

数学模式 建构方法论

吴丹怀 邓 玫 编著

學苑出版社

数学模式建构方法论

吴丹怀 邓 玫 编著

學苑出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学模式建构方法论/吴丹怀, 邓玫 编著. —北京:
学苑出版社, 2005. 8

ISBN 7-5077-2557-X

I. 数… II. ①吴… ②邓… III. 数学模型 IV. O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 052541 号

责任编辑: 李佩茛

出版发行: 学苑出版社

社 址: 北京市丰台区南方庄 2 号院 1 号楼

邮政编码: 100078

网 址: www.book001.com

电子信箱: xueyuan@public.bta.net.cn

销售电话: 010-67675512、67602949、67678944

经 销: 新华书店

印 刷 厂: 高碑店市鑫宏源印刷厂

开本尺寸: 850×1168 1/32

印 张: 9

字 数: 217 千字

版 次: 2005 年 8 月北京第 1 版

印 次: 2005 年 8 月北京第 1 次印刷

定 价: 16.00 元

序

“数学是研究模式的科学”，这是近数十年来数学界人士逐步达到的共识。

从 20 世纪 30 年代后，法国兴起的布尔巴基（Bourbaki）学派，在充分肯定了数学公理化思想重要性的基础上，倡导和发展了数学结构主义观点，并在实际上用结构观点分析总结且出版了大量分支学科的专著。这样就促使人们普遍地认识到，数学主要是以量化对象的“关系结构”作为研究内容的科学。

因为数学中各种关系结构的研究，总是表现为规范化的演绎结构形式，它们必然具有逻辑精确性和应用上的普适性；所以就理所当然地被称之为“模式”（pattern）了。20 世纪 50 年代前英国分析学大师哈代（G. H. Hardy）甚至还说过：“数学家理应是数学模式的创制者。”

我们认为，现代高等数学教育的主要任务，就是要让受教育者能够积极主动学到“应用数学模式”、“分析数学模式”、“创制数学模式”乃至“鉴赏数学模式”的能力和素质。这里所说的能力和素质自然会有不同层次与程度上的各别要求。

由上所述，可知数学模式建构的思想与方法论，理应成为大学数学专业师生们必须共同关注的教学题材。事实上，学习这种题材也正是培养学生创新能力不可缺少的环节。

本书作者吴丹怀，正是根据上述认识为基础，多年来潜心研究“模式建构方法论”，才写出了这一部能应用于大学数学教学的力作。

可以看出，此书的特点是：题材范围广阔，内容简明扼要，文笔流畅而立论清晰，还含有不少作者个人的心得体会。特别是，他对我与弟子们 20 世纪 80 年代创始的“数学抽象度分析法”，加进了他自己的新扩充和研究结果。这对应用抽象度分析法于教学研究来说，无疑将增加一份积极作用。

显然，此书受篇幅限制，对有些专题均未能深入展开，只能说是引导读者“登堂”而未必“入室”。如欲登堂入室，则必须要求读者自找专著去读。

我认为此书以较小的篇幅，向读者展示了大量数学结构模式的美丽图景，并揭示了一系列典型的建构思想方法，这些无疑是有很大启发性的。祝愿读者将从阅读此书过程中，获得数学美的享受！

最后，还希望能从书中发现“疑问”的个别读者，将直接与书的作者讨论为幸。

徐利治

2002 年 12 月 18 日于北京寓所

前 言

在许多数学文献中对公理方法和结构方法已作了不少介绍，其中还涉及一些深刻的数学哲学问题；近二十年来，我国学者又提出了抽象度分析方法和数学模式建构学说，并有若干著述。本书试图用模式建构观点对这三种方法进行集中阐述，重点探讨如何把它们应用于大学数学教学，故读者对象以大学数学专业学生和教师为主。

从教学实用目的出发，本书对这三种方法的介绍不是面面俱到的：对公理方法重点介绍实体公理化和初等形式公理化，着重于怎样把一门学科的内容重新整理成井井有条的逻辑体系；对结构方法，着重于如何运用数学结构思想方法分析和处理大学基础课程中的有关内容；至于抽象度分析方法，它本身尚处在初创阶段，加上资料不全，只作了些探索性介绍。然而，这样取材并不妨碍编写本书的目的，即希望读者能从书中得到启示，学会用这些方法来深入分析、研究所学各门课程的内容，也只有在此过程中才能深刻体会和熟练掌握这些方法的要领。特别是对抽象度分析方法，需要广大青年数学家作深入研究。所以，本书的主要作用是抛砖引玉。

为使叙述紧凑和节省篇幅，本书中作为例子列举的许多数学命题的证明大都略去，但指明了参考书。

本书错误之处难免，恳请读者指正。

本书幸蒙徐利治教授审阅并作序，朱梧楹、邹道文、罗见

今、孔国平、俞正兴、杨楼锐等专家也给予了许多帮助，汤彬如教授对全书清样作最后审校，特别是学苑出版社孟白社长和九三学社南昌市委关德华主委等领导大力支持出版，学苑出版社李佩荒编辑和刘丰编辑在出版过程中花费了大量精力，在此一并表示衷心感谢。

吴丹怀 邓 玫

2004 年 6 月于南昌华东交通大学

目 录

绪论 模式建构方法在现代数学教育中的作用	1
第 1 章 公理方法	5
§ 1.1 公理方法和公理系统	5
1° 数学对象、概念和命题	5
2° 公理方法	7
3° 初始概念和公理、导出概念和定理	8
4° 推理规则	10
5° 公理系统及其实现	14
§ 1.2 公理方法的基本类型	16
1° 实体化公理方法	16
2° 初等形式化公理方法	17
3° 完全形式化公理方法	19
§ 1.3 实体化公理方法的应用	20
1° 欧几里德《几何原本》中的实体化公理 系统(E 系统)	20
2° 《几何原本》的价值、缺陷和第 5 公设问题	21
3° 运用实体化公理方法需要注意的问题	23
4° 牛顿经典力学的公理化	25
§ 1.4 初等形式化公理方法的应用	27
1° 希尔伯特《几何基础》中的欧氏几何公理 系统(EH 系统)	27
2° EH 系统的展开	33
3° 公理方法的沟通功能	50

4° EH 系统的代数实型	53
§ 1.5 几个常见的公理系统	58
1° 非欧几何公理系统	58
2° 射影几何公理系统	66
3° 自然数公理系统	69
4° 悖论与公理化集合论	72
§ 1.6 公理系统的逻辑准则	78
1° 三条逻辑准则	79
2° 验证公理系统符合逻辑准则的方法与哥德尔 不完备性定理	81
§ 1.7 完全形式公理化方法的应用	90
1° 完全形式公理化的基本原则	90
2° ZFC 集合论公理系统的完全形式化	94
§ 1.8 公理方法的发展史与功能	99
1° 公理方法发展史述评	99
2° 公理方法的功能和局限性	103
第 2 章 数学结构基本理论	105
§ 2.1 数学结构理论与方法概述	105
1° 结构理论与方法	105
2° 集合论与数学结构	109
3° 数学结构理论与方法发展史述评	113
§ 2.2 赋构及结构的分类	116
1° 赋构操作原则	116
2° 结构的分类	119
§ 2.3 初始结构	120
1° 序关系和初始序结构	121
2° 代数运算和初始代数结构	121

3° 拓扑空间和初始拓扑结构	122
4° 可测性和初始测度结构	129
§ 2.4 派生结构	131
1° 序结构的派生	131
2° 代数结构的派生	135
3° 拓扑结构的派生	146
4° 测度结构的派生	162
§ 2.5 结构生成的一般特点 其他生成结构	165
1° 结构公理之间的关系	165
2° 交叉公理与交叉结构	167
3° 多重结构 同一结构生成方式的多样性	172
4° 结构公理和承载集的关系	175
5° 子结构	176
6° 积结构	177
7° 商结构	179
8° 混合结构	180
§ 2.6 结构映射	181
1° 结构关系和结构映射	181
2° 同态与同构	184
3° 映射集合的结构	187
4° 一致性结构	189
 第 3 章 结构分析方法的应用	 192
§ 3.1 同态与同构方法的应用	192
1° 复数集的结构分析及其应用	192
2° 从测度观点研究概率论	197
3° 抽象群的表示	199
§ 3.2 变换群的应用	201
1° 关于代数方程根式求解的伽罗瓦理论	202

2° 几何学按变换群分类	208
§ 3.3 数系的扩张	213
1° 一元数系扩张的古典方式及其局限性	214
2° 一元数系扩张的结构方式与数系的结构	216
3° 实数系(数直线)的结构	221
4° 多元数系的构筑	223
5° 广义数简述	229
§ 3.4 关于微积分问题的结构思考	231
1° 实函数向复函数的推广及其基本微积分运算 的推广	232
2° 黎曼积分向勒贝格积分推广	236
§ 3.5 泛函分析中的抽象空间理论	241
1° 抽象空间	242
2° 算子和算子空间	248
第 4 章 抽象度分析方法	252
§ 4.1 数学抽象与模式建构	252
1° 数学抽象的特点与基本原则	252
2° 抽象过程与抽象物的层次性	254
3° 数学抽象的方式	256
§ 4.2 抽象链与抽象度	261
1° 抽象偏序与抽象链	261
2° 抽象度的各种指标及其分析	262
3° 抽象度分析表制作举例	266
§ 4.3 抽象度分析方法的应用	268
1° 选择抽象路径与调整抽象链	269
2° 抽象方式的多重性	271
3° 抽象度分析方法在教学设计方面的应用	274

绪论：模式建构方法在现代 数学教育中的作用

近几十年来，我国数学教育界根据国内外研究数学方法论及其在数学教育中应用的成果、经验和教训，日益重视数学方法论在数学教学中的推广应用。这其中应包括两个方面：首先是强调过去在教学中一直被忽视的非演绎逻辑方法的重要作用，把它们应用于实际教学；另一方面，对演绎逻辑方法又必须进一步使之明确化规范化，指导学生在更高层次上自觉地有效地运用。这两方面互相补充，不可缺一。本书专门讨论后一方面的问题。

按照现代数学结构观点，数学中的概念、命题都是一类逻辑化的抽象模式，它们主要是用演绎方法逐步抽象、构造而成的。在整个数学发展过程中，逐渐形成了模式建构方法论体系，包括公理方法、结构方法和抽象度分析方法。公理方法经历了两千多年的发展，成为严格地建立数学理论的基本方法。结构方法形成于 20 世纪 30 年代，对现代数学的发展起了重大作用。抽象度分析方法则是在 20 世纪 80 年代由我国数学家徐利治教授提出的，正在逐渐走向成熟、完善。

公理方法的基本内容是：对一门已经积累了丰富的实践和理论知识分支学科，按逻辑规范化要求进行整理，把它重新建成逻辑严密的理论体系。因而，公理方法是一门数学发展到一定程度所必须采用的方法，“它能刻画不同理论前提的特性，说明深奥数学的可理解性。”^①传授这种方法，不仅有助于学生清晰

① 林夏水，布尔巴基学派的结构思想，自然辩证法研究，1991 年第 4 期。

地掌握本门课程的主要内容,而且能锻炼他们的严谨思维能力。

公理系统,即使是形式化甚至符号化的公理系统,在实践中也只是针对一个或少数几个数学分支专门建立的,不能满足现代数学各分支互相沟通、重新组合的新要求。然而,形式公理化思想已具有这样一种潜力:它能“教我们去寻找深藏于不同理论之间的共同思想,并且把它抽象出来。”^①这一任务则是由结构方法来继续承担的,结构方法是在对诸多分支分别进行(全局的或局部的)公理化的基础上,从各个公理系统里内容各异的概念和命题中,提炼出能适用于各分支的统一的数学结构概念和公理,并对各分支的组建特点进行比较式研究。“通过数学结构将现代数学的大部分组织成为一个庞大的、井井有条的体系。而正是这个体系,构成了现代数学的核心。”^②可见,公理方法和结构方法是一脉相承的,但其功能又各有侧重:前者着重于从纵向指导学生对各门课程分别进行梳理、浓缩;后者则帮助他们进一步从横向对各门课程的主要内容进行比较、沟通。

抽象度分析方法是针对数学概念或命题的抽象性特点,揭示相关的诸抽象物之间的层次关系,并用一套数量指标对这些关系进行分析比较。这一方法有助于师生把握数学理论中的层次结构和理论建造过程中各步骤的难易程度,对进行数学教学设计很有参考价值。如果说,公理方法和结构方法只是定性地揭示了各个概念和命题之间的关系,那么,抽象度分析方法就力图进一步量化地确定这种关系。所以,这三种方法组成了对已有数学知识进行回顾、概括、浓缩的逻辑整理方法论体系,称为模式建构方法论体系。它对探索、发展新数学理论也十分重要,对数学以外

① 林夏水,布尔巴基学派的结构思想,自然辩证法研究,1991年第4期。

② 胡作玄,布尔巴基学派的兴衰——现代数学发展的一条主线(引言),知识出版社,1984年版。

的其他科学理论的建造亦有借鉴作用。

由此看来，模式建构方法论是在数学教学中必然要运用的方法，事实上每个大学生在学习数学时都在或多或少地运用这些方法，只是他们往往对这些方法本身缺乏清晰的认识。另一方面，根据已有的经验教训，在具体教学实践中又必须把握好讲授这些方法的分寸。

首先，因为此类方法比较抽象，不是任何程度的学生都能掌握的。20 世纪 60 年代欧美国家曾兴起过“新数学运动”，对小学生就讲授抽象集合概念，对中学生则利用结构观点编写教材，结果在教学中困难重重。这一运动失败的原因，不在结构方法本身，而在于教学对象选择不当。事实是，能较顺利地学习和使用这一类方法的学生，必须是在熟悉了大量较初等的直观的数学内容的基础上，具有一定的现代数学素养和较强的抽象思维能力。这不仅对中小学生，就是对初进大学的一、二年级学生一般也难以办到。只有到了大学三、四年级，学生们才能较好地具备上述条件，这时可以而且必须在教学中较多地运用这些方法。

其次，即使在大学高年级教授这些方法时，也存在一个内容层次问题。这是指如下情况：公理方法可分为实体化、初等形式化和完全形式化三个层次。前两者使用本学科原来的术语，比较贴近所讨论的数学对象，学生较易理解；后者则对任何学科进行公理化时都用统一的纯粹的符号语言，运用数理逻辑把推理过程演算化，比较抽象难懂。所以，对大学生最好还是以讲授初等形式化的公理方法为主。对结构分析方法也有类似情况：它统一运用集合语言概括分属于各门学科的不同对象，其抽象程度大体上与初等形式公理化相当；20 世纪中期，在结构理论上又发展起更加形式化抽象化的“范畴”与“函子”理论，范畴与函子就越来越成为表述许多数学理论的方便语言。然而，这些理论过于抽象，它们“一般不能象数学结构的观念那样，产生积极

的结果”^①，所以还是采用比较贴近于大学课程的内容和语言的结构理论为妥。总之，在数学教学中对数学方法的选择，并非越抽象越好、越概括越好，而应当适度。

最后需要指出，学习模式建构方法论，用于指导数学教学与研究，重在“指导”，应当掌握这些方法的要领，在处理具体数学问题时，既不能违背其基本原则，又往往需要灵活运用。所以，读者阅读本书，要在了解这些方法的基本内容的基础上，着重从举例中体验、品味如何运用这些方法来处理具体问题。

^① 胡作玄，布尔巴基学派的兴衰——现代数学发展的一条主线，知识出版社，1984年版，第124页。

第 1 章 公理方法

本章首先在 § 1.1 和 § 1.2 中介绍公理方法的基本内容和三种基本类型,接着在以下各节分别介绍它们的应用,通过大量典型实例帮助读者体验怎样运用公理方法,并在 § 1.6 中讨论了公理系统的检验和评价问题,最后在 § 1.8 中通过叙述公理方法发展简史,总结性地评论公理方法的功能和局限性。

§ 1.1 公理方法和公理系统

公理方法是建造数学理论的基本方法。虽然在一门数学的发展过程(积累素材的过程)中,需要大量运用猜想、类比、归纳等非逻辑方法或非演绎的逻辑方法,即波利亚称之为合情推理和发散思维的方式^①,但最后对已积累的素材进行整理,使之形成严密的系统的理论,则必须依赖于以演绎推理为核心的公理方法。

1° 数学对象、概念和命题

任何一门科学都是研究客观事物某一方面的性质和规律的,数学也不例外,它首先研究客观事物的数量特征和空间形式,但这不等于数学的研究对象就是客观事物本身。最初、最简单的数学对象是自然数和平面图形。例如,两棵树和三棵树合有五棵树、两头牛和三头牛合有五头牛,满月、车轮都是圆形的,但数学不是研究树、牛、月、轮这些事物本身,而是一开始就从其中先抽象出自然数 2、3、5 和圆这些思维产物,称之为数学模式,然

^① 徐利治,漫谈数学的学习和研究方法,大连理工大学出版社,1989 年版。

后,脱离具体事物来专门研究这些模式。数学概念、命题以及由它们组建成的完整理论都是模式。数学模式首先是人们概括、提炼出现实世界的数量特征和空间形式的思维产物,并且用特定的语言符号把它们表达出来;其次,在这些与客观事物较接近的模式的基础上,数学家还进一步用思维方式创造出许多高层次的抽象模式。例如,在函数基础上抽象出泛函,进而算子,在三维空间基础上定义 $n(\geq 3)$ 维以上空间,等等,这些模式更远离客观事物了。可见,数学模式具有层次性。所以,数学研究与物理学、化学等各部门自然科学研究的对象和方式都不同,虽然后者也需要建立模式并运用逻辑推理方式进行研究,但是:第一,这种研究始终不能脱离具体事物,例如研究力的作用一定要明确谁是施力者,谁是受力者。也就是说,这类科学的研究对象是客观事物本身,只不过不同学科对客观事物所研究的角度不同;第二,正因为如此,它们研究的主要方式是直接对客观事物进行观察和实验。然而,数学研究的对象是超脱于客观事物的抽象模式,主要研究方式则是进行模式的纯逻辑建造。关于数学模式和模式建构的特点将在 § 4.1-1° 作进一步论述。

数学概念是对一类有共同属性的数学对象的认定,这种认定是一义的,亦即每个概念必须用一个专有名词来表达,进而用肯定的方式和精练的语句明确其内涵,即该类对象的共同属性。这种表达称为定义。例如,圆周的定义就刻画了这样一类平面图形的共同属性:其上任意一点到某一定点(圆心)的距离都等于常量(半径);圆周的切线则认定是具有“与圆周有且只有一个公共点”这一属性的直线。所以,概念的内涵是对其质的方面的规定。对概念在量方面的规定称为其外延,它恰好包括具有这些基本属性的全体数学对象:凡具有这些属性的对象都可以而且应当用这个概念来表达,凡不具有或不完全具有这些属性的对象都不能用这个概念来表达。所以,一旦当概念的内涵被明确规定(定义)之