



文登教育集团课堂用书
考研数学强化班指定讲义

inner 赢家图书

2010 >>

考研数学 核心题型

:::: [理工类·数学二]

—— 始于1996年，每年服务30万考生 ——

陈文灯 主编

- >> 超级畅销书陈文灯《**考研数学复习指南**》配套姊妹篇
- >> 本书提出一个观点，**数学也需要记忆**，记定理、公式，背核心题型
- >> 本书揭示一个事实，**考数学就是考基础、考题型**，考代表数学本质的核心题型



北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS



文登教育集团课堂用书
考研数学强化班指定讲义

W 10000 精英图书

2010 >>>

考研数学

核心题型

:::::

::::: [理工类·数学二]

—— 始于1996年，每年服务30万考生 ——

陈文灯 王编

陈启浩 武海燕 副主编



北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

数学问题主要是由各种类型的题(题型)构成的。本书是一本省时、省力、高效的考研数学题型辅导书。它以 20 多年的考研数学试卷为素材,通过分析、归纳,遴选出 129 个核心题型。其内容包括“高等数学题型”和“线性代数题型”两部分,涵盖《考研数学大纲》(理工类·数学二)的全部内容。书中给出了各类题型的解题方法和技巧,有些方法和技巧是编者独创的,例如,连续函数在闭区间上的有关命题的证明方法、文字不等式的证明方法和各种辅助函数的作法等。这些方法和技巧能大大提高学生的复习效率,化难为简,在考场上常常能直书正确答案,从容过关。

本书适合于参加考研的学生在复习时自学研读,也可以作为考研辅导机构的强化班指定讲义。高等数学的普通学习者和爱好者亦可以阅读,从中可领略数学科学的简约之美和数字运算技巧的奇妙。

图书在版编目(CIP)数据

考研数学核心题型. 理工类. 数学二/陈文灯主编.

北京:北京航空航天大学出版社, 2009. 3

ISBN 978 - 7 - 81124 - 632 - 2

I. 考… II. 陈… III. 高等数学--研究生--入学考试--
解题 IV. O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 022226 号

考研数学核心题型

[理工类·数学二]

陈文灯 主编

责任编辑 伍 仁

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路 37 号(100191) 发行部电话:010-82317021 传真:010-82328026

http://www.buaapress.com.cn E-mail:bhpress@263.net

涿州市新华印刷有限公司印装 各地书店经销

*

开本:787×1092 1/16 印张:17.5 字数:448 千字

2009 年 3 月第 1 版 2009 年 3 月第 1 次印刷

ISBN 978 - 7 - 81124 - 632 - 2 定价:32.80 元

前 言

考研的几门课中,数学是考生公认的最难复习、最难考的一门课。为此,不少学生不得不放弃钟爱的专业,报考不考数学的专业;多数人硬着头皮抱着试试看的态度参加复习考试。数学果真那么可怕,那么难吗?对于原来数学基础不好,又想考高分(135分以上)的考生来说,只要具备两个条件:① 比较强的记忆力;② 比较强的模仿能力,即可圆“高分梦”。

记忆的作用在于记住重要的概念、理论与定理公式,以及记住计算方法与技巧。没有记住的东西就无模仿可言,可见记忆之重要。一般人都知道学英语需要记忆,单词需要背诵,其实学数学也需要记忆,要在理解的基础上背重要的定理、公式和概念,背核心的题型。

模仿是指对解题方法和技巧的一种描摹或仿效。数学题千千万,如果都用东施效颦的方法,姑且不说做不到,也不会有什么效果。要模仿就应该抓住常考题型进行相似或变异题的训练。无论是以题型为纲进行的数学实践(考研辅导班),还是出版书籍的反馈信息,都证明:抓题型就是抓解题方法和技巧的根本和关键。就是基于这样的考虑,我们才编写了这样一套与《考研数学复习指南》(理工类)相配套的、复习起来省时、省力的考研数学核心题型教材。希望书中的方法和技巧能够在较短的时间里大大提高学生的复习效率,化难为简,从容过关。

本书的特点如下:

① 严格按照《考研数学大纲》的要求,对国内外文献资料,尤其是对 20 多年来考研试题进行了归纳总结,精选出 203 个题型。

② 对每个题型进行详尽分析,指出其特点和易混、易错的地方。

③ 书中有许多题型的解题方法和技巧是我们苦心孤诣、冥思苦想出来的,决非市面上其他书籍所共有。

④ 有些题解后有评注,虽然寥寥数语,却可起到画龙点睛、开拓思

④ 有些题解后有评注,虽然寥寥数语,却可起到画龙点睛、开拓思路的作用。

⑤ 本书编写属上课讲义的形式,可能更贴近考生。

本书适合于参加研究生入学考试的同学在复习时自学研读,也可作为考研辅导机构的强化班指定讲义。高等数学的普通学习者和爱好者亦可以阅读,并从中领略数学科学的简约之美和数字运算技巧的奇妙。

书中若有不当之处,敬请读者批评指正。

陈灯

2009年2月

目 录

第 1 篇 高等数学题型

第 1 章 极限和连续	1
1.1 重要定理	1
1.2 重要公式	3
1.3 函数的极限	4
题型 1 无穷小的比较或确定无穷小的阶	4
题型 2 求未定式函数极限	5
题型 3 求分段函数在分界点的极限	12
题型 4 极限式中常数的确定	13
1.4 数列的极限	15
题型 5 求各种类型(∞/∞ 型、 1^∞ 型、 $\infty-\infty$ 型)的数列极限	15
题型 6 给出数列 $\{x_n\}$ 通项表达式, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$	17
题型 7 数列 n 项和 $S_n = \sum_{i=1}^n a_i$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限	18
题型 8 n 个因子乘积, 当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限	20
1.5 函数的连续性	22
题型 9 函数连续性的讨论	22
题型 10 确定函数的间断点及其类型	23
1.6 杂 例	25
题型 11 从含有 $f(x)$ 及 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 的方程中求解 $f(x)$	25
题型 12 当 $x \rightarrow 0$ 时, 求含有 $e^{\frac{1}{x}}$, $\arctan \frac{1}{x}$, $\operatorname{arccot} \frac{1}{x}$, $ x $ 的极限	27
题型 13 含 $f(x+a) - f(x)$ 的非 $\frac{0}{0}$ 型极限式且 $f(x)$ 可导	28
第 2 章 导数与微分	29
2.1 导数和微分的概念	29
2.2 导数公式和运算法则	30
2.3 重要定理	31
2.4 与导数定义和性质有关的命题	31
题型 14 求含有抽象函数的 $\frac{0}{0}$ 型极限	31

题型 15	与抽象函数的导数相关的命题	34
题型 16	判断函数的可导性	36
2.5	各种函数的导数或微分	37
题型 17	求一元复合函数的导数或微分	37
题型 18	求参数方程所确定的函数的导数	37
题型 19	求一元隐函数的导数或微分	38
题型 20	求幂指函数的导数或微分	39
题型 21	求函数表达式为若干因子连乘积、乘方、开方或商形式的函数的导数 或微分	40
题型 22	求分段函数的导数或微分	41
题型 23	求简单函数的高阶导数	44
第 3 章	不定积分	48
3.1	不定积分	48
3.2	三种基本积分方法	49
3.3	不定积分中的概念	57
题型 24	与原函数相关的命题	57
3.4	各种函数的不定积分	58
题型 25	求简单有理函数的不定积分	58
题型 26	简单无理函数的不定积分	60
题型 27	三角有理式的积分	61
题型 28	分段函数的不定积分	64
题型 29	含对数函数、反三角函数的不定积分	66
题型 30	复合函数的不定积分	67
题型 31	计算隐函数的不定积分	68
第 4 章	定积分	70
4.1	定积分的基本性质	70
4.2	重要定理	70
4.3	重要公式	71
4.4	计算定积分的方法	72
4.5	反常积分	73
4.6	与定积分的定义和性质相关的命题	75
题型 32	定积分的估值	75
题型 33	变限积分的求导问题	76
4.7	各种类型定积分的计算	77
题型 34	求分段函数的定积分	77
题型 35	求含有绝对值符号的定积分	78
题型 36	求被积函数中含有变上限积分的定积分	79

题型 37	求对称区间 $[-l, l]$ 上的定积分	80
题型 38	求周期函数的定积分	82
题型 39	求被积函数的分母为两项, 分子恰为其中一项的定积分	83
题型 40	求由三角有理式与初等函数通过四则运算、复合运算或变量代换所得式的定积分	83
题型 41	定积分等式的证明	84
题型 42	定积分不等式的证明	88
4.8	反常积分	92
题型 43	反常积分的计算及收敛	92
第 5 章	微分中值定理	94
5.1	闭区间上连续函数的性质	94
5.2	微分中值定理	94
5.3	闭区间上连续函数的命题	95
题型 44	闭区间上连续函数命题的证明	95
5.4	中值定理的应用	99
题型 45	证明给出的函数 $f(x)$ 满足某中值定理	99
题型 46	证明某个函数恒等于一个常数的命题	100
题型 47	命题 $f^{(n)}(\xi) = 0$ 的证明	101
题型 48	欲证结论: 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f^{(n)}(\xi) = k (k \neq 0)$ 或由 $a, b, f(a), f(b), \xi, f(\xi), f'(\xi), \dots, f^{(n)}(\xi)$ 所构成的代数式成立	102
题型 49	欲证结论: 在 (a, b) 内至少存在 $\xi, \eta (\xi \neq \eta)$ 满足某个代数式	105
第 6 章	一元微积分的应用	107
6.1	重要定理和结论	107
6.2	导数的应用	107
题型 50	一元函数单调增减性的判别	107
题型 51	一元函数极值的判定或求解	110
题型 52	求一元函数的最值及简单应用	111
题型 53	曲线的拐点或凹凸区间的判定或求解	112
题型 54	函数曲线的渐近线方程的计算与导数的判定	113
题型 55	与曲线曲率相关的命题	115
6.3	方程的根	116
题型 56	方程根的存在性问题	116
题型 57	方程根的个数的研究	117
题型 58	方程根的唯一性问题	118
6.4	定积分的应用	120
题型 59	利用微元法解题	120
题型 60	求平面图形的面积	122

题型 61	求旋转体的侧面积	124
题型 62	求已知截面面积的立体体积或旋转体体积	126
题型 63	求平面曲线的弧长	128
题型 64	一元积分在物理上的应用	129
第 7 章	常微分方程	132
7.1	二阶线性微分方程解的性质	132
7.2	二阶线性微分方程解的结构定理	132
7.3	一阶微分方程的求解	133
题型 65	一阶可分离变量方程的求解	133
题型 66	一阶齐次微分方程的求解	134
题型 67	一阶线性微分方程的求解	136
7.4	二阶或二阶以上微分方程的求解	138
题型 68	可降阶的高阶微分方程的求解	138
题型 69	有关二阶常系数齐次线性或非齐次线性微分方程解的结构的命题	139
题型 70	求二阶常系数齐次线性或非齐次线性微分方程的通解	140
题型 71	微分方程在几何中的应用	146
题型 72	微分方程在物理中的应用	147
第 8 章	多元函数微分学	150
8.1	连续、可微和可导的关系	150
8.2	多元函数的极值	150
8.3	多元函数微分	151
题型 73	有关二元函数定义域、极限、连续的计算题	151
题型 74	简单显函数 $z=f(x,y)$ 偏导数的计算	152
题型 75	考查二元函数 $z=f(x,y)$ 的连续、偏导及可微性	153
题型 76	多元复合函数偏导数的计算	154
题型 77	隐函数偏导数的计算	159
题型 78	多元函数全微分的计算	163
8.4	多元函数的极值和最值	164
题型 79	求多元函数的极值	164
题型 80	求多元函数的最值	166
第 9 章	二重积分	169
9.1	二重积分的性质和定理	169
9.2	二重积分的计算	170
9.3	二重积分	172
题型 81	更换二重积分的积分次序	172
题型 82	选择积分次序	173

题型 83	积分区域关于坐标轴对称的二重积分	175
题型 84	分段函数的二重积分	177
题型 85	被积函数 $f(x, y)$ 中含有绝对值符号的二重积分	179
题型 86	被积函数 $f(x, y)$ 中含有最值符号 $\max$ 或 $\min$ 的二重积分	180
题型 87	二重积分等式的证明	181
题型 88	二重积分不等式的证明	182
第 10 章	函数方程与不等式证明	184
10.1	函数方程	184
题型 89	利用函数表示法与用什么字母表示无关的特性求函数方程	184
题型 90	利用极限求函数方程	184
题型 91	已知函数在一点的导数及函数方程, 求函数方程	185
题型 92	已知函数方程中含有变上限积分, 求函数方程	185
题型 93	已知函数连续, 且函数式中含函数的定积分、极限或二重积分, 求 函数方程	188
题型 94	已知函数方程中含有偏导数条件或曲线积分与路径无关, 求函数方程	189
10.2	不等式证明	189
题型 95	存在一个点 $\xi \in (a, b)$, 使得不等式成立或不等式通过变形, 一端 可写成 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 或 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ 的命题的证明	189
题型 96	在某一区间 (a, b) 不等式命题成立的证明	190
题型 97	文字不等式的证明	192
题型 98	函数 $f(x)$ 二阶和二阶以上可导的不等式命题的证明	193
题型 99	杂 例	194

第 2 篇 线性代数题型

第 11 章	行列式	196
11.1	重要定理和性质	196
11.2	重要结论	196
题型 100	与行列式的定义和性质相关的命题	197
题型 101	数值型行列式的计算	198
题型 102	行列式的余子式或代数余子式线性组合的计算	203
题型 103	计算抽象行列式	205
第 12 章	矩 阵	208
12.1	矩阵的运算性质	208
12.2	重要结论	208

12.3 逆矩阵	209
题型 104 有关逆矩阵的计算问题	209
题型 105 矩阵可逆的证明	212
12.4 矩阵的运算	213
题型 106 有关矩阵运算的命题	213
题型 107 求矩阵的行列式	215
题型 108 与伴随矩阵相关的命题	217
12.5 初等矩阵	218
题型 109 有关初等变换和初等矩阵的命题	218
第 13 章 向 量	221
13.1 重要结论	221
13.2 内积和施密特正交化方法	222
题型 110 讨论向量组的线性相关性	222
13.3 向量题型	223
题型 111 讨论向量组的线性相关性	223
题型 112 求向量组的极大线性无关组和秩	227
题型 113 有关向量组或矩阵的秩的计算与证明	228
题型 114 有关向量的线性表示的问题	230
题型 115 将向量组正交化	234
第 14 章 线性方程组	235
14.1 重要性质和定理	235
14.2 有关线性方程组的题型	236
题型 116 有关线性方程组的基本概念题	236
题型 117 有关基础解系的命题	238
题型 118 线性方程组的求解	239
题型 119 矩阵方程的求解	243
题型 120 讨论两个线性方程组解之间的关系	245
第 15 章 特征值与特征向量	248
15.1 重要结论	248
15.2 矩阵的特征值与特征向量	249
题型 121 求数值型矩阵的特征值与特征向量	249
题型 122 求抽象矩阵的特征值与特征向量	251
题型 123 特征值与特征向量的逆问题	252
14.3 相似矩阵及其对角化	254
题型 124 相似矩阵的判定及其逆问题	254
题型 125 矩阵可对角化的判定及其逆问题	255

题型 126 有关实对称矩阵的命题	256
第 16 章 二次型	258
16.1 重要结论	258
16.2 二次型题型	258
题型 127 二次型所对应的矩阵及其性质	258
题型 128 用正交变换法化二次型为标准型	260
题型 129 有关正定的判定	264

第 1 篇 高等数学题型

第 1 章 极限和连续

● 重要定理、公式和结论

1.1 重要定理

定理 1 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f_-(x_0) = f_+(x_0) = A$.

定理 2 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$, 其中 $\alpha(x)$ 为 $x \rightarrow 0$ 时的无穷小量, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$.

定理 3 (极限的保号性) 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 而且 $A > 0$ (或 $A < 0$), 那么存在常数 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$).

定理 4 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$), 则 $A \geq 0$ (或 $A \leq 0$).

定理 5 (单调有界定理) 单调增加有上界 (或单调减少有下界) 数列一定有极限.

定理 6* (夹逼定理) 设在 x_0 的邻域内恒有 $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$, 且

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = A, \quad \text{则 } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

定理 7 (无穷大和无穷小的关系) 无穷大的倒数为无穷小; 非零的无穷小的倒数为无穷大.

定理 8 (无穷小的运算性质)

- (1) 有限个无穷小的代数和为无穷小;
- (2) 有限个无穷小的乘积为无穷小;
- (3) 无穷小乘以有界变量为无穷小.

定理 9 设有函数 $f(x), g(x)$, 如果在自变量的同一变化过程中, 有 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$, 则

$$(1) \lim [f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B;$$

上式第二个式子中的两个极限若有一个不存在, 则代数 and 的极限必不存在; 若两个极限都不存在, 则代数 and 的极限不一定存在.

加法运算可推广到有限个中去.

$$(2) \lim [f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = AB;$$

$$(3) \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0);$$

(4) $\lim [cf(x)] = c \lim f(x) = cA$, 其中 c 为常数.

定理 10 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $|f(x)|$ 在 $[a, b]$ 上连续.

定理 11 初等函数在其定义域内的区间内连续(因为初等函数中可能有孤立点, 所以是在区间内连续).

推论: 设 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x) = f(x_0)$; 若没有说明 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(\lim_{x \rightarrow x_0} x)$, 即极限符号和函数符号不能交换顺序.

定理 12 设数列 $\{x_n\}$ 收敛于 l , 那么它的任一子序列 $\{x_{n_k}\}$ 也收敛, 且极限也是 $l (n_k \rightarrow \infty)$; 反之不真.

定理 13(洛必达法则)

法则 I ($\frac{0}{0}$ 型) 设函数 $f(x), g(x)$ 满足条件

$$(1) \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = 0, \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} g(x) = 0;$$

(2) $f(x), g(x)$ 在 x_0 的某邻域内可导, 在 x_0 点可除外(在无穷远邻域内可导), 且 $g'(x) \neq 0$;

$$(3) \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ 存在 (或为 } \infty \text{),}$$

$$\text{则 } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

法则 II ($\frac{\infty}{\infty}$ 型) 设函数 $f(x), g(x)$ 满足条件

$$(1) \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = \infty, \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} g(x) = \infty;$$

(2) $f(x), g(x)$ 在 x_0 的邻域内可导, 在 x_0 点可除外(在无穷远邻域内可导), 且 $g'(x) \neq 0$;

$$(3) \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ 存在 (或为 } \infty \text{),}$$

$$\text{则 } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

使用法则时需注意的事项:

(1) 只有 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的未定式才能使用法则;

(2) 每用完一次法则, 要将式子整理化简;

(3) 为简化运算, 经常将法则与等价无穷小结合使用;

(4) $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在(或 ∞) 不能 $\Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f(x)}{g(x)}$ 不存在;

(5) 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 极限式中含有 $\sin x, \cos x$ (或 $x \rightarrow 0$ 时, 极限式中含有 $\sin \frac{1}{x}, \cos \frac{1}{x}$), 则不能用洛必达法则.

1.2 重要公式

公式 1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$

若极限式具有如下两个特点:

(1) 是 $\frac{0}{0}$ 型极限, 这是首要特点, 是本质;

(2) $\sin \square$ 与分数线对面变量 $\square$ 形式一致, 则 $\lim_{\square \rightarrow 0} \frac{\sin \square}{\square} = 1.$

公式 2 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 或 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$

特点如下:

(1) 是 1^∞ 型极限;

(2) 括号中 1 后的变量(包括符号)与指数幂互为倒数.

公式 3(抓大头准则)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1} x + b_m} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n}{b_0 x^m} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & m = n \\ 0, & n < m \\ \infty, & n > m \end{cases}$$

即求 $x \rightarrow \infty$ 的极限时, 抓住起决定性作用的 x 的最高次幂的项, 把其余的项略掉; 而求 $x \rightarrow 0$ 的极限时, 则正好相反.

公式 4(函数连续的充要条件)

函数在一点 x_0 连续的充要条件是

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

公式 5

(1) 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 以下各函数趋于 $+\infty$ 的速度由慢到快为 $\ln x, x^a (a > 0), a^x (a > 1), x^x.$

(2) 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 通项趋于 $+\infty$ 的速度由慢到快为 $\ln n, n^a (a > 0), a^n (a > 1), n!, n^n.$

(3) 常用数列极限:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 (a > 0), \text{ 特例为 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p^n = 0 (|p| < 1); \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0 (k > 0); \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

(4) 常用函数极限:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}; \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arccot} x = 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arccot} x = \pi;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = \infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0; \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1.$$

注: 若 $x \rightarrow \infty$ 的极限式中含有 $a^x (a > 0, a \neq 1)$, 特别是 e^x , 或 $\arctan x$, 或 $\operatorname{arccot} x$, 或 $|x|$ (或 $x \rightarrow 0$ 时, 极限式中含 $e^{\frac{1}{x}}$, 或 $\arctan \frac{1}{x}$, 或 $\operatorname{arccot} \frac{1}{x}$, 或 $|x|$), 一定分别求出 $x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty$ (或 $x \rightarrow 0^+, x \rightarrow 0^-$) 时的极限, 若两者相等, 则 $x \rightarrow \infty$ (或 $x \rightarrow 0$) 时的极限存在, 否则不存在.

● 核心

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{g(x)} = 2$$

例2 把 $x \rightarrow 0^+$ 时的无穷小量 $\alpha = \int_0^x \cos t^2 dt$, $\beta = \int_0^{x^2} \tan \sqrt{t} dt$, $\gamma = \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt$ 进行排列,使后者是前者的高阶无穷小,正确的排列次序为().

(A) α, β, γ (B) α, γ, β (C) β, α, γ (D) β, γ, α

分析: 用定义做时,一般用洛必达法则,即对分子、分母求导,所以也可以先求导,然后再比较.
解:

$$\alpha' = \cos x^2 \rightarrow 1 (x \rightarrow 0^+), \quad \beta' = 2x \tan x \sim 2x^2 (x \rightarrow 0^+)$$

$$\gamma' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin x^3 \sim \frac{1}{2} x (x \rightarrow 0^+)$$

由于当 $x \rightarrow 0^+$ 时, x 的次数越高,根据题意,排列越靠前;又根据洛必达法则,函数的排列次序和导函数的排列次序是相同的,故(B)为正确选项.

例3 设 $f(x) = 2x - \sin x - \sin x \cos x$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 是 x 的()阶无穷小.

解:
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} (n \text{ 待定}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin x - \sin x \cos x}{x^n}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \cos x - \cos 2x}{n x^{n-1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 2 \sin 2x}{n(n-1) x^{n-2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + 4 \cos 2x}{n(n-1)(n-2) x^{n-3}}$$

最后一个极限式中,当 $x \rightarrow 0$ 时,分子的极限为 5,若此极限存在,则必须 $n=3$.

注: 三角函数一般通过积化和差或倍角公式进行降阶.

题型2 求未定式函数极限

1. 求 $\frac{0}{0}$ 型未定式函数极限

若 $\lim f(x)=0, \lim g(x)=0$, 则 $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ 称为 $\frac{0}{0}$ 型未定式函数极限.

思路启迪: (1) 通过因式分解或根式有理化, 消去使分母为零的因式, 再用极限运算法则或连续函数的性质求解.

所谓根式有理化, 是指极限式中含有 $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ (或 $a \pm \sqrt{b}$), 在求极限之前先用它们的共轭根式 $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$ (或 $a \mp \sqrt{b}$) 分别乘以分子、分母, 使其“0”因子呈现出来的一种运算.

(2) 利用等价无穷小代换.

(3) 利用洛必达法则求极限 (这是求 $\frac{0}{0}$ 型极限最有效的方法, 但是要注意使用条件).

(4) 若前三种方法无法求得极限, 可考虑用变量代换 (通常是作倒代换, 令 $x = \frac{1}{t}$ 或 $x = \frac{1}{t^2}$).