21世纪高职高专规划教材

高等应用数学基础

主　编　李先明

21SHIJIGAOZHIGAOZHUANGUIHUAJIAOCA

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

高等应用数学基础

21 世纪高职高专规划教材

高等应用数学基础

主　编　李先明

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书是基于学生专业素质教育、理性思维训练、接受美感熏陶，以及数学文化传承之目的，并结合多年教学改革之成果编写而成。

本书内容包括初等函数、函数的极限、函数的微分、函数的积分、无穷级数、多元函数微积分、线性方程组、随机事件及概率、随机变量及其数字特征、参数估计与假设检验、数学建模初步、数学实验等。

本书既可作为高等职业院校、成人专科院校高等数学、工程数学、数学建模、数学实验等课程的教材，也可作为工程技术人员进修使用。

本书提供电子教案，读者可以到中国水利水电出版社和万水书苑的网站上免费下载，网址为：http://www.waterpub.com.cn/softdown/和 http://www.wsbookshow.com。

图书在版编目（CIP）数据

高等应用数学基础 / 李先明主编. —北京：中国水利水电出版社，2009

21 世纪高职高专规划教材

ISBN 978-7-5084-6400-8

Ⅰ. 高… Ⅱ. 李… Ⅲ. 应用数学—高等学校：技术学校—教材 Ⅳ. O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 044639 号

策划编辑：石永峰　责任编辑：张玉玲　加工编辑：郑秀芹　封面设计：李　佳

书　　名	21 世纪高职高专规划教材 **高等应用数学基础**
作　　者	主　编　李先明
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路 1 号 D 座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：mchannel@263.net（万水） sales@waterpub.com.cn 电话：（010）68367658（营销中心）、82562819（万水）
经　　售	全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　　版	北京万水电子信息有限公司
印　　刷	北京泽宇印刷有限公司
规　　格	184mm×260mm　16 开本　18 印张　437 千字
版　　次	2009 年 6 月第 1 版　2009 年 6 月第 1 次印刷
印　　数	0001—3000 册
定　　价	29.00 元

前　　言

高等职业教育中的数学教育是为培养和造就各类高素质、高技能人才服务的，其作用至少有以下4个方面：它是学生掌握数学工具的主要课程，是“专业素质”教育的重要内容；它是学生培养理性思维的重要载体，数学研究的是各种抽象的“数”和“形”的模式结构，运用的主要是逻辑、思辨和推演等理性思维方法，数学教育对大学生全面素质的提高、分析能力的加强、创新意识的启迪都是至关重要的；它是学生接受美感熏陶的一条途径，数学是美学四大中心建构（史诗、音乐、造型和数学）之一，数学美的体现是多方面的，比如将杂乱整理为有序、使经验升华为规律、寻求各种物质运动的简洁统一的数学表达等，都是人们对美的追求，这种追求对一个人精神世界的陶冶有着潜移默化的影响，而且往往是一种创新的动力；它是数学文化传承的需要，数学文化丰富多支，应用十分广泛，对人类进步的贡献无论是过去还是将来都是巨大的。本书是基于以上目的，并结合多年教学改革之成果编写而成的。

本书内容包括初等函数、函数的极限、函数的微分、函数的积分、无穷级数、多元函数微积分、线性方程组、随机事件及概率、随机变量及其数字特征、参数估计与假设检验、数学建模初步、数学实验等。“数学建模是数学走向应用的必经之路，在应用数学学科中占有特殊重要的地位”，将数学建模思想融入数学课程之中是数学教学改革的重要内容。数学实验是为那些希望借助计算机，亲自设计和动手，体验解决问题的过程，从实验中去学习、探索和发现数学规律的读者设计的。这两部分内容读者可以根据自己的实际选学。

本书的创新点及特点有以下6点：一是充分运用现代教育思想（形象思维、微元法思想、符号使用技巧等），希望学生获得极强的理性思维训练；二是重点突出知识的应用，希望拓展学生的数学应用空间；三是引入数学建模思想及数学实验内容，希望学生获得数学美的熏陶；四是为工程类和经济类的学生搭建了学习高等数学的公共平台，希望它成为学生掌握数学工具、构建自己的数学知识体系的良师益友；五是结合内容展示，提供多角度观察事物的方法，使读者从不同方向、不同层面、不同角度认识数学知识，观察事物，掌握数学原理、方法、应用数学知识的例证（原型）；六是提供主要内容的学习、讲授方法，提供处理抽象理论、常见问题分析和解决的方法，以及对抽象事物的认识方法。对教师来说，本书无疑是一部带有教学设计的讲义。

本书由李先明任主编，刘彦辉、张静任副主编，参加编写工作的有王正均、陈德林、唐希平、刘光、郭渝生、刘家英、敖开云、许院年、时耀敏。李先明负责全书编写思想原则确立、内容设计、统稿和定稿。

高等职业教育仍处于发展阶段，其数学教育改革任重道远，希望借助本书吸引更多同仁参与数学教育研究，推动我国高等职业教育的更大发展。

编　者

2009年4月

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

出版精品教材　服务高校师生

以普通高等教育“十一五”国家级规划教材为龙头带动精品教材建设

21世纪 高等院校规划教材

适应高等教育的跨越式发展　符合应用型人才的培养要求

本套丛书是由一批具备较高的学术水平、丰富的教学经验、较强的工程实践能力的学术带头人和主要从事该课程教学的骨干教师在分析研究了应用型人才与研究人才在培养目标、课程体系和内容编排上的区别，精心策划出来的。丛书共分3个层面，百余种。

程序设计类课程层面

强调程序设计方法和思路，引入典型程序设计案例；注重程序设计实践环节，培养程序设计项目开发技能

专业基础类课程层面

注重学科体系的完整性，兼顾考研学生需要；强调理论与实践相结合，注重培养专业技能

专业技术类应用层面

强调理论与实践相结合，注重专业技术技能的培养；引入典型工程案例，提高工程实用技术的能力

21世纪 高等学校精品教材

面对“知识—能力—素质”的要求　**应对“基础—技术—应用”的特点**

“多媒体技术及数字图像处理系列”在知识结构方面力求覆盖计算机多媒体技术、多媒体软件开发技术、数字图像处理技术和动画处理技术四个领域，内容强调概念性基础、技术与方法基础、应用技能三个层次。

高等院校“十一五”规划教材

丛书特点：

- 注重知识的基础性、系统性与全局性，兼顾前瞻性与引导性。
- 语言精练，应用案例丰富，讲解内容深入浅出。
- 体系完整，内容充实，注重应用性与实践性。
- 讲求实用，培养技能，提高素质，拓展视野。

目　录

第 1 章　初等函数

初等函数是微积分学研究的主要对象，本章就初等函数的内容、性质及其几何特征加以简单叙述，对此内容比较熟悉的读者可以跳过这一章，也不会影响阅读此书.

1.1　基本初等函数

在中学里，我们学习了以下 6 类函数，称为基本初等函数，它们是研究和认知复杂函数的基础：

（1）常数函数 $y=C$（C 为常数），定义域 $D=\mathbf{R}$，值域 $Z=\{C\}$.

（2）幂函数 $y=x^{\alpha}$（α 为常数），对给定的指数 α 所规定的幂函数，其定义域的确定应根据这个指数对底数的约束情况来判定. 幂函数的递增或递减性，则由其指数 $\alpha>0$ 或 $\alpha<0$ 来确定. 如 $y=x^{-1}$、$y=x$、$y=x^2$、$y=\sqrt{x}$，如图 1-1 所示.

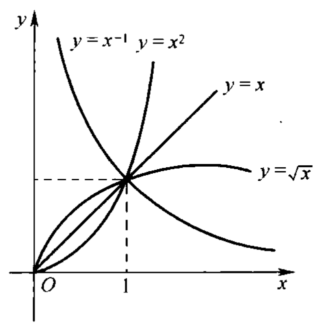

图 1-1　幂函数的图形

（3）指数函数 $y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$），定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $Z=(0,+\infty)$. 指数函数的递增或递减性，则由其底数 $a>1$ 或 $0<a<1$ 来确定. 如 $y=2^x$、$y=\mathrm{e}^x$、$y=10^x$，如图 1-2 所示.

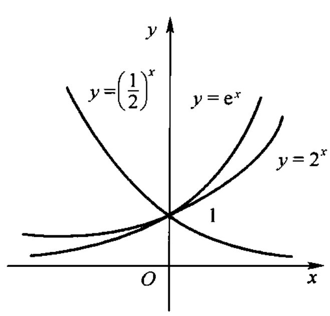

图 1-2　指数函数的图形

（4）对数函数 $y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$），定义域 $D=(0,+\infty)$，值域 $Z=(-\infty,+\infty)$．对数函数的递增或递减性，则由其底数 $a>1$ 或 $0<a<1$ 来确定．如 $y=\ln x$、$y=\lg x$，如图 1-3 所示.

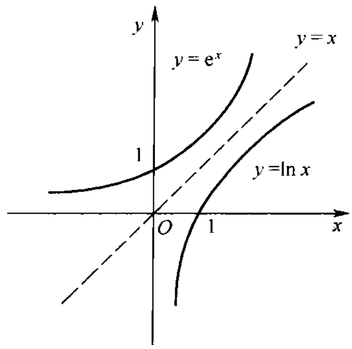

图 1-3　指数函数与对数函数互为反函数的图形

（5）三角函数。三角函数包括以下 6 个函数，这里同时指出它们主要的一些性质：

1）正弦函数：$y=\sin x$，定义域 $D=\mathbf{R}$，值域 $Z=[-1,1]$，有界，奇函数，周期为 2π（所有正周期中最小者，以下出现的雷同），主要的递增区间为 $\left[-\dfrac{\pi}{2},+\dfrac{\pi}{2}\right]$，递减区间为 $\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$，如图 1-4 所示.

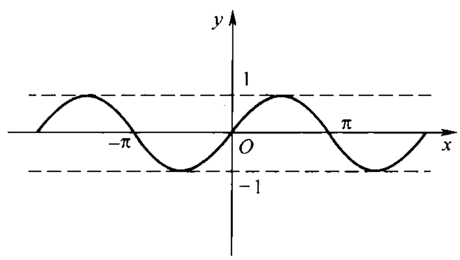

图 1-4　$y=\sin x$ 的图形

2）余弦函数：$y=\cos x$，定义域 $D=\mathbf{R}$，值域 $Z=[-1,1]$，有界，偶函数，周期为 2π，主要的递减区间为 $[0,\pi]$，递增区间为 $[-\pi,0]$．如图 1-5 所示.

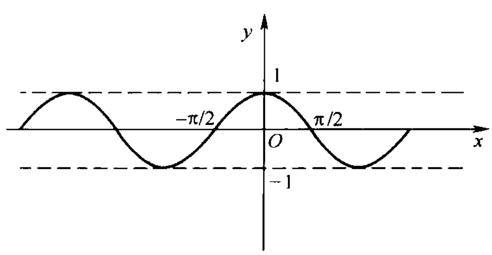

图 1-5　$y=\cos x$ 的图形

3）正切函数：$y=\tan x$，定义域 $D=\{x\mid x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z},\ x\in\mathbf{R}\}$，值域 $Z=(-\infty,+\infty)$，

无界，奇函数，周期为 π，主要的递增区间为 $\left(-\dfrac{\pi}{2},+\dfrac{\pi}{2}\right)$，如图 1-6 所示.

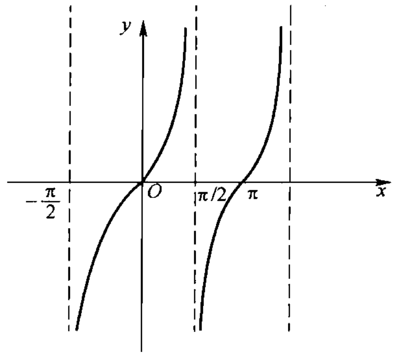

图 1-6　$y=\tan x$ 的图形

4）余切函数：$y=\cot x$，定义域 $D=\{x\mid x\neq k\pi，k\in\mathbf{Z}，x\in\mathbf{R}\}$，值域 $Z=(-\infty,+\infty)$，无界，奇函数，周期为 π，主要的递减区间为 $(0,\pi)$.

5）正割函数：$y=\sec x$，定义域 $D=\{x\mid x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}，k\in\mathbf{Z}，x\in\mathbf{R}\}$，值域 $Z=(-\infty,1]\cup[1,+\infty)$.

6）余割函数：$y=\csc x$，定义域 $D=\{x\mid x\neq k\pi，k\in\mathbf{Z}，x\in\mathbf{R}\}$，值域 $Z=(-\infty,1]\cup[1,+\infty)$.

（6）反三角函数. 反三角函数包括以下 4 个函数，这里同时指出它们主要的一些性质：

1）反正弦函数：$y=\arcsin x$，定义域 $D=[-1,1]$，主要的值域 $Z=\left[-\dfrac{\pi}{2},+\dfrac{\pi}{2}\right]$，有界，奇函数，递增.

2）反余弦函数：$y=\arccos x$，定义域 $D=[-1,1]$，主要的值域 $Z=[0,\pi]$，有界，递减.

3）反正切函数：$y=\arctan x$，定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，主要的值域 $Z=\left(-\dfrac{\pi}{2},+\dfrac{\pi}{2}\right)$，有界，奇函数，递增.

4）反余切函数：$y=\operatorname{arccot} x$，定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，主要的值域 $Z=(0,\pi)$，有界，递减.

习题 1.1

试指出幂函数（$y=x^\alpha$）、指数函数（$y=a^x$）、对数函数（$y=\log_a x$）、三角函数（$y=\sin x$ 或 $y=\cos x$）、反三角函数（$y=\arcsin x$ 或 $y=\arctan x$）等基本初等函数的几何特征.

1.2　函数的基本性质

定义 1.1（函数的定义）对给定的一个非空实数集 D 和一个对应规则 f，如果对任意 $x\in D$，按照规则 f 都能指出一个确定的实数 y 与之对应（记为 $y=f(x)$），则称规则 f 是 D 上的一个函数，并记为：$y=f(x)$，$x\in D$. 其中，又称 x 为自变量，y 为因变量，D 为函数的

定义域.

由函数的定义可知，要给出一个函数，则应该表示为：$y=f(x)$，$x\in D$. 函数定义的本质包含了两个关键要素，即定义域和对应规则.在函数问题的讨论中，D和f都是事前确定的.这里的定义域D要求它是某些实数的集合，而对应规则f要求它作用在$x\in D$上所产生的结果y是一个确定的实数.

对已知的两个函数，我们怎样区分它们在性质上是不同的呢？方法是看它们在关键要素上是否具有差异性. 所以，两个函数是否相同决定于它们的定义域和对应规则. 因此，我们称两个函数是相同的函数，当且仅当它们的定义域D与对应规则f都是相同的. 例如，函数$y=\ln x^2$与$y=2\ln x$是不相同的函数，函数$y=\sqrt{x^2}$与$y=|x|$是相同的函数.

记号$f(x)$表示变量x的函数值，该函数值的计算依赖于规则f的模式.

例 1.1 设$f(x+2)=x^2+4x+2$，试求$f(f(2))$的值.

解：令$u=x+2$，则$f(u)=(u-2)^2+4(u-2)+2=u^2-2$，从而$f(2)=2$.

于是，$f(f(2))=f(2)=2$.

例 1.2 设$f(x)+f(y)=f(z)$，并且$f(x)=\dfrac{1}{x}$，试求z的值.

解：因$f(x)=\dfrac{1}{x}$，于是有$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{z}$，所以$z=\dfrac{xy}{x+y}$.

例 1.3 设$f(x^2-1)=\ln\dfrac{x^2}{x^2-2}$，且$f(g(x))=\ln x$，试求：$g(x)$与$g^{-1}(x)$.

解：令$u=x^2-1$，有$f(u)=\ln\dfrac{u+1}{u-1}$，又$\ln x=\ln\dfrac{g(x)+1}{g(x)-1}$.

所以$g(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$，而$g(x)$的反函数为：$g^{-1}(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$.

例 1.4 求函数$y=\sqrt{4-x}+\arcsin(2x+1)$的定义域.

解：因$\begin{cases}4-x\geqslant 0,\\ |2x+1|\leqslant 1.\end{cases}$有$\begin{cases}x\leqslant 4,\\ -1\leqslant x\leqslant 0.\end{cases}$于是$D=[-1,0]$.

例 1.5 （分段函数）某电信公司在其服务区内对每户每部电话机的使用收费标准规定为：每月所打电话的次数不超过 50 次的，只收月租费 25 元；超过 50 次的则每次加收 0.2 元. 那么每户每月电话费用y和用户当月实际所打电话次数x的变化规律可表示为：

$$y=f(x)=\begin{cases}25, & x\leqslant 50,\\ 25+0.2(x-50), & x>50.\end{cases}$$

所谓分段表示的函数其实是根据问题的属性和要求，在自变量x的不同取值范围内用不同的规则表达方式来表示函数规则f的一种函数表示方法.

定义 1.2（函数的有界性） 已知函数$y=f(x)$，$x\in D$. 如果存在一个正实数M，对任意的$x\in D$，总有$|f(x)|\leqslant M$成立，则称函数f在D上有界；否则，称函数f在D上无界，例如$|\sin x|\leqslant 1$.

一个函数在其定义区间上有界是指其所有的函数值都能夹在两个常数之间. 函数的有界性是一个整体性的概念，它强调的是函数在其整个定义区间上所具有的一种性质.

定义 1.3（函数的单调性）已知函数 $y=f(x)$，$x\in(a,b)$．如果对任意两个实数 x_1，$x_2\in(a,b)$，且 $x_1<x_2$，有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$）成立，则称函数 f 在 (a,b) 内单调递增（或单调递减）．使函数递增或递减的区间统称为函数的单调区间，函数在其定义区间上递增或递减的性质统称为函数的单调性．例如 $y=x^2$ 在 $(0,+\infty)$ 上是单调递增的，在 $(-\infty,0)$ 上是单调递减的.

定义 1.4（函数的奇偶性）已知函数 $y=f(x)$，$x\in(-l,l)$．如果对任意的 $x\in(-l,l)$ 有：$f(-x)=f(x)$（或 $f(-x)=-f(x)$）成立，则称函数 $f(x)$ 为偶函数（或称奇函数）．例如 $y=x^2$ 是偶函数，$y=\dfrac{1}{x}$ 是奇函数.

函数在其定义区间 D 上是奇函数或偶函数的这种属性称为函数的奇偶性，它是函数在整个定义区间内具有的一种性质，这种性质在几何上表现出对称性．即：奇函数的图形关于原点对称，偶函数的图形为轴对称图形.

定义 1.5（函数的周期性）已知函数 $y=f(x)$，$x\in\mathbf{R}$．如果存在常数 $T\neq0$，对任意 $x\in\mathbf{R}$，有：$f(x+T)=f(x)$ 成立，则称函数 f 为 $\mathbf{R}$ 上的周期函数，称常数 T 为函数的一个周期．例如 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 的周期都为 2π.

周期函数也具有对称性，即每当自变量 x 取值变动了一个周期 T 时，函数值就会重复出现，所以周期函数的图形可以按周期重复叠加.

定义 1.6（反函数问题）设函数 $y=f(x)$，$x\in D_f$，$y\in Z_f$．如果对任意的 x_1，$x_2\in D_f$，且 $x_1\neq x_2$，都有 $f(x_1)\neq f(x_2)$ 成立．于是，对任意的 $y\in Z_f$，一定存在对应规则 f^{-1}，按照这个规则都能指出一个确定的实数 x 与之对应（记为 $x=f^{-1}(y)$）．由定义 1.1 可知，规则 f^{-1} 就是 Z_f 上的一个函数，则称函数 $x=f^{-1}(y)$ 为已知函数 f 的反函数．习惯上，把函数 f 的反函数改写为 $y=f^{-1}(x)$，$x\in D_{f^{-1}}=Z_f$，$y\in Z_{f^{-1}}=D_f$．如函数 $y=\ln x$ 与函数 $y=\mathrm{e}^x$ 互为反函数.

关于反函数问题，我们有以下的结论：

（1）在一个区间上单调的函数一定有反函数，其反函数的单调性与已知函数一致.

（2）函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

（3）$y=f^{-1}(x)$，$x\in D_{f^{-1}}\Leftrightarrow x=f(y)$，$y\in D_f$.

（4）$f(f^{-1}(x))=x$，$x\in D_{f^{-1}}=Z_f$.

（5）$f^{-1}(f(x))=x$，$x\in D_f=Z_{f^{-1}}$.

根据反函数的定义和有关的结论，不难给出反三角函数的概念和有关的性质．读者不妨试一试，如自己给出反正弦函数的概念和性质.

定义 1.7（复合函数）设有函数 $y=f(u)$，$u\in D_f$，又 $u=\varphi(x)$，$x\in D_\varphi$．如果有 $Z_\varphi\subset D_f$ 成立，则由 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的函数 $y=f(\varphi(x))$（$x\in D_\varphi$）称为复合函数．其中，称 u 为中间变量，在应用中它具有转化和替代的作用.

例 1.6　已知 $y=\sqrt{v}$，$v=1+u^2$，$u=\dfrac{1-t}{1+t}$ 与 $t=\sin x$，试写出 y 关于 x 的函数关系.

解：$y=\sqrt{v}=\sqrt{1+u^2}=\sqrt{1+\left(\dfrac{1-t}{1+t}\right)^2}=\sqrt{1+\left(\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)^2}$．

例 1.7 已知函数 $y=\log_2 \arcsin^2\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$，试问它是由哪些简单函数复合而成的．

解：易知函数 y 是由 $y=\log_2 u$，$u=v^2$，$v=\arcsin t$ 与 $t=\dfrac{x+1}{x-1}$ 复合而成的．

其中，u、v、t 均为增设的中间变量．在复合函数构成结构的认知过程中，要求转化与替代的最终结果必须用自变量 x 的最简单的形式表示出中间变量为止．

由基本初等函数经过有限次的加、减、乘或除（分母非零）及复合运算而形成的函数称为初等函数．如函数 $y=(x+2)^3$、$y=x^2e^{3x}$、$y=\sin\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$ 等．

例 1.8 设 $f(2x)=4x-1$，且 $f(a)=3$，则 $a=$______．

解：$f(2x)=4x-1=2(2x)-1\Rightarrow f(x)=2x-1\Rightarrow f(a)=2a-1=3\Rightarrow a=2$．

例 1.9 已知函数 $f(x+t)=f(x)+f(t)$ 对任何实数都成立，则 $f(0)=$______．

解：由 $f(x+t)=f(x)+f(t)$，当 $x=0$ 时，有 $f(t)=f(0)+f(t)$，从而 $f(0)=0$．

例 1.10 设一矩形的周长为 $2p$，现绕其一边旋转一周生成一圆柱体，求圆柱体体积 V 与底半径 x 的函数关系．

解：如图 1-7 所示．

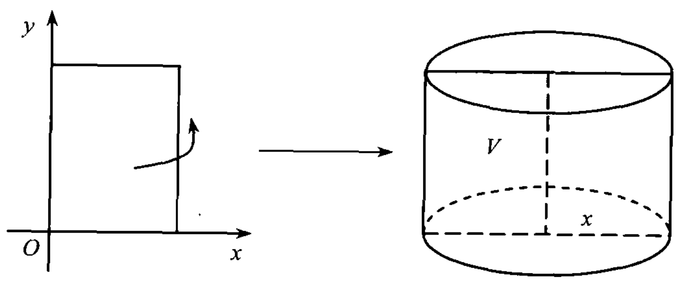

图 1-7 圆柱体体积 V 与底半径 x 的关系

$V=\pi x^2 y$，又 $2(x+y)=2p$，从而函数关系为：$V=\pi x^2(p-x)$．

例 1.11 一企业生产某种商品 x 件时的总成本为 $C(x)=100+2x+x^2$（万元）．若每售出一件该商品的收入是 50 万元，求生产 30 件时的总利润和平均利润．

解：由于该商品的价格 $p=50$ 万元，故售出 x 件该商品时的总收入函数为

$$R(x)=px=50x.$$

因此，总利润函数

$$L(x)=R(x)-C(x)=-100+48x-x^2.$$

$$L(30)=-100+48\times 30-(30)^2=440\ （万元）.$$

$$\bar{L}(30)=\frac{L(30)}{30}\approx 14.67\ （万元）.$$