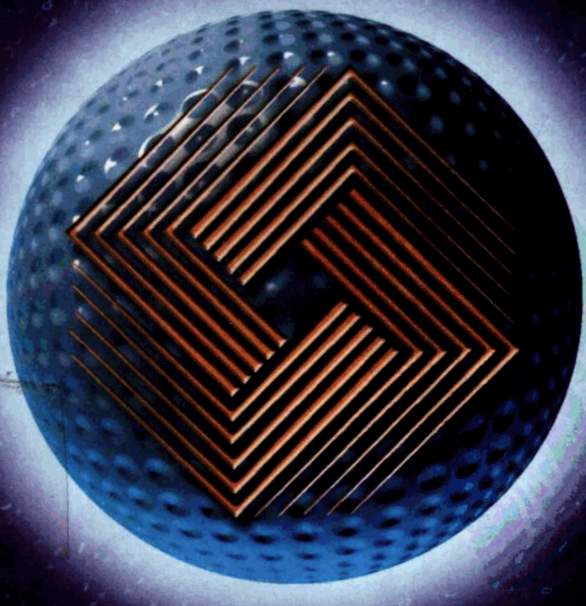
概率统计

许小平 孙向阳 谢兴武 编



中国地质大学出版社

概 率 统 计

许小平 孙向阳 谢兴武 编

中国地质大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率统计/许小平等编．—武汉：中国地质大学出版社，1994.10

ISBN 7-5625-1031-8

Ⅰ．概…

Ⅱ．许…

Ⅲ．①概率论②数理统计

Ⅳ．O211

出　　版	中国地质大学出版社(武汉市喻家山·邮政编码 430074)
责任编辑	陈炳南　方菊　责任校对　熊华珍
印　　刷	武汉皇冠彩印厂
发　　行	湖北省新华书店

开本 787×1092 1/32　印张 8.25　字数 178 千字　插页 2

1996 年 2 月第 1 版　1999 年 2 月第 2 次印刷　印数 4601—8600 册

定价：9.50 元

内 容 提 要

全书共9章，第1～5章为概率论基础，包括：随机事件及概率、随机变量及函数的概率分布、随机变量的数字特征、大数定律及中心极限定理；第6～9章为数理统计的初步知识，包括统计中的基本概念、参数估计及假设检验、方差分析及一元线性回归分析．为了便于师生应用，每章之后配备了一定数量的习题，书末给出了习题答案．

本书适合于高等学校有关专业作教材，也可供有关人员参考．

前　　言

本书是按照国家教委颁发的《高等工科学校概率论与数理统计课程教学基本要求》编写的．可作为各类工科院校，特别是地质院校本、专科各专业的试用教材，也可供一般工程技术人员参考．

全书共九章，第一、二、四、五章由孙向阳（中国地质大学（北京）数学教研室）编写；第三、六、七章由谢兴武（中国地质大学（武汉）数学教研室）编写；第八、九章由许小平（中国地质大学（武汉）数学教研室）编写．全书由许小平统稿，许伯济教授主审．

由于水平有限，书中难免存在错误和不足之处，恳请读者批评指正．

编　者

1994.12.

目　　录

第一章　随机事件及其概率

概率论是研究随机现象的规律性的数学学科.

§1-1　随机试验和随机事件

一、随机现象和随机试验

在自然界和社会生活中,有许多现象在一定条件下,我们可以预言它们是否发生、出现.例如:“同性电荷相互排斥”、“在标准大气压下,水温升到100℃时,水就沸腾”都一定会发生;而“异性电荷相互排斥”、“在标准大气压下,低于100℃的水沸腾”则不会发生.我们称这类现象为确定性现象.还有一类现象,在一定条件下,可能出现这种结果,也可能出现那种结果,而事先不能预言确切的结果.最简单的一个例子是抛掷一枚硬币,在规定“正面”和“反面”后,可能出现“正面朝上”,也可能出现“反面朝上”.在硬币没抛掷之前我们不能断言是哪一种结果.但是,如果反复地抛许多次,那么,只要硬币是均匀的,“正面朝上”出现的次数与“反面朝上”出现的次数大致是差不多的.历史上有人曾做过成千上万次的试验,结果表明:抛掷的次数越多,“正面朝上”的次数与抛掷的总数之比(频率)就越接近$\frac{1}{2}$.这种规律性就是所谓的“统计规律性”.我们把“在个别试验中呈现不确定性,而在大量重复试验中其结果又具有统计规律性的现象”称为随机现象.

例 1 射手在一次射击后的结果可能出现"中"与"不中"两种情况.如果用中了几环来衡量射击的结果,则可能是在0到10环之中的任意一种.虽然每次射击前不能确定是什么结果,但是大量反复射击的结果是有一定规律性的,这种规律性反映了射手的射击水平.

例 2 设10件产品中有3件次品,从中任取一件,那么,可能"取到正品",也可能"取到次品".当然,从常识我们知道"取到正品"的可能性比"取到次品"的可能性大.然而,如果一次任取两件,会出现什么结果?每种结果出现的可能性有什么规律?这就需要对随机现象进行研究.

对随机现象进行的试验或观测,称为随机试验,简称"试验",通常用字母 E 来表示.它应具有下列特点:

(1)可以在相同条件下重复地进行;

(2)每次试验的可能结果不只一个,但能事先明确所有可能的结果,并且每次试验仅有其中一个结果出现;

(3)进行一次试验之前,不能断言哪个结果会出现.

例如,抛一枚硬币,观察其正反面出现的情况;掷一颗骰子,观察其点数出现的情况;记录电话交换台一分钟内收到的呼唤次数;测定一批铜矿石样品中铜的百分比含量;测定一批相同型号的电子元件的使用寿命;观测射击时弹着点在圆靶上的位置;……都是随机试验.

进行随机试验的目的是要通过对试验的各种结果出现的可能性进行分析,从而找出随机现象的规律.

二、样本空间

随机试验 E 的所有可能出现的结果所构成的集合称为 E 的样本空间,通常记为 Ω.

样本空间的元素称为样本点.

例 3 试验 E_1：抛一枚硬币，观察其正反面出现的情况.若令 ω_1 表示“正面朝上”，ω_2 表示“反面朝上”，则 E_1 的样本空间 Ω 由 ω_1 和 ω_2 两个样本点构成，记作 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$. 也可简单地记为 $\Omega=\{$正，反$\}$.

例 4 试验 E_2：抛两枚硬币，观察正反面出现的情况. E_2 的样本空间 $\Omega=\{$正正，正反，反正，反反$\}$.

例 5 试验 E_3：抛两枚硬币，观察“正面朝上”的硬币个数. E_3 的样本空间 $\Omega=\{0,1,2\}$.

例 6 试验 E_4：掷一颗骰子，观察出现的点数. E_4 的样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$.

例 7 试验 E_5：记录电话交换台一分钟内收到的呼唤次数. E_5 的样本空间 $\Omega=\{0,1,2,\cdots\}$.

例 8 试验 E_6：测定一批铜矿石样品中铜的百分比含量.若令 ω_α 表示含量为 $\alpha\%$，则 E_6 的样本空间 $\Omega=\{\omega_\alpha: 0\leqslant\alpha\leqslant 100\}$.

例 9 试验 E_7：测定一批电子元件的使用寿命. E_7 的样本空间 $\Omega=\{t\,|\,t\geqslant 0\}$.

例 10 试验 E_8：观测射击时弹着点在圆靶上的位置. E_8 的样本空间 $\Omega=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant a^2, a$ 为圆靶的半径$\}$.

三、随机事件

样本空间的一个子集称为一个随机事件，简称事件，通常用大写字母 A、B、C、$\cdots$表示事件.

例如，在 E_4 中，令 A 表示“出现的点数为偶数”，则 A 是 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$的子集，它由样本点$\{2,4,6\}$构成，记作 $A=\{2,4,6\}$.

在一次试验中，若某事件 A 中至少有一个样本点出现了，则称事件 A 发生了.

我们称试验中必定要发生的事件为必然事件，不可能发生的事件为不可能事件.

在每次试验中，样本空间 Ω 中必定有一个样本点会出现，因此又把样本空间称为必然事件. 空集 $\varnothing$ 是样本空间 Ω 的一个特殊的子集，也可作为一个事件. 但由于空集不含样本空间 Ω 中的任何元素，在每次试验中 $\varnothing$ 都不会发生，因此又称之为不可能事件. 把必然事件和不可能事件也算作随机事件，是为了事件运算方便.

由样本空间的单个元素构成的子集，即样本点，又称为基本事件.

§1-2 事件间的关系和事件的运算

样本空间和事件都是集合，因此事件间的关系、事件的运算都与集合的内容密切相关.

设随机试验 E 的样本空间为 Ω，A、B、C 和 $A_i(i=1,2,3\cdots)$ 为 Ω 的子集.

1. 事件的包含和相等

事件 B 包含事件 A 的含义是：在一次试验中，若 A 发生则必有 B 发生. 记为 $A\subset B$.

例如，在 E_4 中，A 表示“出现的点数为偶数”，B 表示“出现的点数大于 1”. $A=\{2,4,6\}$，$B=\{2,3,4,5,6\}$，则 $A\subset B$，又称 A 是 B 的子集.

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与事件 B 相等，记为 $A=B$.

2. 事件的和

在一次试验中，“两个事件 A、B 至少有一个发生”是一个事件，称为事件 A 与 B 的和，记作 $A\cup B$，或者 $A+B$.

类似地，“n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生”，称为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和，记作 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$.“可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 中至少有一个发生”，称为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的和，记作 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

例如，在 E_4 中，令 A 表示掷一颗骰子“出现的点数为偶数”，C 表示“出现的点数不大于 1”，A_i 表示“出现的点数为 i”$(i=1,2,3,4,5,6)$，那么

$A=\{2,4,6\},C=\{1\},A\cup C=\{1,2,4,6\}$,

$\bigcup\limits_{i=1}^{6}A_i=\{1,2,3,4,5,6\}=\Omega$.

又如，在 E_5 中，令 A_i 表示“一分钟内收到的呼唤次数为 i 次”，$i=0,1,2,\cdots$，A 表示“呼唤次数大于 100 次”，B 表示“呼唤次数小于 150 次”. 那么

$A=\bigcup\limits_{i=101}^{\infty}A_i,B=\bigcup\limits_{i=0}^{149}A_i$.

3. 事件的积

在一次试验中，“两个事件 A、B 同时发生”也是一个事件，称为事件 A 与 B 的积，记作 $A\cap B$ 或者 AB.

$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 表示“n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生”.

$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 表示“可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 同时发生”.

例如，在 E_5 中，$A=\bigcup\limits_{i=101}^{\infty}A_i,B=\bigcup\limits_{i=0}^{149}A_i$，$A\cap B$ 表示“一分钟

内呼唤次数大于 100 次且小于 150 次"，即有 $A \cap B = \bigcup_{i=101}^{149} A_i$.

又如，在 E_4 中，若 $A=\{2,4,6\}$，$B=\{2,3,4,5,6\}$，$C=\{1\}$，则 $A \cap B$ 表示"出现的点数为大于 1 的偶数"．由于 $A \subset B$，所以 $A \cap B = A$．而 $A \cap C$ 表示"出现的点数为不大于 1 的偶数"，这是不可能发生的，故 $A \cap C = \varnothing$.

4．互不相容的事件

若 $A \cap B = \varnothing$，则称事件 A 和事件 B 为互不相容的．互不相容的事件在一次试验中不能同时发生.

例如，在前面的 E_1 中，A 与 C 为互不相容的事件.

5．事件的差

在一次试验中，"事件 A 发生而事件 B 不发生"这一事件称为事件 A 与事件 B 的差，记作 $A-B$.

6．对立事件

"A 不发生"这一事件称为事件 A 的对立事件，记作 $\overline{A}$．由事件差的定义，$\overline{A}=\Omega-A$.

由 $\overline{A}$ 的定义，$\overline{(\overline{A})}=A$，即 A 和 $\overline{A}$ 互为对立事件．在一次试验中，A 与 $\overline{A}$ 至少有一个会发生，但 A 与 $\overline{A}$ 不会同时发生，即 $A \cup \overline{A}=\Omega$，$A \cap \overline{A}=\varnothing$．事件 $A-B$ 也可记为 $A\overline{B}$.

事件的关系和事件的运算可以用文氏图（图 1-1）直观地表示.

事件的关系和运算与集合论中的内容对照如表 1-1.

7．事件运算的主要性质

(1)交换律　$A \cup B = B \cup A$，$AB=BA$；

(2)结合律　$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$，

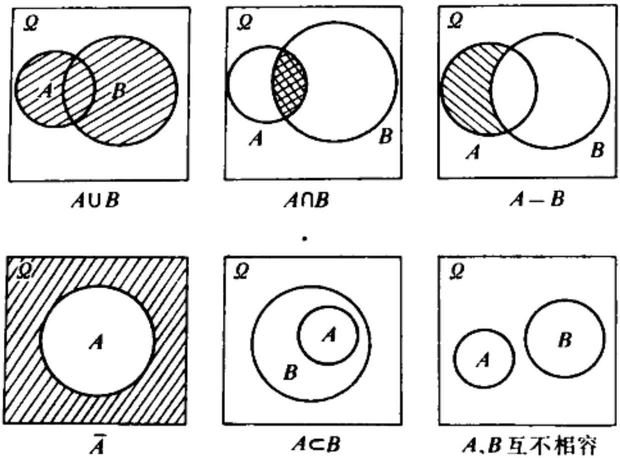


图 1-1

表 1-1

符号	概　率　论	集　合　论
Ω	样本空间、必然事件	空间(全集)
$\varnothing$	不可能事件	空集
ω	样本点(基本事件)	元素
A	事件	子集
$\overline{A}$	A 的对立事件	A 的余集
$A\subset B$	事件 A 发生必有事件 B 发生	A 是 B 的子集
$A=B$	事件 A 与事件 B 相等	A 与 B 相等
$A\cup B$	事件“A 与 B 至少有一个发生”	A 与 B 的和集
$A\cap B$	事件“A 与 B 同时发生”	A 与 B 的交集
$A-B$	事件“A 发生而 B 不发生”	A 与 B 的差集
$AB=\varnothing$	事件 A 和事件 B 互不相容	A 与 B 没有公共元素

$(AB)C=A(BC)$；

(3)分配律　$(A\cup B)C=AC\cup BC$；

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

或 $AB\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$；

(4)吸收律　$(A\cup B)A=A, AB\cup A=A$；

(5)对偶律　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}, \overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

下面几个等式也是经常用的：

$A\cup A=A, AA=A, A\cup\Omega=\Omega, A\Omega=A$.

$A\cup\varnothing=A, A\varnothing=\varnothing, A\cup\overline{A}=\Omega, A\overline{A}=\varnothing$.

利用事件的关系、事件的运算及其性质，将复杂的事件用已知的简单事件表示，在处理问题时会很方便.

例 1　一大批产品中有 5 件次品，若从中依次任取 3 件，令 A_i 表示"取到的第 i 件为正品"，$i=1,2,3$. 试用 A_1, A_2, A_3 表示下列事件：

(1)"取到的 3 件中至少有一件为正品"，记为 A.

(2)"取到的 3 件均为次品"，记为 B.

(3)"取到的 3 件恰好有一件为正品"，记为 C.

(4)"取到的 3 件至多有一件为正品"，记为 D.

解　$\overline{A}_i$ 表示 A_i 的对立事件"取到的第 i 件为次品"，$i=1,2,3$.

(1)由事件和的定义　$A=A_1\cup A_2\cup A_3$.

(2)由事件积的定义　$B=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$.

(3)$C=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$.

(4)$D=B\cup C=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$.

例 2　设 A_i 表示"第 i 次射击命中目标"，$i=1,2,3$. 用语言表述下列事件：(1)$\overline{A}_1\cup\overline{A}_2\cup\overline{A}_3$，(2)$\overline{A_1\cup A_2}$，(3)$\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$.

解 (1)$\overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cup \overline{A}_3$ 表示“3 次射击至少有 1 次没命中目标”.

(2)$\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A}_1 \overline{A}_2$ 表示“第 1 次和第 2 次均未命中目标”.

(3)$\overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3$ 表示“直到第 3 次才命中目标”.

例 3 有两个系统,系统 Ⅰ 是由 3 个元件串联而成,系统 Ⅱ 是由 3 个元件并联而成. 若令 A_i 表示“第 i 个元件工作正常”,$i=1,2,3$,B 表示“系统 Ⅰ 能正常工作”,C 表示“系统 Ⅱ 能正常工作”,试用 A_1,A_2,A_3 表示事件 B 和事件 C.

解 “系统 Ⅰ 能正常工作”要求 A_1,A_2,A_3 同时发生,故有 $B=A_1A_2A_3$.

“系统 Ⅱ 能正常工作”只要求 A_1,A_2,A_3 至少有一个发生,故有 $C=A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

§1-3 概率的定义

从 17 世纪法国的帕斯卡和费尔马讨论“分赌金”问题开始,概率概念的完整经历了几个发展阶段:古典概型、几何概型、统计概率和概率的公理化体系的建立.

简单地说,对于一个随机事件 A,用一个数 $P(A)$表示事件 A 发生的可能性的大小,这个数称为事件 A 的概率.

$P(A)$作为事件 A 发生的可能性大小的一种度量,它具有什么基本特性呢? 下面通过对古典概型、几何概型、统计概率的讨论,给出概率的公理化结构.

一、古典概型

古典概型所研究的随机试验满足:

(1)试验的样本空间只有有限个样本点;