离散数学、算法及CAI

曹晓东 编著

本书由
大连海事大学
学术著作出版
基金资助

大连海事大学出版社

离散数学、算法及CAI

曹晓东　编著

大连海事大学出版社

(辽)新登字 11 号

离散数学算法及 CAI
曹晓东　编著
责任编辑:刘宗德　　封面设计:王　艳
大连海事大学出版社出版、发行
大 连 海 事 大 学 印 刷 厂 印 装
开本 787×1092　1/16　印张:17.75　字数:443 千
1996 年 6 月第 1 版　1996 年 6 月第 1 次印刷
印数:0001～2000　定价:31.80 元
ISBN 7-5632-0956-5/O·57

内 容 简 介

本书共分三部分，第一部分内容介绍计算机科学中广泛应用的离散结构的基本概念和基本原理。它们包括以下内容：数理逻辑，集合论，二元关系，函数，代数系统，半群与群，格与布尔代数和图论。第二部分给出与以上内容密切相关的主要算法和程序，使理论在计算机上得到具体实现。第三部分内容介绍计算机辅助教学并附上本书主要内容的计算机辅助教学软盘。

本书写法新颖，每章开头的简短引言，点缀了内容提要，结尾的小结道出了各章的精华。每章后提供的数量和难度都适中的练习有助于读者对基本理论的理解与学习。

算法和程序部分的提供可以使读者直接上机，不但能够加深对理论的理解，而且还可以学习到程序设计的方法，提高读者程序设计的能力，使原本枯燥的理论突然丰满起来。

计算机辅助教学的增加使本书更加精彩，读者可以在计算机上自我学习，不仅可以看到图文并茂的画面与解释，而且可以看到生动活泼的如动画似的例子；同时读者还可以自如地和计算机进行交流。

第二部分内容用 BASIC 语言来实现，稍有程序设计基础的人都可以读懂程序。第三部分 CAI(Computer-Assisted Instruction)用 VB(Visual Basic)来实现。我们把程序毫不加密的奉献给读者，读者在自我学习的同时，还可以学习到用 VB 实现 CAI 的方法与技术。

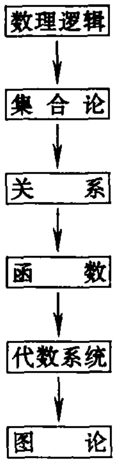
全书叙述通俗易懂，是一本学习计算机科学中离散结构的绝好著作；它也可以作为高等院校讲授计算机科学中离散结构的教材和教学参考书。适合高等学校的大学生、研究生、教师以及广大的计算机工作者和科技人员阅读与参考。

序　言（一）

计算机科学发展之迅速、应用之广泛，已成为科学之林的姣姣者。计算机科学之所以取得这样辉煌的成绩，除了它自身的魅力之外，主要是因为有其雄厚的理论基础——离散数学。

离散数学不仅是计算机科学基础理论的核心课程，而且也是计算机科学的更高级形式——人工智能科学的数学基础之一。可以断言，要想学习计算机科学和人工智能科学，不懂离散数学是不可思议的。

离散数学的结构体系大致如下图所示：



图中的每一框都是一个独立的学科，但是它们之间又有着内在的联系。例如，数理逻辑是用数学方法研究推理的一门科学，它使用了一套特制的表意符号构成了一套形式化语言。使用这套形式化语言所构成的形式体系，可以充分地描述集合的并集、交集、笛卡尔乘积……。关系是笛卡尔乘积的子集，函数则是关系的子集。利用函数可以定义运算，有了集合和运算就可以定义代数系统。半群与群、格与布尔代数均是代数系统的特例。图论则是代数系统在计算机科学应用领域中最活跃的一个分支。

从离散数学的结构体系上不难看出，离散数学的内容是丰富的，涉及面是广泛的，各部分的内容既是独立的又是相关的。离散数学与计算机科学中的数据结构、操作系统、可计算性理论、定理自动证明、编译理论、逻辑设计、计算机系统结构、数据库理论等密切相关。

本书共分三部分，第一部分介绍离散数学的基本理论，共有七章。它们是命题逻辑、谓词逻辑、集合论、关系、函数、代数系统、图论。其中，半群与群、格与布尔代数是作为代数系统中的特例来介绍的，着笔较轻；对在计算机科学中应用比较活跃的图论，则着笔较重、较细。第二部分将离散数学中的主要算法用算法语言 BASIC 实现并存在软盘上。使学习者在学习基本理论、培养抽象思维能力和逻辑思维能力的同时，有一个理论与实践相结合的学习机会，增强程序设计的能力。第三部分把离散数学中的主要内容作成了计算机辅助教学[CAI(Computer-Assisted Instruction]系统，使学习者可以在计算机上自我学习，自我检测。如果您的计算机上装有声卡，我们可以提供您一套在多媒体环境下的 CAI，它能提供您一个轻松愉快的学习环境，其中概念部分，我们配上了录音讲解，例子部分实现了动态演示并配有轻松愉快的音乐，它能把您手、脑、耳、目的积极性都调动起来，它给您一个全新的学习概念，使您在轻松愉快中接受了那些原本是枯燥乏味的理论。这一部分的内容我们是在 Windows 环境下用 Visual Basic 来实现的。我们把算法和 CAI 放在一张软盘上，并把原程序毫不加密地奉献给学习者，您可以从中学习到使用 VB(Visual Basic)设计 CAI 的方法和技术，从这里入门您即可步入计算机科学的辉煌殿堂。

我的学生陆坚完成了算法的全部调试工作，我的学生乔耘和荆燕国对本书的 CAI 部分作出了积极的贡献，对他们的辛勤工作一并表示真诚的感谢。

出书的过程中还得到了大连海事大学周玉钦教授和刘宗德教授的热情鼓励与支持，没有他们的帮助和支持这本书也不会这么顺利地出版，在此也向他们表示诚挚的谢意。

特别应该感谢大连理工大学的李盘林教授在百忙之中为本书写了序言。

借此机会，谨向所有与本书的构思、编写和出版有关的同志表示衷心的感谢。

限于作者水平，书中错误和疏漏之处在所难免，恳请读者不吝指教。

作者谨识

1996.1.5

序　　言（二）

高科技的本质是数学，计算机科学的本质是离散数学。因此，要学习好计算机科学不懂离散数学是不可思议的。然而，离散数学的理论比较抽象，初学者感到有一定难度。

本书作者能够把离散数学中的算法用程序实现，同时把离散数学的计算机辅助教学系统也奉献给读者，这就使得本来是抽象的理论一下子变得生动活泼起来，给学习者创造了一个良好的学习环境。读者通过对算法的运行和原程序的阅读，不仅可以学习到程序设计的技巧，还可以加深对理论的理解。读者在使用计算机辅助教学系统的同时，还可以学习到用 Visual Basic 这种面向对象的程序设计语言来实现 CAI(Computer-Assisted Instruction)的技术。

要学好计算机科学必须学好离散数学，反过来利用计算机科学技术(例如面向对象的程序设计语言、多媒体技术等)来促进离散数学理论的学习，这既是本书的特点，也是作者的杰出贡献。随着计算机科学技术的发展，电子出版物将逐渐推向市场，本书是向电子出版物市场迈出的杰出的一步。我为本书的出版感到欣喜。

李盘林

96 年 2 月

目　　录

第一篇　计算机科学中的离散结构

第二篇 离散数学中的算法

第三篇　离散数学计算机辅助教学

第一篇　计算机科学中的离散结构

第一章　命题逻辑

1.1 引　　言

命题逻辑与谓词逻辑统称为数理逻辑(又名符号逻辑)，是用数学方法研究推理的一门科学。旧逻辑学的创始人是公元前四世纪的希腊思想家亚里斯多德(Aristotle)；新逻辑学的创始人是十七世纪的德国哲学家莱不尼兹(Leibniz)和十九世纪中叶的英国数学家乔治·布尔(George Boole)。

逻辑学的主要目的是要探索出一套完整的规则，按照这些规则可以确定任何特定的论证是否有效。这种规则就叫推论规则。要想把这种推论规则应用到各个学科领域中去，就必须使用一种概括性很强的，并且又是独立于任何特定的论证或所涉及到的学科的一种语言。这种语言是一种符号化的形式语言，它没有二义性。使用这种形式化语言，可以将推理过程公式化，并且依据推理规则可以机械地确定论证的有效性。

因此，数理逻辑实际上是用数学方法研究推理过程的一个符号化形式体系。我们之所以对这种形式化体系这样感兴趣，是因为形式语言的研究已成为研制人与计算机通讯手段的重要部分。

本章将介绍这套符号化形式体系的制定，以及它在命题逻辑中的应用。

1.2 命题及命题逻辑联结词

命题

一个具有真假意义的陈述句被称为一个命题。

也就是说，一个命题的真值只能是真或是假，不能兼而有之，也不能是疑问句或祈使句等其他类型的句子。

如果一个命题的真值是真，则用 1 或 T(True)来表示；如果一个命题的真值是假，则用 0 或 F(False)来表示。

命题用大写的英文字母，如 P,Q,R……来表示。

例 1.2－1　下面所举均是命题：

(1) 长春是辽宁省的省会。

(2) $2\times2=5$。

(3) 闪电比雷声传播得快。

(4) $1+101=110$

(5) 程序的始祖是拜伦的独生女儿爱达。

以上命题(1)和(2)的真值是 F;(3)的真值是 T;(4)的真值则取决于采用哪种数制,若采用二进制,则取值为 T,其它进制则取值为 F;(5)的真值则要取决于考证的结果。

例 1.2—2 下面所举均不是命题:

(1) 我们的祖国多辽阔呀!

(2) 明天开会吗?

(3) 真好啊!

(4) 我正在说谎。

因为(1)、(2)和(3)不是陈述句,所以它们不是命题。(4)是悖论。因为,如果他确实是说谎,那么"我正在说谎"便是真,于是就会得出,如果他是说谎,那么他是讲真话;另一方面,如果他确实说的是真话,那么"我正在说谎"便是假,于是乎会得出,如果他是讲真话,那么他是说谎。从以上分析,我们只能得出这样的结论——他必须既不说谎又不讲真话,这显然是矛盾的。也就说对于陈述句"我正在说谎"已无法指定它的真值。这样的陈述句称为悖论,不是命题。

若一个命题不能再分解为更简单的命题,这个命题称为原子命题。

例 1.2—1 中的命题均是原子命题。

逻辑联结词

使用逻辑联结词和圆括号可以把原子命题组合成新的命题。这种命题称为复合命题或分子命题。例如

用 P 表示:今天下午有篮球比赛

用 Q 表示:北京是中国的首都

利用逻辑联结词——否定,合取,析取,单条件,双条件等,可分别构成新的命题如下:

$\neg P$:今天下午没有篮球比赛。

$P \wedge Q$:今天下午有篮球比赛,并且北京是中国的首都。

$P \vee Q$:今天下午有篮球比赛或北京是中国的首都。

$P \rightarrow Q$:如果今天下午有篮球比赛,那么北京是中国的首都。

$P \leftrightarrows Q$:今天下午有篮球比赛,当且仅当北京是中国的首都。

在代数式 $x+y$ 中,x 和 y 称为运算对象,+称作运算符,$x+y$ 则表示运算结果。在命题演算中,也有同样的术语,联结词就是命题演算中的运算符,称为逻辑运算符或逻辑联结词。逻辑联结词和复合命题密切相关。下面给出六个常用的逻辑联结词的定义和符号表示。

(1) 逻辑联结词否定——"$\neg$"

设 P 是一个命题,则 P 的否定是一个新的命题,记作 $\neg P$,读作非 P。其真值是这样定义的,若 P 的真值是 T,那么 $\neg P$ 的真值是 F;若 P 的真值是 F,则 $\neg P$ 的真值是 T。命题 P 与其否定 $\neg P$ 的关系归纳在表 1.2—1 中,它指明如何用运算对象的真值来决定一个应用运算符(即逻辑联结词)的命题的真值。这样的表称为真值表。利用真值表可以求出任一复合命题的真值,判断两个复合命题是否等价,某一个命题是否是某些命题的逻辑结果等,这种方法被称为真值表技术。

表 1.2—1 **逻辑联结词"$\neg$"的定义**

P	$\neg P$
F	T
T	F

或

P	$\neg P$
0	1
1	0

真值表的左边列出运算对象真值所有可能的组合，结果命题的真值在最右边的一列给出。

例 1.2—3

(a)令 P 表示所有的素数都是奇数。

于是$\neg P$ 表示并非所有的素数都是奇数。

注意，翻译成所有的素数都不是奇数是错误的。否定是对整个命题进行的。

(b)令 Q 表示大连是座海滨城市。

于是$\neg P$ 表示大连不是座海滨城市。

逻辑联结词否定是个一元运算符。

(2) 逻辑联结词合取——“$\wedge$”

设 P 是一个命题，Q 是一个命题，那么“P 合取 Q”是一个命题。记作 $P\wedge Q$，读作“P 与 Q”或“P 并且 Q”。它的真值是这样定义的。当且仅当 P 和 Q 的真值都为 T 时，$P\wedge Q$ 的真值才为 T，否则 $P\wedge Q$ 的真值为 F。

逻辑联结词“$\wedge$”的定义如表 1.2—2 所示。

表 1.2—2 **逻辑联结词“$\wedge$”的定义**

P	Q	$P\wedge Q$		P	Q	$P\wedge Q$
F	F	F		0	0	0
F	T	F	或	0	1	0
T	F	F		1	0	0
T	T	T		1	1	1

例 1.2—4 令 P 表示：今天有雨

令 Q 表示：王平是三好学生

于是 $P\wedge Q$ 表示：今天有雨并且王平是三好学生。

在自然语言中，上述命题是没有意义的，因为 P 和 Q 毫不相关。但是，在数理逻辑中，P 和 Q 的合取 $P\wedge Q$ 仍可成为一个新的命题。只要 P 和 Q 的真值给定，$P\wedge Q$ 的真值即可确定。

逻辑联结词“$\wedge$”是二元运算符。

(3) 逻辑联结词析取——“$\vee$”

设 P 是一个命题，Q 是一个命题，于是“P 析取 Q”是一个新的命题，记作 $P\vee Q$，读作“P 或 Q”。其真值是这样定义的，当且仅当 P 和 Q 的真值均为 F 时，$P\vee Q$ 的真值为 F，否则 $P\vee Q$ 的真值为 T。逻辑联结词“$\vee$”的真值表如表 1.2—3 所示。

表 1.2—3 **逻辑联结词“$\vee$”的定义**

P	Q	$P\vee Q$		P	Q	$P\vee Q$
F	F	F		0	0	0
F	T	T	或	0	1	1
T	F	T		1	0	1
T	T	T		1	1	1

从析取的定义不难看出，逻辑联结词“$\vee$”和自然汉语中的“或”的意义并不完全相同。因为汉语中的“或”可表示“排斥或”，也可表示“可兼或”，而逻辑联结词析取指的仅仅是“可兼或”，

并不表示其他意义的“或”。

例 1.2—5 今天晚七时大连电视台播放电视剧或排球比赛。

例 1.2—6 他可能是跳高或跳远冠军。

显然，例 1.2—5 中的“或”是“排斥或”，不能使用逻辑联结词析取；而例 1.2—6 中的“或”是“可兼或”，可以使用逻辑联结词析取。

逻辑联结词析取也是二元运算符。

(4) 逻辑联结词单条件——“$\rightarrow$”

设 P 是一个命题，Q 是一个命题，则“如果 P 则 Q”是一个新的命题，记作 $P\rightarrow Q$，读作“如果 P 则 Q”或“如果 P 那么 Q”。其中 P 被称为前件，Q 被称为后件。$P\rightarrow Q$ 的真值是这样定义的，当且仅当 $P\rightarrow Q$ 的前件 P 的真值为 T，后件 Q 的真值为 F 时，$P\rightarrow Q$ 的真值才为 F，否则，$P\rightarrow Q$ 的真值为 T。单条件逻辑联结词“$\rightarrow$”的真值表如表 1.2—4 所示。

表 1.2—4 逻辑联结词“$\rightarrow$”的定义

P	Q	$P\rightarrow Q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

或

P	Q	$P\rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

例 1.2—7

(a)P：天不下雨

Q：草木枯黄

于是 $P\rightarrow Q$：如果天不下雨，则草木枯黄。

(b)R：他学习用功

S：他成绩优秀

于是，$R\rightarrow S$：如果他学习用功，那么他成绩优秀。

(c)U：大海是蓝色的

V：他是大学教授

于是，$U\rightarrow V$：如果大海是蓝色的，那么他是大学教授。

此例中(a)和(b)是有因果关系的，而(c)在自然语言中是毫无道理，甚至是风马牛不相及的。但在命题演算中，一个单条件逻辑联结词的前件并不需要联系到后件，它给出的是一种实质性的因果关系，而不单单是形式上的因果关系。

逻辑联结词单条件是二元运算符。

(5) 逻辑联结词双条件——“$\rightleftharpoons$”

设 P 是一个命题，Q 是一个命题，于是，“P 等值于 Q”是一个新的命题，记作 $P\rightleftharpoons Q$，读作“P 当且仅当 Q”或“P 等值于 Q”。$P\rightleftharpoons Q$ 的真值是这样定义的，当且仅当 P 和 Q 有相同的真值时，$P\rightleftharpoons Q$ 的真值为 T，否则，$P\rightleftharpoons Q$ 的真值为 F。

$P\rightleftharpoons Q$ 的运算表如表 1.2—5 所示。

表 1.2—5 逻辑联结词“$\rightleftharpoons$”的定义

P	Q	$P\rightleftharpoons Q$		P	Q	$P\rightleftharpoons Q$
F	F	T		0	0	1
F	T	F	或	0	1	0
T	F	F		1	0	0
T	T	T		1	1	1

例 1.2—8

(a)程序是错的，当且仅当苹果是红的。

(b)电灯不亮，当且仅当灯泡发生故障或开关发生故障。

(c)他是三好学生，当且仅当他德、智、体全优。

令P：程序是错的

Q：苹果是红的

于是(a)可表示为 $P\rightleftharpoons Q$

令R：电灯不亮

S：灯泡发生故障

T：开关发生故障

于是(b)可表示成：$R\rightleftharpoons(S\vee T)$

令A：他是三好学生

B：他德育是优

C：他体育是优

D：他智育是优

于是(c)可表示为：$A\rightleftharpoons(B\wedge D\wedge C)$

从上面的例子中可以看出，等值式也和前面的逻辑联结词$\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$一样可以毫无因果关系，而其真值仅仅从等值的定义而确定。

逻辑联结词双条件也是个二元运算符。

(6) 逻辑联结词异或——“$\overline{\vee}$”

设P是一个命题，Q是一个命题，于是“P异或Q”是一个新的命题，记作$P\overline{\vee}Q$，读作“P异或Q”。其真值是这样定义的，当且仅当P和Q有不同的真值时，$P\overline{\vee}Q$的真值为T，否则$P\overline{\vee}Q$的真值为F。

$P\overline{\vee}Q$的运算表如表 1.2—6 所示。

表 1.2—6 逻辑联结词“$\overline{\vee}$”的定义

P	Q	$P\overline{\vee}Q$		P	Q	$P\overline{\vee}Q$
F	F	F		0	0	0
F	T	T	或	0	1	1
T	F	T		1	0	1
T	T	F		1	1	0

例 1.2－9

令P：大连电视台今晚八时播放电视剧

Q：大连电视台今晚八时播放球赛

于是 $P\overline{\vee}Q$ 表示大连电视台今晚八时播放电视剧或播放球赛。

从逻辑联结词"$\overline{\vee}$"的定义和逻辑联结词"$\rightleftharpoons$"的定义不难看出它们之间有如下的关系：

$$P\overline{\vee}Q\Leftrightarrow\neg(P\rightleftharpoons Q)$$

逻辑联结词$\overline{\vee}$可以用逻辑联结词$\rightleftharpoons$的否定来代替。

以上我们介绍了五个基本的逻辑联结词：$\neg,\wedge,\vee,\rightarrow,\rightleftharpoons$。它们运算的优先级如下：$\neg$优先级最高，其次是$\wedge,\vee,\rightarrow,\rightleftharpoons$。

习题 1－1

1. 给出下列命题的否定命题

(a)大连的每条街道都临海。

(b)每一个素数都是奇数。

2. 对下述命题用中文写出语句

(a)$(\neg P\wedge R)\rightleftharpoons Q$

(b)$Q\wedge R$

3. 给定命题 $P\rightarrow Q$，我们把 $Q\rightarrow P$，$\neg P\rightarrow\neg Q$，$\neg Q\rightarrow\neg P$ 分别叫作命题 $P\rightarrow Q$ 的逆命题，反命题，逆反命题。

试给出下列命题的逆命题、反命题和逆反命题。

(a)如果天不下雨，我将去公园。

(b)仅当你去我才逗留。

(c)如果 n 是大于 2 的正整数，那么方程 $x^n+y^n=z^n$ 无正整数解。

(d)如果我不获得更多的帮助，则我不能完成这项任务。

4. 给 P 和 Q 指派真值 T，给 R 和 S 指派真值 F，求出下列命题的真值。

(a)$(\neg(P\wedge Q\vee\neg R)\vee((Q\rightleftharpoons\neg P)\rightarrow(R\vee\neg S)))$

(b)$Q\wedge(P\rightarrow Q)\rightarrow P$

(c)$(P\vee(Q\rightarrow(R\wedge\neg P)))\rightleftharpoons(Q\vee\neg S)$

(d)$(P\rightleftharpoons R)\wedge(\neg Q\rightarrow S)$

5. 构成下列公式的真值表：

(a)$Q\wedge(P\rightarrow Q)\rightarrow P$

(b)$\neg(P\vee Q\wedge R)\rightleftharpoons(P\vee Q)\wedge(P\vee R)$

(c)$(P\vee Q\rightarrow Q\wedge P)\rightarrow P\wedge\neg R$

(d)$((\neg P\rightarrow P\wedge\neg Q)\rightarrow R)\wedge Q\vee\neg R$

6. 使用真值表证明如果 $P\rightleftharpoons Q$ 为 T，那末 $P\rightarrow Q$ 和 $Q\rightarrow P$ 都为 T，反之亦然。

7. 使用真值表证明对于 P 和 Q 的所有值，$P\rightarrow Q$ 与$\neg P\vee Q$ 有同样的真值。

8. 一个有两个运算对象的逻辑运算符，如果颠倒其运算对象的次序，产生一逻辑等价命题，则称此逻辑运算符是可交换的。

(a)确定所给出的逻辑运算符哪些是可交换的：$\wedge,\vee,\rightarrow,\rightleftharpoons$