点,两个集合都是当 x 取整数时的函数值的集合,列出函数值后可求得交集,交集的元素并不要求在同一个 x 处取得.

思考 (1) 如果将题目中的 A、B 改成 $A=\{y \mid y=x^2-4x+3, x \in \mathbf{R}\}$, $B=\{y \mid y=-x^2-2x, x \in \mathbf{R}\}$,结果将如何?

(2) 如果将题目中的 A、B 改成 $A=\{(x, y) \mid y=x^2-4x+3, x \in \mathbf{R}\}$, $B=\{(x, y) \mid y=-x^2-2x, x \in \mathbf{R}\}$,结果将如何?

例 4 设集合 $M=\{(x, y) \mid 2x+y=3\}$, $N=\{(x, y) \mid ax+y=b, a、b \in \mathbf{R}\}$,求 $M \cap N$.

分析 两个集合表示的都是方程的解集,要求两个集合的交集,即求同时满足两个方程的解的集合.

解 x、y 同时满足方程组 $\begin{cases} 2x+y=3, & ① \\ ax+y=b. & ② \end{cases}$

②-①,得 $(a-2)x=b-3$.

(1) 当 $a=2$, $b=3$ 时,$x \in \mathbf{R}$, $M \cap N=M$;

(2) 当 $a=2$, $b \neq 3$ 时,x 无解,所以 $M \cap N=\varnothing$;

(3) 当 $a \neq 2$ 时,将 $x=\dfrac{b-3}{a-2}$ 代入①,得 $y=\dfrac{3a-2b}{a-2}$.

$\therefore$ $M \cap N=\left\{\left(\dfrac{b-3}{a-2}, \dfrac{3a-2b}{a-2}\right)\right\}$.

说明 解此题时,遇到含有字母系数的一次方程组,对字母系数的方程的解要进行分类讨论:

$ax=b$, a、$b \in \mathbf{R}$.

当 $a=0$, $b=0$ 时,$0 \cdot x=0$,方程有无数解;

当 $a=0$, $b \neq 0$ 时,$0 \cdot x=b(b \neq 0)$,方程无解;

当 $a \neq 0$ 时,$x=-\dfrac{b}{a}$,方程有一解.