XUEHAIDAOHANG

配套人民教育出版社实验教科书（A版）

学海导航

高中新课标同步攻略

GAO ZHONG XIN KE BIAO TONG BU GONG LUE

丛书主编 ◎ 李瑞坤

数学

（选修2-3）

首都师范大学出版社
CAPITAL NORMAL UNIVERSITY PRESS

丛书主编◎李瑞坤

学海导航

高中新课标同步攻略

GAO ZHONG XIN KE BIAO TONG BU GONG LUE

本册主编　吴树桂

编　　委　吴树桂　王兴俭

策　　划　刘　志

数学

（选修 2-3）

首都师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中新课标同步攻略. 数学. 2-3：选修 / 吴树桂主编.
北京：首都师范大学出版社，2008.12
(学海导航 / 李瑞坤主编)
ISBN 978-7-81119-471-5

Ⅰ. 高… Ⅱ. 吴… Ⅲ. 数学课－高中－教学参考资料
Ⅳ. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 199218 号

学海导航·高中新课标同步攻略
数学(选修 2-3)·学生用书
丛书主编 李瑞坤
本册主编 吴树桂

责任编辑 张雁冰　　装帧设计 张鹊红
责任校对 刘 志

首都师范大学出版社出版发行
地 址 北京西三环北路 105 号
邮 编 100048
网 址 cnuph.com.cn
E-mail master@cnuph.com.cn
湘潭市风帆印务有限公司印刷
全国新华书店发行

版 次 2008 年 12 月第 1 版
印 次 2008 年 12 月第 1 次印刷
开 本 880 × 1230 毫米 1/16
印 张 7.5
字 数 252 千
定 价 17.50 元

新时代,新理念,新要求,这是当今形势的新追求。

不同的教学思维,会有不同的教学效果;不同的编写思维,就有不同的教辅用书。正确的教学思维能使你越学越有味,科学的编写思维会使你的学习事半功倍。

本书是根据教育部最新颁布的高中数学课程标准和最新的高考考试大纲编写的。从内容上体现知识的掌握、能力的培养和素质的提高;从体例上注重特色鲜明、科学合理,有利于学生思维能力的培养,有利于学生的思维敏捷性、科学性和发散性的形成。本模块主要内容有“计数原理”“随机变量及其分布”“统计案例”,按章节分课时同步编写。

新授课由**【学习目标】**、**【情境引入】**、**【目标训练】**、**【典例分析】**、**【方法点拨】**、**【达标练习】**、**【探究活动】**等栏目构成。

【学习目标】 根据新课程标准,列出学习研究的主要内容,提出数学知识、数学方法及数学思想的教学目标和能力发展要求。

【情境引入】 用现实生活中的实例或学习中可能遇到的问题设置情境,让枯燥的数学知识以大家喜闻乐见的形式呈现,把学生带入全新的数学学习境地,从而增强对数学学习的兴趣,感受在数学天地里遨游的乐趣。

【目标训练】 精心设计了三个层次的练习:一层练习(掌握基本概念);二层练习(解决常规问题);三层练习(灵活运用,举一反三)。三个层次的练习,由浅入深,层层递进,既有利于基础知识的学习,又有利于能力的培养;既符合学生的认知规律,又适应不同层次学生的要求。

【典例分析】 旨在通过对典型例题的解答,给学生解题和书写提供一个范例。

【方法点拨】 对本课时主要知识及解题方法、技巧、规律进行归纳和点拨,目的在于提炼数学思想和方法,优化思维方式。

【达标练习】 选题典型、题量适中、难易适度。既可以作为巩固练习,也可以作为达标检测。

【探究活动】 通过一课时一个开放性问题的设计,体现“探究学习”的课改理念,让学生在探究中深化所学知识,培养运用所学知识解决实际问题的能力。

在本书的编写过程中,我们力图把本书编写成一本既符合课改理念又适应教学实际的教学用书,但二者统一并非易事。尽管参编老师反复推敲,层层把关,几易其稿,但限于能力和水平,书中难免有疏漏之处,敬请广大读者批评指正。

编 者

目录 CONTENTS

第一章　计数原理

第 1 课时　分类加法计数原理与分步乘法计数原理(一)

学习目标

1. 归纳得出分类加法计数原理与分步乘法计数原理;
2. 初步学会区分“分类”和“分步”;
3. 能够用两个计数原理解决简单的计数问题.

重点:归纳得出分类加法计数原理和分步乘法计数原理.

难点:正确理解“完成一件事”的含义;根据实际问题的特征,正确地区分“分类”或“分步”.

情境引入

1. 从 A 地到 B 地,可以乘火车或乘汽车. 一天中,火车 2 班,汽车 4 班. 乘这些交通工具从 A 地到 B 地,有多少种不同方法?

2. 从 A 地到 C 地有 2 条路可走,从 C 地到 B 地有 4 条路可走,若从 A 地经 C 地到 B 地,有多少种不同的走法?

目标训练

【一层练习】

1. 完成一件事有两类不同方案,在第 1 类方案中有 m 种不同的方法,在第 2 类方案中有 n 种不同的方法. 那么完成这件事共有________种不同的方法.
2. 完成一件事需要两个步骤,完成第 1 步有 m 种不同的方法,完成第 2 步有 n 种不同的方法,那么完成这件事共有________种不同的方法.

【二层练习】

3. 某道数学题有 2 种解法,该班有 25 人会用第 1 种方法解答,另有 15 人会用第二种方法解答,从中选出 1 人来完成这道题的解答,则不同选法的种数是________.
4. 有一商场,一楼有 3 个门可进,并有 2 个楼梯上二楼. 现有一人从商场外面到二楼买东西,那么这人有________种不同的走法.
5. 书桌的左边抽屉里放有 2 支不同的钢笔,右边抽屉里放有 3 支不同的铅笔,现要从中任拿 1 支笔,则不同的取法种数为________种.

【三层练习】

6. 某商场共有 4 个门,购物者若从一个门进,从另一个门出,则不同的走法种数是________.

典例分析

【例 1】一简易书架的上层放有 10 本不同的文艺书,下层放有 5 本不同的数学书. 现从书架上任取一本书,有多少种不同的取法?

解:从书架上任取一本书,有 2 类方法:

第 1 类方法:从书架上层任取一本文艺书,有 10 种不同的方法;

第 2 类方法:从书架下层任取一本数学书,有 5 种不同的方法.

由分类加法计数原理知,不同的取法种数共有

$N=10+5=15$(种)

点评:先分清这件事怎么完成,如果是有两种不同的方案,则用分类加法计数原理.

【例 2】一小学生做加法游戏. 在一个红口袋中装着 20 张分别标有 1,2,…,20 的红卡片,从中任意抽取一张,把卡上的数作为被加数;在另一个黄口袋中装有 10 张分别标有 1,2,…,10 的黄卡片,从中任意抽取一张,把卡上的数作为加数. 问这名小学生一共可以列出多少个不同的加法式子?

解:完成这件事需分步进行:

第一步:从 20 张红卡片中抽出一张,该数字作为被加数有 20 种取法;

第二步:从 10 张黄卡片中抽出一张,该数字作为加数有 10 种取法.

由分步乘法计数原理知,适合题意的不同的加法式子共有 $20\times10=200$(个).

点评:先分清这件事怎么完成,如果需要分步完成,则用分步乘法计数原理来计算.

方法点拨

1. 分类加法计数原理中的“完成一件事有两类不同方案”,是指完成这件事的所有方法可以分为两类,即任何一类中的任何一种方法都可以完成任务,两类中没有相同的方法,且完成这件事的任何一种方法都在某一类中.

2. 分步乘法计数原理中的“完成一件事需要两个步骤”,是指完成这件事的任何一种方法,都要分成两个步骤. 在每一

个步骤中任取一种方法，然后相继完成这两个步骤就能完成这件事，即各个步骤是相互依存的，每个步骤都要做完才能完成这件事情.

达标练习

1. 从 10 道选择题和 4 道填空题中任选一题进行解答，则不同的选择方法有（　　）

A. 40 种　　B. 14 种

C. 10 种　　D. 4 种

2. 某班有男生 26 人，女生 22 人，从中选一位同学为数学科代表，则不同选法的种数为（　　）

A. 22　　B. 26

C. 48　　D. 572

3. 若 $x\in\{1,2,3\}$，$y\in\{7,8,9\}$，$x\cdot y$ 的不同的值有______个.

4. 4 人中一人是冠军，另一人是亚军，则不同的可能结果有________种.

5. 多次抛掷两颗骰子 A 和 B，骰子 A 的数为被除数，骰子 B 的数为除数，则最多可得到多少个不同的除法式子？

6. 集合 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{4,5,6,7\}$. 现从 A 中取一个元素作为点 P 的横坐标，从 B 中取一个元素作为点 P 的纵坐标. 则可以得到多少个不同的点？

探究活动

集合 $A=\{1,2\}$，$B=\{a,b,c,d\}$，则从 A 到 B 可建立多少个不同的映射？

第 2 课时　分类加法计数原理与分步乘法计数原理（二）

学习目标

1. 复习巩固分类加法计数原理与分步乘法计数原理；

2. 通过经历探究的过程，能够将两个计数原理推广到更加一般的情形；

3. 进一步学会区分“分类”和“分步”；

4. 能够用两个计数原理解决简单的“n 类方案”和“n 个步骤”的计数问题；

重点：能够用两个计数原理解决一般情形下的简单的计数问题；

难点：进一步理解“完成一件事”的含义；根据实际问题的特征，正确地区分“分类”或“分步”.

情境引入

1. 从 A 地到 B 地，可以乘火车、汽车或飞机. 一天中，火车 4 班，汽车 2 班，飞机 3 班. 乘这些交通工具从 A 地到 B 地，共有多少种不同方法？

2. 从 A 地到 C 地有 4 条路可走，从 C 地到 D 地有 2 条路可走，从 D 地到 B 地有 3 条路可走. 若从 A 地经 C 地和 D 地到 B 地，共有多少种不同的走法？

目标训练

【一层练习】

1. 完成一件事有 n 类不同方案，在第 1 类方案中有 m_1 种不同的方法，在第 2 类方案中有 m_2 种不同的方法，…，在第 n 类方案中有 m_n 种不同的方法. 那么完成这件事共有________________种不同的方法.

2. 完成一件事需要 n 个步骤，做第 1 步有 m_1 种不同的方法，做第 2 步有 m_2 种不同的方法，…，做第 n 步有 m_n 种不同的方法. 那么完成这件事共有________________种不同的方法.

【二层练习】

3. 某道数学题有 3 种解法，兴趣小组 A 有 10 人会用第 1 种方法解答，兴趣小组 B 有 12 人会用第二种方法解答，兴趣小组 C 有 8 人会用第 3 种方法解答. 从中选出 1 人来完成这道题的解答，则不同选法的种数是________.

4. 有一四层教学楼，从一楼到二楼有两个楼梯，从二楼到三楼有两个楼梯，从三楼到四楼也有两个楼梯. 则从一楼到四楼共有不同的走法种数是________.

5. 某一 3 层书架，最上一层放了 15 本文学类的书，中间一层放了 12 本理工类的书，最下一层放了 10 本外语类的书. 现要从中取一本书出来，则不同的取法种数为______种.

【三层练习】

6. 若 $A\in\{1,2,3\}$，$B\in\{4,5,6\}$，$C\in\{7,8,9,10\}$，则方程 $Ax+By+C=0$ 表示的直线共有多少条？

典例分析

【例 1】 某校文娱兴趣小组有高一学生 10 人，高二学生 15 人，高三学生 8 人.

(1)选其中一人为总负责人，有多少种不同的选法？

(2)每一年级各选一人为小组长，有多少种不同的选法？

解： (1)若从高一学生中选，则有 10 种不同的选法；若从高二学生中选，则有 15 种不同的选法；若从高三学生中选，则有 8 种不同的选法；所以由分类加法计数原理知，共有 $10+15+8=33$ 种不同的选法.

(2)从高一学生中选一人，有 10 种不同的选法；从高二学生中选一人，有 15 种不同的选法；从高三学生中选一人，有 8 种不同的选法；所以由分步乘法计数原理知，共有 $10\times15\times8=1200$ 种不同的选法.

点评： 做一件事关键要明确是分类完成还是分步完成. “分类则加”、“分步则乘”是两个原理的本质.

【例 2】 有四位同学参加三项不同的竞赛.

(1)每位学生必须且只能参加一项竞赛，有多少种不同的参赛方式？

(2)每项竞赛只允许一位学生参加，有多少种不同的参赛方式？

解： (1)学生可以选择竞赛项目，而竞赛项目对于学生无条件限制，所以每位学生均有 3 种不同的选择方法. 要完成这件事，必须是每位学生参加的竞赛项目都全部确定下来才行，因此需分四步. 则由分步乘法计数原理得知共有 $3\times3\times3\times3=81$ 种不同的参赛方式.

(2)竞赛项目可选择学生，每一个项目可挑选 4 个不同学生中的一个. 要完成这件事，必须是每项竞赛所参加的学生全部确定下来才行，因此需分三步，用分步乘法计数原理得共有 $4\times4\times4=64$ 种不同的参赛方式.

点评： 解答此题时，应先弄清“完成一件事”中的“一件事”是哪件事，再弄清是先考虑学生问题还是竞赛问题才能很好地完成解题. 另外，弄清每位学生选定竞赛还是每项竞赛选定学生是解题的关键.

方法点拨

1. 如果完成一件事有 n 类不同的方案，而且这 n 类方案是相互独立的，无论用哪一类方案中的哪一种方法都能独立地完成这件事，那么求完成这件事的方法种数就用分类加法计数原理.

2. 如果完成一件事情需要 n 个步骤，做每一步中都有若干种不同方法，在每一个步骤中任取一种方法，然后相继完成这 n 个步骤就能完成这件事，那么求完成这件事的方法种数就用分步乘法计数原理.

达标练习

1. 已知 $\{1,2\}\subseteq A\subseteq\{1,2,3,4,5\}$，则满足这个关系式的 A 的个数是　（　　）

A. 2　　B. 4

C. 6　　D. 8

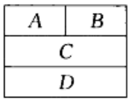
2. 某公共汽车上有 10 名乘客，沿途有 5 个车站，乘客下车的可能方式有　（　　）

A. 5^{10} 种　　B. 10^5 种

C. 15 种　　D. 50 种

3. 某人去书店，发现有 3 本好书，决定至少买其中一本，则该人的购书方案有______种.

4. 用 4 种不同的颜色涂入如图所示的矩形 A、B、C、D 中，要求相邻的矩形涂色不同，则不同的涂色方法种数是______.



5. 从 6 人中选 4 人分别到巴黎、伦敦、悉尼、莫斯科四个城市游览，要求每个城市有一人游览，每人只游览一个城市，且这 6 人中甲、乙 2 人不去巴黎游览，则不同的选择方案共有多少种？

6. 从集合 $\{0,1,2,3,5,7,11\}$ 中任取 3 个不同元素分别作为直线方程 $Ax+By+C=0$ 中的系数 A、B、C，可得到经过原点的直线有多少条？

探究活动

由 1，2，3 这三个数字，可组成多少个两位数？三位数？

第3课时　分类加法计数原理与分步乘法计数原理(三)

学习目标

1. 复习巩固分类加法计数原理与分步乘法计数原理；
2. 进一步学会区分"分类"和"分步"；
3. 学会"分类"和"分步"的方法；
4. 能够运用两个计数原理解决一些常见的实际问题；

重点:学会用两个计数原理解决实际问题；

难点:根据实际问题的特征，正确地进行"分类"或"分步".

情境引入

有一人办理一银行业务，需要设置一个6位数字的银行密码，问该人有多少种不同的设置方法？

目标训练

【一层练习】

1. 5人站成一排，要求最高的站在中间，则不同的站法种数是______.
2. 从3名男生和2名女生中选2名作代表，要求不能都是女生，则不同的选法种数是______.

【二层练习】

3. 若 $x\in\{1,2,-3\}$，$y\in\{-1,-2,3,4,5\}$，则可构成第二象限的点 $P(x,y)$ 的个数是______.
4. 乘积 $(a_1+a_2)(b_1+b_2+b_3)(c_1+c_2+c_3+c_4)$ 展开后的项数是______.
5. 某地的电话号码由7位数字组成，其中前两位的数字是不变的，后五位数字都是0到9之间的一个数字，则该地不同的电话号码最多有__________个.

【三层练习】

6. 从 $0,1,\sqrt{2},\frac{\pi}{2},\sqrt{3},2$ 这6个数字中，任取两个不同的数字作为直线 $y=x\cdot\tan\alpha+b$ 的倾斜角和截距，共组成多少条不同的直线？

典例分析

【例1】(1)5名运动员争夺3项比赛的冠军，则获得冠军的所有可能情况共有多少种？

(2)语文、数学、英语三科老师都布置了作业，若同一时刻5名学生都做作业，求他们在该时刻做各科作业的所有可能情况的种数.

解:(1)要决定三项比赛的冠军，需要分三步完成，每一项冠军都可以由5个人中的一人得到，所以每一步均有5种方法.

故共有 $5\times5\times5=125$(种).

(2)要完成这件事情(5名学生同时做作业)，需要分5步完成，每一步即每个学生做作业均有3种情况.

所以他们在该时刻做各科作业的所有可能情况的种数是 $3\times3\times3\times3\times3=243$(种).

点评:在分步时，必须有明确的标准，这样才能使结果不重不漏.

(1)题以3项冠军为标准，分3步.如果以人为标准分5步，每步有3种情况，这样就会漏掉不得冠军的情况，而且还有可能重复.(2)题应以学生为标准，分5步.同样若 $5\times5\times5=125$ 种显然也不对.

【例2】某电视节目中有 A、B 两个信箱，其中存放着先后两次竞猜中入围的观众来信，A 信箱中有30封，B 信箱中有20封，现由主持人抽奖确定幸运观众，若先确定一名幸运之星，再从两信箱中各确定一名幸运伙伴，有多少种不同的结果？

解:由于幸运之星可能出现在 A 信箱，也可能出现在 B 信箱，故可分两种情况考虑：

第一种：幸运之星在 A 信箱中确定，先定幸运之星，再在两箱中各确定一名幸运伙伴，有 $30\times29\times20=17400$ 种不同的结果；

第二种：幸运之星在 B 信箱中确定，先定幸运之星，再在两箱中各确定一名幸运伙伴，有 $20\times19\times30=11400$ 种不同的结果.

则由分类加法计数原理知，共有不同结果

$17400+11400=28800$(种).

点评:一些较复杂的问题，有时分类以后，每类方法并不都是一步能完成的，可能在分类后又分步，有些问题则需在分步后又要分类，所以我们要综合利用两个原理灵活解决问题.

方法点拨

1. 分类时，首先要根据问题的特点确定一个分类标准，然后在这个标准下进行分类.一般的，标准不同，分类的结果也不同；其次，分类时要注意满足一个基本要求：完成这件事的任何一种方法必须属于且只能属于某一类方案.简单地说，就

是应用分类加法计数原理时要做到“不重不漏”.

2. 分步时，要根据问题的特点确定分步标准，标准不同，分成的步骤数也会不同. 一个合理的分步应当满足：第一，完成这件事情必需且只需连续做完所分步骤，即分别从各个步骤中选一种完成该步骤的方法，将各步骤方法依次串联在一起就得到完成这件事情的一种方法；第二，完成任何一个步骤可选用的方法数与其他所选用的方法无关. 简而言之，就是应用分步乘法计数原理时要做到“步骤完整”.

3. 分类加法计数原理与分步乘法计数原理的区别在于“分类”与“分步”. “分类”中的每一类均可完成“这件事情”，即可“独立完成”；而“分步”中只有每一步都完成了“这件事情”才算完成. 即“缺一不可”.

达标练习

1. 从集合$\{1,2,3\}$和$\{1,4,5,6\}$中各取1个元素作为点的坐标，则在直角坐标系中能确定不同点的个数是（　　）
   A. 24　　B. 23
   C. 12　　D. 11
2. 3名学生报名参加艺术体操、美术、计算机、游泳四个课外兴趣小组，每人选报一种，则不同的报名种数有（　　）
   A. 3　　B. 12
   C. 64　　D. 81
3. 已知函数$y=ax^2+bx+c$，其中$a,b,c\in\{0,1,2,3,4\}$，则不同的二次函数的个数共有（　　）
   A. 125　　B. 100
   C. 15　　D. 10
4. 如果一条直线与一个平面垂直，那么，称此直线与平面构成一个“正交线面对”. 在一个正方体中，由两个顶点确定的直线与含有四个顶点的平面构成的“正交线面对”的个数是______.
5. 某文艺团体有10人，每人至少会唱歌或跳舞中的一种，其中7人会唱歌，5人会跳舞，从中选出会唱歌与跳舞的各1人，有多少种不同的选法？
6. 从2，3，5，7，11中每次选出两个不同的数作为分数的分子、分母，则可产生
   (1)多少个不同的分数？
   (2)多少个不同的真分数？

探究活动

设M是集合$S=\{1,2,3,\cdots1999\}$的子集，且M中所有正整数(元素)中仅含一个0，则集合M中所含元素最多有多少个？

第4课时　分类加法计数原理与分步乘法计数原理(四)

学习目标

1. 熟练掌握分类加法计数原理与分步乘法计数原理；

2. 能够运用两个计数原理解决一些较为复杂的实际问题；

重点：处理好“分类”和“分步”的综合运用；

难点：根据实际问题的特征，正确地区分“分类”或“分步”.

情境引入

某班共有师生52人，为了照一张集体相片，需要站成4排，每排13人，问共有多少种不同的站法？

目标训练

【一层练习】

1. 集合$\{0,1,2,3\}$的真子集的个数是______.
2. 某市的小汽车车牌号码中，前两位是由固定的英文字母组成，后五位数字都是0到9之间的一个数字，那么该市不同的小汽车车牌号码最多有__________个.

【二层练习】

3. 在平面直角坐标系中，x轴上的截距在集合$A=\{1,3,5,7,9\}$内取值，y轴上的截距在集合$B=\{2,4,6,8\}$内取值的不同的直线共有______条.
4. 从7名同学中选出一名正班长和两名副班长，不同的选法共有______种.
5. 直角坐标xOy平面上的平行直线$x=n(n=0,1,2,3,4,5)$与平行直线$y=m(m=0,1,2,3,4,5)$组成的图形中，矩形的个数是________.

【三层练习】

6. 从1,2,3,4四个数中任意取数(数字不重复)作和,则共可得到多少个不同的和?

典例分析

【例1】从1到200的所有正整数中,求各个数位上都不含数字3的正整数的个数.

解: 需要完成的"一件事情"是"组成不含数字3的正整数",有三类情形:

第一类,该正整数是一位数,有8个;

第二类,该正整数是两位数,需要分两步完成,第一步:个位数上除3之外有9种取法;第二步:十位数上除0和3之外有8种取法,根据分步乘法计数原理,得该类数有$9\times8=72$(个);

第三类,该正整数是三位数,有两小类:(1)百位数为1,十位数和个位数上的数字除3之外都有9种取法,故三位数中,百位数为1的符合要求的数有$9\times9=81$(个);(2)百位数为2的数只有200这一个符合要求.得第三类数有$81+1=82$(个);

由分类加法计数原理知,符合要求的数共有

$8+72+82=162$(个).

点评: 本题考虑问题的原则是先分类后分步,要注意在分类或分步时,必须做到不重不漏.

【例2】用0,1,2,…,9这十个数字,可以组成多少个:

(1)三位整数?

(2)无重复数字的三位整数?

(3)小于500的无重复数字的三位整数?

(4)小于100的无重复数字的自然数?

解: (1)百位上的数字有除0之外的9种选择,十位和个位上的数字都各有10种选择,由分步乘法计数原理知,适合题意的三位数共有$9\times10\times10=900$(个).

(2)由于数字不可重复,可知百位上的数字有9种选择,十位上的数字也有9种选择,但个位数字仅有8种选择,由分步乘法计数原理知,适合题意的三位整数共有$9\times9\times8=648$(个).

(3)百位上的数字只有4种选择,十位上的数字有9种选择,个位上的数字有8种选择,由分步乘法计数原理知,适合题意的三位整数共有$4\times9\times8=288$(个).

(4)适合题意的三位整数可分为一位数和两位数两类:第一类,一位数,有10个;第二类,两位数,十位上的数字有9种选择,个位上的数字也有9种选择,由分步乘法计数原理知,适合题意的两位数共有$9\times9=81$(个).

由分类加法计数原理知,适合题意的自然数共有$10+81=91$(个).

点评: (1)本题中,由于最高位上的数字不能是0,因此应对它进行单独考虑;

(2)注意题目中"无重复数字"和"数字可以重复"的区别,这是解决数字问题的关键.

方法点拨

1. 用两个计数原理解决问题时,首先要弄清楚"做一件事"的含义,然后再分析需要分类还是分步.

2. 分类加法计数原理的实质是"整体"等于"部分"之和,就是"整体"(即完成一件事的方法)分成若干个互不相交的类,使得每一类中的元素的个数易于计算.

3. 应用分步乘法计数原理的要点是,将完成一件事的过程分解为若干个步骤,而每个步骤的方法数应易于计算.

4. 一些简单的计数问题可以用列举法来求解.

5. 在分析计数问题的过程中,如果能借助一些图形、示意图、表格等帮助分析,可以使问题更加直观、清楚.

达标练习

1. 某彩票规定:从01至36共36个号码中抽出7个号码为一注,每注2元.某人想从01至10中选3个连续的号码,从11至20中选2个连续的号码,从21至30中选1个号码,从31至36中选1个号码组成一注,则这人把这种特殊要求的号码买全,至少要花（　）

A. 3360元　　B. 4320元

C. 6720元　　D. 8640元

2. 某小组有10名学生,其中女学生有3名,从中选举3名代表,要求至少有一名女学生,则不同选法的种数是（　）

A. 85　　B. 100

C. 108　　D. 120

3. 由数字1,2,3,4可以组成小于1000的正整数的个数是________.

4. 某年级开设了三类选修课,其中科技类开设了4门课,学科类开设了5门课,体育类开设了3门课.若每位同学必须报一门选修课,共有M种不同的报名方法;若每位同学必须先后选报两门选修课,共有N种不同的报名方法.则$M+N=$________.

5. 在所有的两位数中,个位数字大于十位数字的两位数共有多少个?

6. 有 6 人报名参加三个比赛项目.
(1)每人参加一项,有多少种不同的方法?
(2)每项 1 人且每人至多参加一项,有多少种不同的方法?
(3)每项 1 人,且每人参加的项数不限,有多少种不同的方法?

探究活动

630 的正约数(包括 1 和 630 在内)的个数是多少?

第 5 课时　排列的概念

学习目标

1. 通过实例理解排列的概念;

2. 能用列举法、树形图列出排列,并从列举过程中体会排列数与计数原理的关系,体会将实际问题划归为计数问题的方法;

重点:理解排列的概念,能用列举法、树形图列出排列,从简单排列问题的计数过程中体会排列数公式;

难点:对排列要完成的"一件事"的理解;对"一定顺序"的理解.

情境引入

请观察下列问题的解答过程:

问题:由 1,2,3,4 这四个数字可以组成多少个没有重复数字的四位数?

解答:四位数中的千位数可以从 1,2,3,4 中任取一个,有 4 种取法;

四位数中的百位数可以从剩下的三个数字中任取一个,有 3 种取法;

四位数中的十位数可以从剩下的二个数字中任取一个,有 2 种取法;

四位数中的个位数只能取剩下的一个数字,有 1 种取法;

由分步乘法计数原理知,符合题意的四位数共有 $4\times3\times2\times1=24$(个).

请问上述过程能否简化?

目标训练

【一层练习】

1. 从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素,按照一定的顺序排成一列,叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的________.

2. 从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素的所有不同排列的个数,叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的______.

【二层练习】

3. 写出由 1、2、3、4 这四个数字组成的没有重复数字的所有四位数.

4. 写出从 3 个不同元素中任取 2 个元素的所有排列.

5. 从 6 个不同元素中取出 3 个元素的排列数是________.

【三层练习】

6. 下列问题是排列问题吗？

(1)从 2,4,6,8 这四个数中任取两个不同的数相除，共有多少种不同的结果？

(2)从 2,4,6,8 这四个数中任取两个不同的数相加，共有多少种不同的结果？

典例分析

【例 1】判断下列问题是否是排列问题：

(1)某班有 50 名同学，如果每两人通信一次，共需写信多少封？

(2)某班有 50 名同学，如果相互握手一次，共需握手多少次？

(3)平面内有 8 个点，其中任意三点都不共线，由这些点可以得到多少条直线？

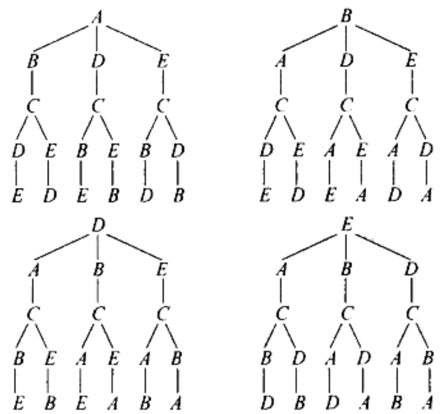
(4)平面内有 8 个点，其中任意三点都不共线，由这些点可以得到多少条射线？

解：两人通信与顺序有关，而握手则与顺序无关；过两点可以作一条直线，与顺序无关，而作射线则与顺序有关. 所以，根据排列的定义可知，只有(1)(4)才是排列问题.

点评：判断所给问题是不是排列问题，关键是看与顺序有无关系.

【例 2】A、B、C、D、E 五名同学排成一排照相，写出 C 同学排在正中间的所有可能的站法.

解：作树形图如下：



由树形图可得所有可能的站法是：

ABCDE，*ABCED*，*ADCBE*，*ADCEB*，*AECBD*，*AECDB*，*BACDE*，*BACED*，*BDCAE*，*BDCEA*，*BECAD*，*BECDA*，*DACBE*，*DACEB*，*DBCAE*，*DBCEA*，*DECAB*，*DECBA*，*EACBD*，*EACDB*，*EBCAD*，*EBCDA*，*EDCAB*，*EDCBA*.

点评：在解应用题时，应充分利用树形图进行分析，这样比较直观，便于理解.

方法点拨

1. 排列的定义中包含两层意思：一是"取出元素"；二是"按照一定顺序排列"，因此，排列要完成的"一件事情"是"取出部分元素，再按顺序排列"."一定顺序"就是与位置有关，不考虑顺序就不是排列.

2. 排列的定义中指的是"一个排列"，而不是所有的排列. 对于两个排列来讲，只有当元素完全相同且元素的排列的顺序也完全相同时，才是相同的一个排列，元素不完全相同或元素完全相同而顺序不同的排列，都不是同一个排列.

3. 排列问题是一类特殊的计数问题，所以排列问题也可以利用两个计数原理来解决.

达标练习

1. 由 0,1,2 三个数字组成的没有重复数字的三位数，如果按从小到大的顺序进行排列，则第三个数是（　　）

A. 102　　B. 120

C. 201　　D. 210

2. A、B、C、D 四人排成一排，其中 A 必须排在 B 左边的不同排法共有（　　）

A. 24 种　　B. 12 种

C. 4 种　　D. 2 种

3. 从 a,b,c,d,e,f 六个不同的元素中取出 5 个没有重复的元素出来，可得到排列______个.

4. 由 A、B、C、D、E 五个元素组成的所有排列中，元素 A 排在最右边的排列个数为______.

5. 计算 A、B、C 这 3 个元素可以组成的所有排列数，并写出所有的排列.

6. 下列问题哪些是排列问题？

(1)从 1,2,3,5 中任取两个不同的数相减，可以得到多少个不同的结果？

(2)从 1,2,3,5 中任取两个不同的数相乘，可以得到多少个不同的结果？

(3)从 1 到 10 十个正整数中任取两个数组成直角坐标平面内的点的坐标，可得多少个不同的点的坐标？

(4)从 10 名同学中任意抽取两名同学去开座谈会，有多少种不同的抽取方法？

(5)某商场有四个大门，若从一个大门进去，购买物品后再从另一个大门出来，不同的出入方式共有多少种？

探究活动

把小于 2009 的所有四位数按从小到大的顺序进行排列，则第 209 个数是什么？

第 6 课时　排列数公式

学习目标

1. 进一步理解排列的概念；

2. 了解排列数推导的过程，培养学生“化归”的数学思想方法；

3. 掌握排列数公式，能够熟练地利用排列数公式计算排列数；

重点：根据两个计数原理推导出排列数公式；

难点：排列数公式的推导.

情境引入

把 9 个不同的职位安排给 9 个同学，问有多少种不同的安排方法？

目标训练

【一层练习】

1. 正整数 n 的阶乘 $n!=$ ________.

2. 若 $n,m\in \mathbf{N}^*$，并且 $m\leqslant n$，则排列数 $A_n^m=$ ________ = ________；$0!=$ ________；全排列数 $A_n^n=$ ________ = ________.

【二层练习】

3. $5!-0!=$ ________.

4. $A_5^1+A_5^2+A_5^3+A_5^4+A_5^5=$ ________.

5. $A_{10}^{10}-11A_9^9+9A_8^8=$ ________.

【三层练习】

6. 有 7 个研究性学习课题，从中选出 4 个由某班的 4 个课外研究小组进行研究，每组研究一个课题，则共有多少种不同的安排方法？

典例分析

【例 1】计算下列各题:

(1)A_{20}^{2};

(2)$\dfrac{A_{n-1}^{m-1}\cdot A_{n-m}^{n-m}}{A_{n-1}^{n-1}}$;

(3)$1!+2\times2!+3\times3!+\cdots+7\times7!$;

(4)$\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\dfrac{3}{4!}+\cdots+\dfrac{n-1}{n!}$.

解:(1)$A_{20}^{2}=20\times19=380$.

(2)$\dfrac{A_{n-1}^{m-1}\cdot A_{n-m}^{n-m}}{A_{n-1}^{n-1}}$

$=\dfrac{(n-1)!}{[(n-1)-(m-1)]!}\cdot(n-m)!\cdot\dfrac{1}{(n-1)!}$

$=\dfrac{(n-1)!}{(n-m)!}\cdot\dfrac{(n-m)!}{(n-1)!}$

$=1$.

(3)因为 $n\cdot n!=(n+1)!-n!$.

所以 $1!+2\times2!+3\times3!+\cdots+7\times7!=(2!-1!)+(3!-2!)+(4!-3!)+\cdots+(8!-7!)=8!-1=40320-1=40319$.

(4)因为$\dfrac{n-1}{n!}=\dfrac{1}{(n-1)!}-\dfrac{1}{n!}$.

所以$\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\dfrac{3}{4!}+\cdots+\dfrac{n-1}{n!}$

$=(\dfrac{1}{1!}-\dfrac{1}{2!})+(\dfrac{1}{2!}-\dfrac{1}{3!})+(\dfrac{1}{3!}-\dfrac{1}{4!})+\cdots+[\dfrac{1}{(n-1)!}-\dfrac{1}{n!}]$

$=1-\dfrac{1}{n!}$.

点评:准确掌握好排列数公式是顺利进行计算的关键.本题计算中灵活地用到下列公式:$n!=n(n-1)!$;$n\cdot n!=(n+1)!-n!$;$\dfrac{n-1}{n!}=\dfrac{1}{(n-1)!}-\dfrac{1}{n!}$.这样便使问题得到简单、快捷地解决.

【例 2】解方程:$3A_n^3=2A_{n+1}^2+6A_n^2$.

解:由 $3A_n^3=2A_{n+1}^2+6A_n^2$ 得

$3n(n-1)(n-2)=2(n+1)\cdot n+6n(n-1)$.

因为 $n\geqslant3$,所以 $3(n-1)(n-2)=2(n+1)+6(n-1)$.

即为 $3n^2-17n+10=0$

解得 $n=5$,或 $n=\dfrac{2}{3}$(舍去)

故 $n=5$.

点评:解决本题的关键是利用排列数公式转化为关于 n 的代数方程来解.要注意 A_n^m 中 $n,m\in\mathbf{N}^*$,并且 $m\leqslant n$ 这些限制条件,以及转化为方程中未知数的取值范围.

方法点拨

1. 公式 $A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$的特点是:右边第一个因数是 n,后面每个因数都比它前面一个因数少 1,最后一个因数是 $n-m+1$,共 m 个连续的正整数相乘.当 n,m 较少时,只要根据这些特点就能很快写出算式.

2. 公式 $A_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$主要有两个作用.一是当 n,m 较大时,由于科学计算器上可直接按出相应的阶乘数,因此用上面的公式计算排列数较为方便;二是当对含有字母的排列数的式子进行变形和论证时,写成这种形式有利于发现相互之间的关系.

3. 较大数的阶乘数一定是较少数的阶乘数的倍数,例如 $n!=n(n-1)!=n(n-1)(n-2)!$ 等.

达标练习

1. 下列各式中与排列数 A_n^m 相等的是　　(　　)

A. $\dfrac{n!}{(m-n)!}$　　B. $n(n-1)(n-2)\cdots(n-m)$

C. $\dfrac{n}{n-m+1}A_n^{n-1}$　　D. $A_n^1\cdot A_{n-1}^{m-1}$

2. $4\times5\times6\times7\times\cdots\times(n-1)\times n$ 等于　　(　　)

A. A_n^{n-4}　　B. A_n^{n-3}

C. $n!-4!$　　D. $\dfrac{n!}{4!}$

3. 已知 $A_{n-1}^2=132$,则 $n=$________.

4. 计算:$\dfrac{2A_{12}^4+A_{12}^5}{A_{13}^5-A_{12}^5}=$________.

5. 如果 $A_n^m=2009\times2008\times\cdots\times10\times9$,求 n 和 m 的值.

6. 若 $S=A_1^1+A_2^2+A_3^3+A_4^4+\cdots+A_{100}^{100}$,则 S 的个位数字是多少?

探究活动

若$\dfrac{A_n^7-A_n^5}{A_n^5}=89$,则 n 是多少?

第 7 课时　排列的应用

学习目标

1. 加深理解排列与排列数的概念；

2. 能够熟练运用排列数公式计算排列数；

3. 能够应用排列知识和两个计数原理解决简单的实际问题，提高解决应用题的能力.

情境引入

15 人排成 3 排照相，前排 4 人，中间一排 5 人，后排 6 人，共有不同的排法多少种？

目标训练

【一层练习】

1. 4 男 3 女排成一排的不同排法种数是________.

2. 某足球比赛共有 12 个队伍参加，每队都要与其他各队在主客场分别比赛一次，则共比赛________场.

【二层练习】

3. 某天的课程中共有 7 节课，其中有 5 节要安排 5 个不同的科目，每个科目上一节课，则不同的安排方法种数是________.

4. 某节目单原有 10 个节目，现需增加 1 个节目，要求增加的节目既不能排在最前面，也不能排在最后面，则不同的方案共有________种.

5. 某班为了组队参加 4×100 米接力赛，准备从 6 人中选出 4 人，安排在不同的接棒位置，则不同的安排方法有________种.

【三层练习】

6. 从 3 名男生和 3 名女生中选出 3 名分别担任语文、数学、英语的科代表，要求至少有 1 名女生，则共有不同的选取方案多少种？

典例分析

【例 1】 由 0，1，2，3，4，5 六个数字可以组成多少个：

(1) 数字允许重复的四位数？

(2) 无重复数字的四位数？

(3) 无重复数字的四位偶数？

(4) 无重复数字的且为 5 的倍数的四位数？

(5) 比 1325 大的四位数？

解： (1) 方法一：(直接法) 最高位数字(千位数)不能取 0，可从其余 5 个数字中取 1 个，有 5 种方法；其他三个位上的数字均可从 6 个数字中任取 1 个，各有 6 种方法. 由分步乘法计数原理知，共有数字允许重复的四位数 $5\times6\times6\times6=1080$(个).

方法二：(间接法) 各位上的数字都从 6 个数中任取 1 个，都有 6 种取法，这时共有 $6\times6\times6\times6=6^4$ 种不同的取法；最高位数字取 0，其余各位数字从 6 个数字中任取 1 个，共有 $1\times6\times6\times6=6^3$ 种不同的取法. 因此数字允许重复的四位数共有 $6^4-6^3=1080$(个).

(2) 最高位数字(千位数)不能取 0，可从其余 5 个数字中取 1 个，有 5 种方法；其他三个位上的数字可从剩下的 5 个数字中任取 3 个来排，有 A_5^3 种. 故共有无重复数字的四位数 $5A_5^3=5\times5\times4\times3=300$(个).

(3) 符合要求的四位偶数可分为三类：

第一类：0 在个位时有 A_5^3 个；

第二类：2 在个位时，最高位数字(千位数)从 1，3，4，5 中选定 1 个(有 4 种)，十位和百位从余下的数字中选(有 A_4^2 种)，于是有 $4A_4^2$ 个；

第三类：4 在个位时，与第二类同理，也有 $4A_4^2$ 个.

由分类加法计数原理知，共有四位偶数 $A_5^3+4A_4^2+4A_4^2=156$(个).

(4) 符合要求的四位数可分为两类：

第一类：个位上的数字是 0 的四位数有 A_5^3 个；

第二类：个位上的数字是 5 的四位数有 $4A_4^2$ 个.

故无重复数字的且为 5 的倍数的四位数个数共有：

$A_5^3+4A_4^2=5\times4\times3+4\times4\times3=108$(个).

(5) 比 1325 大的四位数可分为三类：

第一类：最高位数字(千位数)不是 1 的共有 $4A_5^3$ 个；

第二类：千位数是 1，百位数是 4 或 5 的共有 $2A_4^2$ 个；

第三类：千位数是 1，百位数是 3 的共有 $2\times3=6$(个).

由分类加法计数原理知，比 1325 大的四位数共有：

$4A_5^3+2A_4^2+6=270$(个).

点评： ①注意数字是否允许重复的区别.

②注意最高位数字不能是 0，用直接法时需要分类，也可用间接法，即用全排列数减去不符合要求的排列数.

【例 2】 有 A,B,C,D,E,F 共 6 人分别按下列要求站一横排，则各有多少种不同的站法？

(1)A 不站两端；

(2)A、B 必须相邻；

(3)A、B 不能相邻；

(4)A、B 之间间隔 2 人；

(5)A、B 必须站在两端；

(6)A 不站最左端，B 不站最右端.

解：(1)要使 A 不站在两端，可先让 A 在中间 4 个位置上任选 1 个，有 4 种站法，然后其余 5 人在另外 5 个位置上作全排列有 A_5^5 种站法.根据分步乘法计数原理，共有站法 $4A_5^5=480$(种).

(2)先把 A、B 作为一个"整体"，看作一个人，有 A_5^5 种站法，再把 A、B 进行全排列，有 A_2^2 种站法，根据分步乘法计数原理，共有 $A_5^5\cdot A_2^2=240$(种)站法.

(3)因为 A、B 不相邻，中间有隔档，可用"插空法"，第一步，先让 A、B 以外的 4 个人站队，有 A_4^4 种；第二步，再将 A、B 排在 4 人形成的 5 个空档(含两端)中，有 A_5^2 种.故共有 $A_4^4\cdot A_5^2=480$(种).

(4)先从 A、B 以外的 4 个人中任意选 2 人排在 A、B 之间的 2 个位置上，有 A_4^2 种，然后把 A、B 及中间 2 人看作一个"大元素"与余下 2 人作全排列有 A_3^3 种方法，最后对 A、B 进行全排列，有 A_2^2 种方法.故共有 $A_4^2\cdot A_3^3\cdot A_2^2=144$(种)站法.

(5)A、B 先站两端，有 A_2^2 种方法，再让其他 4 人在中间位置作全排列，有 A_4^4 种方法.根据分步乘法计数原理，共有 $A_2^2\cdot A_4^4=48$(种)站法.

(6)以元素 A 分类可分为两类：

第一类：A 站右端有 A_5^5 种；

第二类：A 在中间 4 个位置之一，而 B 不站右端有 $4\times 4A_4^4$ 种.

故共有 $A_5^5+4\times4A_4^4=504$(种)站法.

点评：问题(1)中 A 有特殊限制，故可先排 A；问题(2)中 A、B 相邻，可把 A、B 看作一个整体；问题(3)中 A、B 不能相邻，可用插空法.

方法点拨

1. 在研究排列问题时，是从一些不同元素中任取部分不同元素，这里既没有重复的元素，又没有重复抽取同一元素的情况.

2. 对于有限制条件的排列问题，先考虑安排好特殊元素(或位置)，再安排一般的元素(或位置)，即先特殊后一般("特殊优先")，一般用直接法.也可以先不考虑特殊元素(位置)，而列出所有元素的全排列数，从中再减去不满足特殊元素(位置)要求的排列数，即先全体后排除，此方法一般是间接法.

3. 对于相邻问题，可以采用"捆绑法"，即先将相邻的元素排好，再将它们整体作为一个"大元素"，与其他元素一起排列即可.

4. 对于不相邻问题，可以采用"插空法"，即先排好不需要间隔的元素，将它们形成的空隙(注意两端)作为位置，将需要间隔的元素以插空的方式安排进去.

5. 当问题从正面考虑较为复杂时，常从反面突破，即正难则反.

达标练习

1. $A_4^4\cdot A_4^4$ 是下列哪一个问题的答案　　(　　)

A. 4 男 4 女排成一列，同性别的都不相邻

B. 4 男 4 女排成一列，女生都不相邻

C. 4 男 4 女分别到 4 个不同的兴趣小组，每组一男一女

D. 4 男 4 女分成两组，这两组各有 2 男 2 女

2. 由数字 0,1,2,3,4,5 组成无重复数字的六位数，个位数字小于十位数字的六位数有　　(　　)

A. 210 个　　B. 300 个

C. 464 个　　D. 600 个

3. 从集合 $A=\{1,2,3,5,7,9\}$ 中任取两个不同的数分别作为对数的底数和真数，则所有这样的对数值组成的集合的元素个数为________(用数字作答).

4. 一排长椅上共有 10 个座位，现有 4 人就坐，恰好有五个连续空位的坐法种数为________(用数字作答).

5. 某天有体育、美术等不同的六门课程，上午上四节课，下午上两节课，如果体育不排上午第一、二、三节，美术不排上午第一、二节，则有几种不同的排法？

6. 有 7 种不同的职务，现对 7 名班委进行职务具体分工.

(1)若正副班长两职只能由 A,B,C 三人中选两人担任，有多少种不同的分工方案？

(2)若正副班长两职至少要选 A,B,C 三人中的 1 人担任，有多少种不同的分工方案？

探究活动

一条铁路线上原有 n 个车站，为适应客运需要，新增加了 $m(m>1)$ 个车站，客运车票增加了 62 种，问原有多少个车站？现有多少个车站？($m,n\in\mathbf{N}^*$)