2010年 全国硕士研究生入学考试辅导用书

2010年全国硕士研究生入学考试历年真题精解

数 学 三

清 华 大 学　黄艳萍
北 京 大 学　孙　璇　主编
首都师范大学　童　武

复旦大学出版社
www.fudanpress.com.cn

名校·名师·经典·精辟

2010 年全国硕士研究生入学考试辅导用书

2010 年全国硕士研究生入学考试历年真题精解

数 学 三

清华大学 黄艳萍
北京大学 孙 璇 主编
首都师范大学 童 武

復旦大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

2010年全国硕士研究生入学考试历年真题精解　数学三/黄艳萍,孙璇,童武主编. —上海:复旦大学出版社,2009.5
全国硕士研究生入学考试辅导用书
ISBN 978-7-309-06597-8

Ⅰ.2…　Ⅱ.①黄…②孙…③童…　Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-解题
Ⅳ.G643-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第055374号

2010年全国硕士研究生入学考试历年真题精解　数学三
黄艳萍　孙　璇　童　武　主编

出版发行　复旦大学出版社　上海市国权路579号　邮编200433
86-21-65642857(门市零售)
86-21-65100562(团体订购)　86-21-65109143(外埠邮购)
fupnet@fudanpress.com　http://www.fudanpress.com

责任编辑　白国信
出 品 人　贺圣遂

印　　刷　上海市崇明县裕安印刷厂
开　　本　787×1092　1/16
印　　张　16.5
字　　数　433千
版　　次　2009年5月第一版第一次印刷
印　　数　1—5 100

书　　号　ISBN 978-7-309-06597-8/G·824
定　　价　25.00元

内 容 提 要

本书囊括了 1990—2009 年全国硕士研究生入学考试数学三试题，并对其进行了详尽的分析。剖析其命题思路，指出其题型特点，综合分析其命题规律，使考生在复习大纲规定的重点、疑点和难点的基础上，把握历年命题脉络和出题动态，做到举一反三、融会贯通，从而取得良好的复习效果。

FOREWORD | # 前言

为了指导参加2010年全国硕士研究生入学统一考试的广大考生数学考试的复习，根据最新考试大纲的要求，我们组织多年来参加考试大纲制定和修订工作及参加考前辅导的部分教授、专家编写了这本《2010年全国硕士研究生入学考试历年真题精解　数学三》，供广大考生复习使用.

研究生入学考试是选拔性考试，当然重在考查考生的能力高低. 能力是建立在基础之上的，基本功不扎实，一切无从谈起. 从考试大纲来看，要求考生对基本知识、基本概念的掌握理解要深、要透、要准，尽管大学期间的期中、期末考试基本反映了这一要求，但从程度上讲，远没有考研的要求高. 相信大家都有同感，通过大学的期末考试其实不难，甚至基本概念不甚清晰、知识点掌握不够通透，也有可能取得较不错的成绩. 这是由于大学考试有其固定套路，即便考查相同的知识点，其题目的迷惑性、技巧性都远逊于研究生入学考试的题目. 因此，狠抓基础是一项必要的工作. 虽然很多考生可能会认为，基础的东西学起来有点费力不讨好，短期收效不明显. 但笔者再三强调，不可轻视基础，必须夯实到理解得入木三分的程度.

德国大数学家高斯曾说过：“数学是科学的皇后.”毫无疑问，数学是对人类思维能力要求最高的学科，它不仅范围广、内容多，而且深刻体现了人类的聪明才智所能达到的最

高境界.全国硕士研究生入学考试数学科目是考查考生的数学功底、思维能力,并不是要求考生进行高深的数学基础理论研究,但却是对考生在一定层次上进行各种思维能力,包括抽象思维能力、逻辑推理能力等的综合性检验.既然如此,要考好数学,思维能力必须有质的飞跃.数学科目的考试范围基本上是高等数学(微积分)、线性代数、概率论与数理统计这三大块,经济类考生的数学试卷还涉及一些经济数学的知识.无论如何,考生首先要全面细致地研究全国硕士研究生入学考试的教学大纲.自从考研招生实行全国统考以来,数学考试命题是严格按照国家考试中心制定的"数学考试大纲"所规定的考试内容和考试要求来进行的.大纲对考试性质、要求、方法、内容、试题类别、适用专业等进行了详细阐述,是广大考生备考的指导性文件和根本依据.考生必须从中全面领会考试精神,尤其是明确考试范围,以便在复习时有的放矢.大纲所要求的知识点或考点,考生一定要熟记在心,不要求的内容,应该跳过,不要浪费精力.同时要注意,不光应分析研究本年最新的大纲,还要研究去年乃至上一年的大纲,从比较中发现其变化.

历史是一面镜子,了解昨天才能明白今天,掌握了历史和现在才能把握未来.研习历年的试题是研究生入学考试复习备考中必不可少的关键环节,也是考生掌握考试动态、赢得高分的最佳捷径.历年的考题是标准的复习题.自从实

行研究生入学考试以来，也时有真题重现的现象发生，如2003年数学一的第一大题第(3)小题与1993年数学一的第一大题第(3)小题、2003年数学一的第一大题第(5)小题与1996年数学三的第一大题第(5)小题、2003年数学一的第三大题与2001年数学三的第六大题等等，都是相同或非常相似的.所以，对往年真题的研究对考生而言是最有帮助的.循着命题人的思路，我们就可以把握考试的脉搏，明确考试的重点和难点所在.

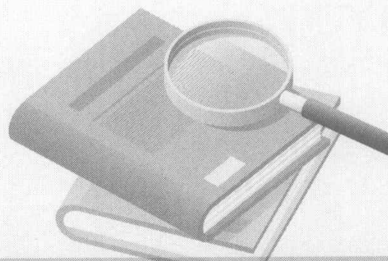
本书是广大数学教师及原考研命题组的专家、教授智慧和劳动的结晶，是一份宝贵的资料.其中的每一道试题，既反映了考研数学考试大纲对考生数学知识、能力和水平的要求，又蕴含着命题的指导思想、基本原则和趋势.因此，对照考试大纲分析、研究这些试题，考生不仅可以了解考研以来数学考试的全貌，而且可以方便地了解有关试题和信息，从中发现规律，归纳出各部分内容的重点、难点，以及常考的题型，进一步把握考试的特点及命题的思路和规律，从而从容应考，轻取高分.

编者　于北大燕园

CONTENTS 目录

历年真题部分

试题精解部分



历年真题部分

2009 年全国硕士研究生入学考试
数学三试题

一、选择题(1—8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每小题给出的 4 个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1) 函数 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin \pi x}$ 的可去间断点的个数为(　　).

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 无穷多个

(2) 当 $x\to 0$ 时,$f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小,则(　　).

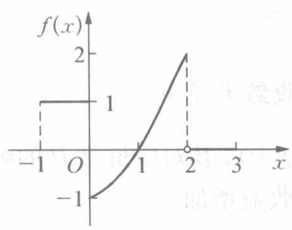
(A) $a=1,\ b=-\dfrac{1}{6}$　　(B) $a=1,\ b=\dfrac{1}{6}$

(C) $a=-1,\ b=-\dfrac{1}{6}$　　(D) $a=-1,\ b=\dfrac{1}{6}$

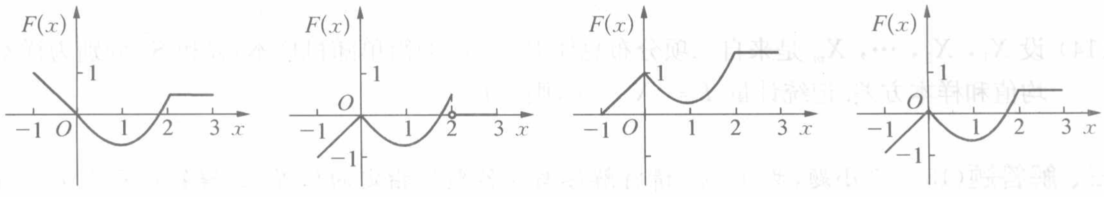
(3) 使不等式 $\displaystyle\int_1^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t>\ln x$ 成立的 x 的范围是(　　).

(A) $(0,1)$　　(B) $\left(1,\dfrac{\pi}{2}\right)$　　(C) $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$　　(D) $(\pi,+\infty)$

(4) 设函数 $y=f(x)$ 在区间$[-1,3]$上的图形为



则函数 $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 的图形为(　　).



(A)　　(B)　　(C)　　(D)

(5) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为二阶矩阵,$\boldsymbol{A}^*,\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵. 若 $|\boldsymbol{A}|=2$,$|\boldsymbol{B}|=3$,则分块矩阵$\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$的伴随矩阵为(　　).

(A) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{B}^* \\ 2\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{B}^* \\ 3\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{A}^* \\ 2\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{A}^* \\ 3\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$

(6) 设$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{P}$均为三阶矩阵，$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$为$\boldsymbol{P}$的转置矩阵，且$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. 若$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$，则$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$为(　　).

(A) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　(C) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(7) 设事件A与事件B互不相容，则(　　).

(A) $P(\overline{A}\,\overline{B})=0$　　(B) $P(AB)=P(A)P(B)$

(C) $P(\overline{A})=1-P(B)$　　(D) $P(\overline{A}\cup\overline{B})=1$

(8) 设随机变量X与Y相互独立，且X服从标准正态分布$N(0, 1)$，Y的概率分布为$P\{Y=0\}=P\{Y=1\}=\dfrac{1}{2}$. 记$F_z(z)$为随机变量$Z=XY$的分布函数，则函数$F_z(z)$的间断点个数为(　　).

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

二、填空题(9—14小题，每小题4分，共24分. 请将答案写在答题纸指定位置上)

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=$________.

(10) 设$z=(x+\mathrm{e}^y)^x$，则$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,\,0)}=$________.

(11) 幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\mathrm{e}^n-(-1)^n}{n^2}x^n$的收敛半径为________.

(12) 设某产品的需求函数为$Q=Q(P)$，其对应价格P的弹性$\xi_P=0.2$. 则当需求量为10 000件时，价格增加1元会使产品收益增加________元.

(13) 设$\boldsymbol{\alpha}=(1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}=(1, 0, k)^{\mathrm{T}}$. 若矩阵$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$相似于$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则$k=$________.

(14) 设$X_1, X_2, \cdots, X_m$是来自二项分布总体$B(n, p)$的简单随机样本，$\overline{X}$和S^2分别为样本均值和样本方差. 记统计量$T=\overline{X}-S^2$，则$ET=$________.

三、解答题(15—23小题，共94分. 请将解答写在答题纸指定的位置上，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15)(本题满分9分)　求二元函数$f(x, y)=x^2(2+y^2)+y\ln y$的极值.

(16)(本题满分10分)　计算不定积分$\int\ln\left(1+\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}\right)\mathrm{d}x\ (x>0)$.

(17)(本题满分10分)　计算二重积分$\iint\limits_{D}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$D=\{(x, y)\mid(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 2, y\geqslant x\}$.

(18)(本题满分11分)

(Ⅰ)证明拉格朗日中值定理:若函数$f(x)$在$[a, b]$上连续,在(a, b)内可导,则存在$\xi\in(a, b)$,使得$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$;

(Ⅱ)证明:若函数$f(x)$在$x=0$处连续,在$(0, \delta)(\delta>0)$内可导,且$\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=A$,则$f'_+(0)$存在,且$f'_+(0)=A$.

(19)(本题满分10分)　设曲线$y=f(x)$,其中$f(x)$是可导函数,且$f(x)>0$.已知曲线$y=f(x)$与直线$y=0$, $x=1$及$x=t\ (t>1)$所围成的曲边梯形绕x轴旋转一周所得的立体体积值是该曲边梯形面积值的πt倍,求该曲线方程.

(20)(本题满分11分)　设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & -4 & -2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ -2\end{pmatrix}$.

(Ⅰ)求满足$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{\xi}_1$, $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{\xi}_1$的所有向量$\boldsymbol{\xi}_2$, $\boldsymbol{\xi}_3$;

(Ⅱ)对(Ⅰ)中的任意向量$\boldsymbol{\xi}_2$, $\boldsymbol{\xi}_3$,证明:$\boldsymbol{\xi}_1$, $\boldsymbol{\xi}_2$, $\boldsymbol{\xi}_3$线性无关.

(21)(本题满分11分)　设二次型$f(x_1, x_2, x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$.

(Ⅰ)求二次型f的矩阵的所有特征值;

(Ⅱ)若二次型f的规范形为$y_1^2+y_2^2$,求a的值.

(22)(本题满分11分)　设二维随机变量(X, Y)的概率密度为$f(x, y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & 0<y<x\\ 0, & 其他\end{cases}$.求:

(Ⅰ)条件概率密度$f_{Y\mid X}(y\mid x)$;

(Ⅱ)条件概率$P=\{X\leqslant 1\mid Y\leqslant 1\}$.

(23)(本题满分11分)　袋中有1个红球,2个黑球与3个白球.现有回放地从袋中取两次,每次取一球,以X, Y, Z分别表示两次取球所取得的红球、黑球和白球的个数.求:

(Ⅰ)$P\{X=1\mid Z=0\}$;

(Ⅱ)二维随机变量(X, Y)的概率分布.

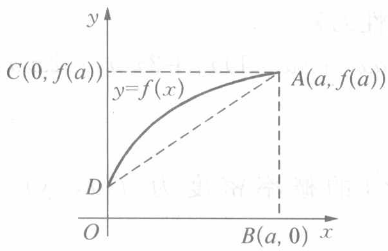
2008 年全国硕士研究生入学考试
数学三试题

一、选择题(1—8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每小题给出的 4 个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1) 设函数 $f(x)$在区间$[-1, 1]$上连续,则 $x=0$ 是函数 $g(x)=\dfrac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}{x}$ 的(　　).

(A) 跳跃间断点　　(B) 可去间断点

(C) 无穷间断点　　(D) 振荡间断点



(2) 设左图中曲线方程为 $y=f(x)$, 函数 $f(x)$在区间$[0, a]$上有连续的导数,则定积分$\int_0^a xf'(x)\,\mathrm{d}x$ 表示(　　).

(A) 曲边梯形 $ABOD$ 的面积

(B) 梯形 $ABOD$ 的面积

(C) 曲边三角形 ACD 的面积

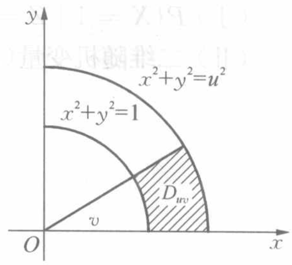
(D) 三角形 ACD 的面积

(3) 设 $f(x, y)=\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^4}}$, 则(　　).

(A) $f'_x(0, 0)$, $f'_y(0, 0)$ 都存在　　(B) $f'_x(0, 0)$不存在,$f'_y(0, 0)$存在

(C) $f'_x(0, 0)$存在,$f'_y(0, 0)$不存在　　(D) $f'_x(0, 0)$, $f'_y(0, 0)$都不存在

(4) 设函数 f 连续, $F(u, v)=\iint\limits_{D_{uv}} \dfrac{f(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中区域 D_{uv}为右图中的阴影部分,则$\dfrac{\partial F}{\partial u}=$(　　).



(A) $vf(u^2)$　　(B) $\dfrac{v}{u}f(u^2)$

(C) $vf(u)$　　(D) $\dfrac{v}{u}f(u)$

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非零矩阵,$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵. 若 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$,则(　　).

(A) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆　　(B) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆

(C) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆　　(D) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆

(6) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, 则在实数域上与 $\boldsymbol{A}$ 合同的矩阵为(　　).

(A) $\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$　　(C) $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$

(7) 设随机变量 X, Y 独立同分布，且 X 的分布函数 $F(x)$，则 $Z=\max\{X, Y\}$ 的分布函数为(　　).

(A) $F^2(x)$　　(B) $F(x)F(y)$

(C) $1-[1-F(x)]^2$　　(D) $[1-F(x)][1-F(y)]$

(8) 设随机变量 $X\sim N(0, 1)$, $Y\sim N(1,4)$，且相关系数 $\rho_{XY}=1$，则(　　).

(A) $P\{Y=-2X-1\}=1$　　(B) $P\{Y=2X-1\}=1$

(C) $P\{Y=-2X+1\}=1$　　(D) $P\{Y=2X+1\}=1$

二、填空题(9—14 小题，每小题 4 分，共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上)

(9) 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & |x|\leqslant c \\ \dfrac{2}{|x|}, & |x|>c \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续，则 $c=$________.

(10) 设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x+x^3}{1+x^4}$，则 $\displaystyle\int_2^{2\sqrt{2}} f(x)\mathrm{d}x=$________.

(11) 设 $D=\{(x, y)\mid x^2+y\leqslant 1\}$，则 $\displaystyle\iint_D (x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________.

(12) 微分方程 $xy'+y=0$ 满足条件 $y(1)=1$，的解 $y=$________.

(13) 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 1, 2, 2, $\boldsymbol{E}$ 为三阶单位矩阵，则 $|4\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E}|=$________.

(14) 设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布，则 $P\{X=E(X^2)\}=$________.

三、解答题(15—23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15)(本题满分 9 分)　求极限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}$.

(16)(本题满分 10 分)　设 $z=z(x, y)$ 是由方程

$$x^2+y^2-z=\varphi(x+y+z)$$

所确定的函数，其中 φ 具有二阶导数，且 $\varphi'\neq -1$.

(Ⅰ) 求 $\mathrm{d}z$;

(Ⅱ) 记 $u(x, y)=\dfrac{1}{x-y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

(17)(本题满分 11 分)　求二重积分 $\displaystyle\iint_D \max\{xy, 1\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x, y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant 2\}$.

(18)(本题满分 10 分)　设 $f(x)$ 是周期为 2 的连续函数. 证明：

(Ⅰ) 对任意实数 t，都有 $\displaystyle\int_t^{t+2} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$;

(Ⅱ) $G(x)=\displaystyle\int_0^x\left[2f(t)-\int_t^{t+2}f(s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t$ 是周期为 2 的周期函数.

(19)(本题满分 10 分)　设银行存款的年利率为 $r=0.05$，并依年复利计算. 某基金会希望通过存款 A 万元实现第一年提取 19 万元，第二年提取 28 万元，…，第 n 年提取 $(10+9n)$ 万元，并能按此规律一直提取下去，问 A 至少应为多少万元.

(20)(本题满分 12 分)　设 n 元线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2a & 1 & & \\ a^2 & 2a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & a^2 & 2a \end{pmatrix}_{n\times n},\ \boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{b}=(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}.$$

(Ⅰ)证明：行列式 $|\boldsymbol{A}|=(n+1)a^n$；

(Ⅱ)当 a 为何值时，方程组有唯一解，求此 x_1；

(Ⅲ)当 a 为何值时，方程组有无穷多解，求通解.

(21)(本题满分 11 分)　设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于特征值 $-1,1$ 的特征向量，向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 满足 $\boldsymbol{A\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

(Ⅰ)证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关；

(Ⅱ)令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$.

(22)(本题满分 11 分)　设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 的概率分布为 $P\{X=i\}=\dfrac{1}{3}(i=-1,0,1)$，$Y$ 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant y\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

记 $Z=X+Y$. 求：

(Ⅰ)$P\left\{Z\leqslant\dfrac{1}{2}\mid X=0\right\}$；

(Ⅱ)Z 的概率密度 $f_Z(z)$.

(23)(本题满分 11 分)　设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是总体 $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本. 记

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\quad S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,\quad T=\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2$$

(Ⅰ)证明：T 是 μ^2 的无偏估计量；

(Ⅱ)当 $\mu=0,\sigma=1$ 时，求 $D(T)$.