21世纪大学数学精品教材

线性代数学习指导

赵喜林　余　东　主编

科学出版社
www.sciencep.com

21 世纪大学数学精品教材

线性代数学习指导

赵喜林　余　东　主编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书紧扣高等院校公共数学课现在所使用的教材，以培养创造性思维和数学素质，提高学生分析问题和解决问题的能力为主线编写.

全书内容包括矩阵、向量、行列式、线性方程组、相似矩阵及二次型、线性空间与线性变换，每章内容由基本要求、内容提要、主要方法、典型题解、测试题等大块构成. 书后附有综合试题和线性代数中常用的等价命题，所有试题均给出了解答或提示.

本书内容充实，题型丰富. 可作为高等院校理工类、经管类学生学习线性代数的配套教材和指导书，也可作为报考工学、理学及经济类硕士研究生的复习资料以及相关教师的教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习指导/赵喜林，余东主编. —北京：科学出版社，2009
21 世纪大学数学精品教材
ISBN 978-7-03-024316-4

Ⅰ. 线… Ⅱ. ①赵…②余… Ⅲ. 线性代数—高等学校—教学参考资料
Ⅳ. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 045341 号

责任编辑：杨瑰玉/责任校对：董艳辉
责任印制：彭　超/封面设计：苏　波

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

武汉市新华印刷有限责任公司印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2009 年 4 月第　一　版　开本：B5 (720×1000)
2009 年 4 月第一次印刷　印张：12 3/4
印数：1—6 000　　字数：251 000

定价：22.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

21 世纪大学数学精品教材

《线性代数学习指导》编委会

主　编　赵喜林　余　东

副主编　王志明　熊　丹　李春丽

编　委　赵喜林　余　东　王志明　熊　丹

李春丽　胡　松　蒋　君　李琳娜

张　强　彭　静　祝彦成

前　言

线性代数是高等院校一门重要的公共数学课．很多学生觉得线性代数难学，做起题目来不知从何下手，究其原因，是因为线性代数的内容前后联系紧密，相互交织，像一张网！同一个概念有多种等价地描述方式．比如秩对矩阵而言是最高阶非零子式的阶数，对向量组而言是最大无关组所含向量的个数；线性方程组系数矩阵的秩是去掉多余方程余下的有效方程的个数，而对称矩阵的秩表示非零特征值的个数．还有其他许多概念、结论像秩一样，在不同的场合有不同的表述．因此，学习线性代数时，不但要对每一个知识点的内容非常熟练，还要把各个知识点互相联系起来，做到融会贯通，这样才能将线性代数的内容运用自如．正是基于这样一个目的，编写了这本《线性代数学习指导》．该书的内容编排参照余胜春、李德宜主编的《线性代数》，可作为它的配套教材．

本书每一章的内容包括基本要求、内容提要、主要方法、典型题解、测试题．基本要求给出了每一部分内容应该掌握的程度；内容提要给出了每一章的主要概念、公式和主要结论；主要方法介绍了每一章解题所用到的主要方法；典型题解选自历年考研和其他参考书上的一些经典题型，对它们做了详细的解答和部分评注，并归纳了一些一般的结论；测试题一注重基础训练；测试题二提升了难度，注重综合训练，达到或接近公共数学课考研要求．书末附有综合测试题和线性代数中常用的等价命题．综合测试题供复习完线性代数后自我检测之用；常用的等价命题归纳总结了线性代数中常用命题的等价表述形式．

在编写每一部分内容时，我们力求做到：注重基础训练，突出内容重点，加强技能培养，提高解题能力，结合考研要求．如果例题是考研题，用带小括号的数字标注，比如【例 4】(94.3)表示该题为 94 年考研数学三的考题．

本书由赵喜林、余东主编，王志明、熊丹、李春丽任副主编．赵喜林、王志明提出编写思路．各章的具体编写人员为：赵喜林(第一、二章)，李春丽(第三章)，余东(第四章)，熊丹(第五、六章)，赵喜林统稿．胡松、蒋君、李琳娜、张强、彭静、祝彦成参与了本书的编写工作．

由于编者水平有限，不当之处在所难免，恳请读者批评指正．

编　者

2009 年 3 月

目　　录

第一章　矩　　阵

基 本 要 求

1. 理解矩阵的概念，了解一些特殊矩阵的定义及性质.

2. 掌握矩阵的线性运算(加、减、数乘)、乘法、转置以及它们的运算规律，了解方阵的幂.

3. 理解逆矩阵的概念，掌握逆矩阵的性质以及求逆矩阵的基本方法.

4. 了解分块矩阵及其运算.

5. 掌握矩阵的初等变换，了解矩阵等价的概念及性质.

内 容 提 要

一、几类特殊矩阵

(1) 零矩阵 $\boldsymbol{O}$(所有元素都为 0 的矩阵).

(2) 单位矩阵 $\boldsymbol{E}$(主对角线上元素都为 1，其他元素都为 0 的矩阵).

(3) 对称阵 ($\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$).

(4) 反对称阵 ($\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$).

(5) 对角阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ ($a_{ij}=0$, $i\neq j$).

(6) 初等矩阵(单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 经过一次初等变换而成的矩阵).

(7) 逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$(满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$ 的矩阵).

(8) 正交阵 ($\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$). (第二章)

(9) 伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*=(\boldsymbol{A}_{ji})$，若 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$. (第三章)

二、矩阵的运算

(1) 线性运算：设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$，则

$$\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}=(a_{ij}\pm b_{ij})_{m\times n},\quad \lambda\boldsymbol{A}=(\lambda a_{ij})_{m\times n}$$

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A},\quad (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$$

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$$

(2) 乘法运算：设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$，则 $\boldsymbol{AB}=(c_{ij})_{m\times n}$，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}$$

$$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}),\quad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC},\quad (\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$$

$$AE = A,\quad EA = A,\quad AO = O,\quad OA = O$$
$$(kA)(lB) = (kl)(AB)\quad (k,\ l\ \text{为数})$$

【注】 一般情况下：

① $AB \neq BA$；

② $AB = O \not\Rightarrow A = O$ 或 $B = O$，但 A 可逆时，$AB = O \Rightarrow B = O$；

③ $AB = AC \not\Rightarrow B = C$，但 A 可逆时，$AB = AC \Rightarrow B = C$；

④ $A^2 = O \not\Rightarrow A = O$；

⑤ $A^2 = E \not\Rightarrow A = \pm E$.

(3) 转置：

$(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A,\quad (kA)^{\mathrm{T}} = kA^{\mathrm{T}},\quad (A+B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}},\quad (AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$

(4) 逆矩阵：

$$(A^{-1})^{-1} = A,\quad (kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1},\quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$
$$(A_1A_2\cdots A_n)^{-1} = A_n^{-1}A_{n-1}^{-1}\cdots A_1^{-1},\quad (A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$$

(5) 方阵的幂(k，l，n 为正整数)：

$$A^0 = E,\quad A^kA^l = A^{k+l},\quad (A^k)^l = A^{kl},\quad (A^k)^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^k$$
$$(lA)^k = l^kA^k,\quad (A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$$

(6) 分块矩阵：将分块矩阵“每块”看成一般矩阵的元素，分块矩阵的运算和一般矩阵的运算类似，但要求“块”之间的运算能够进行.

① 设 $A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{sr} \end{pmatrix}$，则

$$A + B = \begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & \cdots & A_{1r}+B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1}+B_{s1} & \cdots & A_{sr}+B_{sr} \end{pmatrix}$$

② 设 $A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$，$\lambda$ 为数，则 $\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \cdots & \lambda A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{s1} & \cdots & \lambda A_{sr} \end{pmatrix}$.

③ 设 $A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{t1} & \cdots & B_{tr} \end{pmatrix}$，则 $AB = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & \cdots & C_{sr} \end{pmatrix}$，

其中

$$C_{ij}=\sum_{k=1}^{t}A_{ik}B_{kj}\quad(i=1,\cdots,s;\ j=1,\cdots,r)$$

④ 设 $A=\begin{pmatrix}A_{11}&\cdots&A_{1r}\\ \vdots&&\vdots\\ A_{s1}&\cdots&A_{sr}\end{pmatrix}$，则 $A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}A_{11}^{\mathrm{T}}&\cdots&A_{s1}^{\mathrm{T}}\\ \vdots&&\vdots\\ A_{1r}^{\mathrm{T}}&\cdots&A_{sr}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$.

⑤ 设 $A=\begin{pmatrix}A_1&&O\\&\ddots&\\O&&A_s\end{pmatrix}$，则 $A^{-1}=\begin{pmatrix}A_1^{-1}&&O\\&\ddots&\\O&&A_s^{-1}\end{pmatrix}$；

设 $B=\begin{pmatrix}O&&B_1\\&\iddots&\\B_t&&O\end{pmatrix}$，则 $B^{-1}=\begin{pmatrix}O&&B_t^{-1}\\&\iddots&\\B_1^{-1}&&O\end{pmatrix}$.

⑥ 设 $A=\begin{pmatrix}A_1&&O\\&\ddots&\\O&&A_s\end{pmatrix}$，则 $A^n=\begin{pmatrix}A_1^n&&O\\&\ddots&\\O&&A_s^n\end{pmatrix}$.

三、矩阵的等价

(1) 初等变换：对矩阵的行(列)施行下列变换，称为初等变换.

① 交换两行(列) $r_i\leftrightarrow r_j$；

② 用非零的数 k 乘某行 kr_i $(k\neq 0)$；

③ 用数 k 乘某行加到另一行 kr_i+r_j.

初等变换可以通过乘初等矩阵来实现. 左乘初等矩阵相当于做行初等变换，右乘初等矩阵相当于做列初等变换.

(2) 矩阵 A 经有限次初等变换成 B，称 A，B 等价，记为 $A\cong B$.

$$A\cong\begin{pmatrix}E_r&O\\O&O\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}E_r&O\\O&O\end{pmatrix}$ 称为 A 的标准形.

(3) $A\cong B\Leftrightarrow\exists$ 可逆阵 P，Q，使 $PAQ=B$.

主 要 方 法

一、求逆矩阵

(1) 利用式 $AA^{-1}=E$，$A^{-1}A=E$.

【例 1】 已知 $A^2+2A-3E=O$，求 $(A+4E)^{-1}$.

【分析】 想办法凑出矩阵 X，使 $(A+4E)X=E$，则 $X=(A+4E)^{-1}$.

已知 $A^2+2A-3E=O$ 可以和代数式子 $x^2+2x-3=0$ 对照，将 x^2+2x-3 凑成 $(x+4)(x-2)$(注：主要凑出 x 的二次、一次项的系数)，对应就有 $(A+4E)(A-2E)$.

【解】 $A^2+2A-3E=O \Rightarrow (A+4E)(A-2E)=-5E$

$$\Rightarrow (A+4E)\left(\frac{2}{5}E-\frac{1}{5}A\right)=E$$

所以，$(A+4E)^{-1}=\dfrac{2}{5}E-\dfrac{1}{5}A$.

【例 2】 A，B 均为三阶阵，E 是三阶单位阵. 已知 $AB=2A+B$，$B=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&4&0\\2&0&2\end{pmatrix}$，则 $(A-E)^{-1}=$ ________.

【分析】 $AB=2A+B$ 看成 $xy-2x-y=0 \Rightarrow (x-1)(y-2)=2$. 所以，由 $AB=2A+B \Rightarrow (A-E)(B-2E)=2E \Rightarrow (A-E)\left(\dfrac{1}{2}B-E\right)=E$. 所以，

$$(A-E)^{-1}=\frac{1}{2}B-E=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

(2) 利用分块矩阵.

【例 3】 设 $A=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&2&0&0\\3&0&0&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}$，求 A^{-1}.

【解】 $A=\dfrac{1}{5}\left(\begin{array}{ccc:c}0&0&1&0\\0&2&0&0\\3&0&0&0\\\hdashline 0&0&0&4\end{array}\right)=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}C&O\\O&D\end{pmatrix}$

$$A^{-1}=5\begin{pmatrix}C^{-1}&O\\O&D^{-1}\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}0&0&1/3&0\\0&1/2&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1/4\end{pmatrix}$$

【注】 $\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_n^{-1} \end{pmatrix}$；$\begin{pmatrix} & & a_1 \\ & \iddots & \\ a_n & & \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} & & a_n^{-1} \\ & \iddots & \\ a_1^{-1} & & \end{pmatrix}$

【例 4】 (94.3) 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & & & \\ & & a_2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ & & & & a_{n-1} \\ a_n & \cdots & & & 0 \end{pmatrix}$，其中 $a_i \neq 0$，$i=1,2,\cdots,n$，求 A^{-1}.

【解】 $A^{-1} = \left(\begin{array}{c|cccc} 0 & a_1 & & & \\ & & a_2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ & & & & a_{n-1} \\ \hline a_n & \cdots & & & 0 \end{array}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} O & B \\ C & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{pmatrix}$，

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} a_1^{-1} & & & \\ & a_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{n-1}^{-1} \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = a_n^{-1}$$

所以

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & & & a_n^{-1} \\ a_1^{-1} & & & & \\ \vdots & a_2^{-1} & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & a_{n-1}^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

(3) 利用初等变换：

$$(A \mid E) \xrightarrow{\text{行初等变换}} (E \mid A^{-1})$$

(4) 利用伴随矩阵 A^*（见第三章）.

二、求方阵 A 的高次幂

(1) 利用递推法.

【例 5】 已知 $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}(b_1, b_2, b_3)$，证明 $A^2 = lA$，并求 A^n（n 为正整数）.

【解】 $A^2=\left[\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}(b_1,b_2,b_3)\right]\left[\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}(b_1,b_2,b_3)\right]$ （根据矩阵乘法的结合律）

$$=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\left[(b_1,b_2,b_3)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\right](b_1,b_2,b_3)$$

记 $l=(b_1,b_2,b_3)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$，得

$$A^2=l\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}(b_1,b_2,b_3)=lA$$

根据上述结论，$A^3=A^2A=lAA=lA^2$，很容易用归纳法得出 $A^n=l^{n-1}A$.

【例6】 (99.3) 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，而 $n\geqslant 2$ 为正整数，则 $A^n-2A^{n-1}=$ ________.

【分析】 $A^n-2A^{n-1}=(A-2E)A^{n-1}$

$$A-2E=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\1&0&-1\end{pmatrix},\quad (A-2E)A=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}=O$$

故 $A^n-2A^{n-1}=O$.

(2) 将 A 分解成 $A=\lambda E+B$，其中 B 的高次幂容易计算.

【例7】 设 $A=\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}$，求 A^n.

【解】 $A=\lambda E+B$，其中

$$B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

利用二项展开式，有

$$A^n=(\lambda E+B)^n=\sum_{i=0}^{n}C_n^i(\lambda E)^iB^{n-i}$$

而

$$B^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad B^3=B^4=\cdots=O,\quad (\lambda E)^n=\lambda^n E$$

所以

$$A^n=C_n^{n-2}\lambda^{n-2}B^2+C_n^{n-1}\lambda^{n-1}B+\lambda^n E=\begin{pmatrix}\lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2}\\0&\lambda^n&n\lambda^{n-1}\\0&0&\lambda^n\end{pmatrix}$$

(3) 利用分块矩阵：若 $A=\begin{pmatrix}B&O\\O&C\end{pmatrix}$，则 $A^n=\begin{pmatrix}B^n&O\\O&C^n\end{pmatrix}$.

【例 8】 设 $A=\begin{pmatrix}3&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，求 A^n（n 为大于 2 的正整数）.

【解】 将 A 分块为 $A=\begin{pmatrix}B&O\\O&C\end{pmatrix}$，其中 $B=\begin{pmatrix}3&0\\0&4\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$. 因

$$B^n=\begin{pmatrix}3^n&0\\0&4^n\end{pmatrix},\quad C^2=C^3=\cdots=O$$

所以

$$A^n=\begin{pmatrix}B^n&O\\O&C^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3^n&0&0&0\\0&4^n&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

(4) 利用矩阵乘法的结合律.

① 如果 $A=P\Lambda P^{-1}$，其中 Λ^n 很容易计算，比如 $\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$，则有

$$A^n=(P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})\cdots(P\Lambda P^{-1})=P\Lambda(P^{-1}P)\Lambda(P^{-1}\cdots P)\Lambda P^{-1}=P\Lambda^n P^{-1}$$

【例 9】 已知 $AP=PB$，其中 $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}$，求 A，

A^5，A^n.

【解】 可求得

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&1&1\end{pmatrix}$$

$$A=PBP^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&0\\6&-1&-1\end{pmatrix}$$

又 $A^5=PB^5P^{-1}$，又 $B^5=B$，所以 $A^5=PBP^{-1}=A$，同理 $A^n=A$.

【注】 给定一个矩阵 A，如何找到对角阵 Λ 以及可逆阵 P，使 $A=P\Lambda P^{-1}$，在第五章讨论.

② 如果 $A=\alpha\beta^{\mathrm T}$，其中 α,β 都是列向量(只有一列的矩阵)，则 $\beta^{\mathrm T}\alpha=l$ 是一个数，且

$A^n=\alpha\beta^{\mathrm T}\cdot\alpha\beta^{\mathrm T}\cdots\alpha\beta^{\mathrm T}=\alpha(\beta^{\mathrm T}\alpha)\cdots(\beta^{\mathrm T}\alpha)\beta^{\mathrm T}=l^n(\alpha\beta^{\mathrm T})=l^nA$ (【例5】的一般情形)

【例 10】 (94.1)已知 $\alpha=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}1\\1/2\\1/3\end{pmatrix}$，设 $A=\alpha\beta^{\mathrm T}$，则 $A^n=$ ________.

【分析】 $\beta^{\mathrm T}\alpha=\left(1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}\right)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=3$

$$A=\alpha\beta^{\mathrm T}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\2&1&\frac{2}{3}\\3&\frac{3}{2}&1\end{pmatrix}$$

于是

$$A^n=\alpha(\beta^{\mathrm T}\alpha)\cdots(\beta^{\mathrm T}\alpha)\beta^{\mathrm T}=3^{n-1}\alpha\beta^{\mathrm T}=3^{n-1}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\2&1&\frac{2}{3}\\3&\frac{3}{2}&1\end{pmatrix}$$

三、初等矩阵的乘法

初等矩阵的乘法基本上都是转换为初等变换，初等矩阵左乘 $\boldsymbol{A}$，相当于对 $\boldsymbol{A}$ 做初等行变换，右乘 $\boldsymbol{A}$，相当于对 $\boldsymbol{A}$ 做初等列变换.

【例 11】 计算 $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{2007}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}^{2008}$.

【解】 $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$为交换第一、二两行的初等矩阵；$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$为交换第一、三两列的初等矩阵. 原式相当于对中间矩阵一、二两行交换 2007 次，然后对一、三两列交换 2008 次，所以，原式 $=\begin{pmatrix}4&5&6\\1&2&3\\7&8&9\end{pmatrix}$.

【例 12】 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{13}&a_{12}\\2a_{21}&2a_{23}&2a_{22}\\a_{31}&a_{33}&a_{32}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{B}=$(　　).

(A) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}$　　(B) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$

(C) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2$　　(D) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1$

【分析】 由 $\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}$，是对 $\boldsymbol{A}$ 做了“第二行乘以 2，交换第二、第三列”的初等变换，故选 D.

【例 13】 (04.1) 设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶方阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第一列与第二列交换得 $\boldsymbol{B}$，再把 $\boldsymbol{B}$ 的第二列加到第三列得 $\boldsymbol{C}$，则满足 $\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{C}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 为(　　).

(A) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$　(C) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

【分析】 对 $\boldsymbol{A}$ 作两次初等列变换，相当于右乘两个相应的初等矩阵，而 $\boldsymbol{Q}$ 即为此两个初等矩阵的乘积.

【解】 由题设，有

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{B},\quad \boldsymbol{B}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{C}$$

于是

$$A\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=C$$

可见，应选 D.

【例 14】 (06.1) 设 A 为三阶矩阵，将 A 的第二行加到第一行得 B，再将 B 的第一列的 (-1) 倍加到第二列得 C，记 $P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则(　　).

(A) $C=P^{-1}AP$　　(B) $C=PAP^{-1}$

(C) $C=P^{\mathrm{T}}AP$　　(D) $C=PAP^{\mathrm{T}}$

【解】 由题设可得

$$B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}A,\quad C=B\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

而 $P^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则有 $C=PAP^{-1}$，故应选 B.

【注】 每一个初等变换都对应一个初等矩阵，并且对矩阵 A 施行一个初等行(列)变换，相当于左(右)乘相应的初等矩阵.

四、求解矩阵方程

(1) $AX=B$，若 A^{-1} 存在，则 $X=A^{-1}B$；$AXC=B$，若 A，C 可逆，则 $X=A^{-1}BC^{-1}$.

【例 15】 设三阶方阵 A，B 满足关系式 $A^{-1}BA=6A+BA$，且 $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\0&\frac{1}{4}&0\\0&0&\frac{1}{7}\end{pmatrix}$，则 $B=$ ________.

【分析】 把含未知矩阵 B 的项都移到左边，得 $(A^{-1}B-B)A=6A$，再整理得 $(A^{-1}-E)BA=6A$，A^{-1} 显然存在，两边右乘 A^{-1}，得 $(A^{-1}-E)B=6E$，所以

$$B=6(A^{-1}-E)^{-1}=6\left[\begin{pmatrix}3&0&0\\0&4&0\\0&0&7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]^{-1}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$