文登教育集团课堂用书
考研数学强化班指定讲义

赢家图书

2010

考研数学
核心题型

【理工类·数学二】

始于1996年，每年服务30万考生

陈文灯 主编

- 超级畅销书陈文灯《考研数学复习指南》配套姊妹篇
- 本书提出一个观点，**数学也需要记忆**，记定理、公式，背核心题型
- 本书揭示一个事实，**考数学就是考基础、考题型**，考代表数学本质的核心题型

北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

文登教育集团课堂用书
考研数学强化班指定讲义

2010

考研数学核心题型

[理工类·数学二]

—— 始于1996年，每年服务30万考生 ——

陈文灯 主编
陈启浩 武海燕 副主编

北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

内容简介

数学问题主要是由各种类型的题(题型)构成的。本书是一本省时、省力、高效的考研数学题型辅导书。它以20多年的考研数学试卷为素材,通过分析、归纳,遴选出129个核心题型。其内容包括"高等数学题型"和"线性代数题型"两部分,涵盖《考研数学大纲》(理工类·数学二)的全部内容。书中给出了各类题型的解题方法和技巧,有些方法和技巧是编者独创的,例如,连续函数在闭区间上的有关命题的证明方法、文字不等式的证明方法和各种辅助函数的作法等。这些方法和技巧能大大提高学生的复习效率,化难为简,在考场上常常能直书正确答案,从容过关。

本书适合于参加考研的学生在复习时自学研读,也可以作为考研辅导机构的强化班指定讲义。高等数学的普通学习者和爱好者亦可以阅读,从中可领略数学科学的简约之美和数字运算技巧的奇妙。

图书在版编目(CIP)数据

考研数学核心题型.理工类.数学二/陈文灯主编.
北京:北京航空航天大学出版社,2009.3
ISBN 978-7-81124-632-2

Ⅰ.考… Ⅱ.陈… Ⅲ.高等数学—研究生—入学考试—
解题 Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第022226号

考研数学核心题型
[理工类·数学二]
陈文灯 主编
责任编辑 伍 仁
*
北京航空航天大学出版社出版发行
北京市海淀区学院路37号(100191) 发行部电话:010-82317024 传真:010-82328026
http://www.buaapress.com.cn E-mail:bhpress@263.net
涿州市新华印刷有限公司印装 各地书店经销
*
开本:787×1 092 1/16 印张:17.5 字数:448千字
2009年3月第1版 2009年3月第1次印刷
ISBN 978-7-81124-632-2 定价:32.80元

前　　言

考研的几门课中，数学是考生公认的最难复习、最难考的一门课。为此，不少学生不得不放弃钟爱的专业，报考不考数学的专业；多数人硬着头皮抱着试试看的态度参加复习考试。数学果真那么可怕，那么难吗？对于原来数学基础不好，又想考高分(135 分以上)的考生来说，只要具备两个条件：① 比较强的记忆力；② 比较强的模仿能力，即可圆“高分梦”。

记忆的作用在于记住重要的概念、理论与定理公式，以及记住计算方法与技巧。没有记住的东西就无模仿可言，可见记忆之重要。一般人都知道学英语需要记忆，单词需要背诵，其实学数学也需要记忆，要在理解的基础上背重要的定理、公式和概念，背核心的题型。

模仿是指对解题方法和技巧的一种描摹或仿效。数学题千千万，如果都用东施效颦的方法，姑且不说做不到，也不会有什么效果。要模仿就应该抓住常考题型进行相似或变异题的训练。无论是以题型为纲进行的数学实践(考研辅导班)，还是出版书籍的反馈信息，都证明：抓题型就是抓解题方法和技巧的根本和关键。就是基于这样的考虑，我们才编写了这样一套与《考研数学复习指南》(理工类)相配套的、复习起来省时、省力的考研数学核心题型教材。希望书中的方法和技巧能够在较短的时间里大大提高学生的复习效率，化难为简，从容过关。

本书的特点如下：

① 严格按照《考研数学大纲》的要求，对国内外文献资料，尤其是对 20 多年来考研试题进行了归纳总结，精选出 203 个题型。

② 对每个题型进行详尽分析，指出其特点和易混、易错的地方。

③ 书中有许多题型的解题方法和技巧是我们苦心孤诣、冥思苦想出来的，决非市面上其他书籍所共有。

④ 有些题解后有评注，虽然寥寥数语，却可起到画龙点睛、开拓思

④ 有些题解后有评注，虽然寥寥数语，却可起到画龙点睛、开拓思路的作用。

⑤ 本书编写属上课讲义的形式，可能更贴近考生。

本书适合于参加研究生入学考试的同学在复习时自学研读，也可作为考研辅导机构的强化班指定讲义。高等数学的普通学习者和爱好者亦可以阅读，并从中领略数学科学的简约之美和数字运算技巧的奇妙。

书中若有不当之处，敬请读者批评指正。

陈文灯

2009年2月

目　　录

第 1 篇　高等数学题型

第 2 篇 线性代数题型

第1篇 高等数学题型

第1章 极限和连续

●重要定理、公式和结论

1.1 重要定理

定理1 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f_-(x_0)=f_+(x_0)=A$.

定理2 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$,其中$\alpha(x)$为$x\to 0$时的无穷小量,即$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

定理3(极限的保号性) 如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,而且$A>0$(或$A<0$),那么存在常数$\delta>0$,使得当$0<|x-x_0|<\delta$时,恒有$f(x)>0$(或$f(x)<0$).

定理4 如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,$f(x)>0$(或$f(x)<0$),则$A\geqslant 0$(或$A\leqslant 0$).

定理5(单调有界定理) 单调增加有上界(或单调减少有下界)数列一定有极限.

定理6*(夹逼定理) 设在x_0的邻域内恒有$\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant \psi(x)$,且

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim_{x\to x_0}\psi(x)=A,\qquad \text{则}\lim_{x\to x_0} f(x)=A$$

定理7(无穷大和无穷小的关系) 无穷大的倒数为无穷小;非零的无穷小的倒数为无穷大.

定理8(无穷小的运算性质)

(1) 有限个无穷小的代数和为无穷小;

(2) 有限个无穷小的乘积为无穷小;

(3) 无穷小乘以有界变量为无穷小.

定理9 设有函数$f(x)$,$g(x)$,如果在自变量的同一变化过程中,有$\lim f(x)=A$,$\lim g(x)=B$,则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$;

上式第二个式子中的两个极限若有一个不存在,则代数和的极限必不存在;若两个极限都不存在,则代数和的极限不一定存在.

加法运算可推广到有限个中去.

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=AB$;

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$;

(4) $\lim[cf(x)]=c\lim f(x)=cA$,其中 c 为常数.

定理 10 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续,则$|f(x)|$在$[a,b]$上连续.

定理 11 初等函数在其定义域内的区间内连续(因为初等函数中可能有孤立点,所以是在区间内连续).

推论:设 $f(x)$在 x_0 处连续,则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(\lim\limits_{x\to x_0} x)=f(x_0)$;若没有说明 $f(x)$在 x_0 处连续,则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(\lim\limits_{x\to x_0} x)$,即极限符号和函数符号不能交换顺序.

定理 12 设数列$\{x_n\}$收敛于 l,那么它的任一子序列$\{x_{n_k}\}$也收敛,且极限也是 $l(n_k\to\infty)$;反之不真.

定理 13(洛必达法则)

法则Ⅰ$\left(\frac{0}{0}\text{型}\right)$ 设函数 $f(x),g(x)$满足条件

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x)=0$;

(2) $f(x),g(x)$在 x_0 的某邻域内可导,在 x_0 点可除外(在无穷远邻域内可导),且 $g'(x)\neq 0$;

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$存在(或为$\infty$),

则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} \dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

法则Ⅱ$\left(\frac{\infty}{\infty}\text{型}\right)$ 设函数 $f(x),g(x)$满足条件

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x)=\infty$;

(2) $f(x),g(x)$在 x_0 的邻域内可导,在 x_0 点可除外(在无穷远邻域内可导),且 $g'(x)\neq 0$;

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$存在(或为$\infty$),

则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} \dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

使用法则时需注意的事项:

(1) 只有$\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$型的未定式才能使用法则;

(2) 每用完一次法则,要将式子整理化简;

(3) 为简化运算,经常将法则与等价无穷小结合使用;

(4) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x\to\infty}}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$不存在(或$\infty$)不能$\Rightarrow\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x\to\infty}}\dfrac{f(x)}{g(x)}$不存在;

(5) 当 $x\to\infty$时,极限式中含有 $\sin x,\cos x$(或 $x\to 0$ 时,极限式中含有 $\sin\dfrac{1}{x},\cos\dfrac{1}{x}$),则不能用洛必达法则.

1.2 重要公式

公式 1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$， $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$.

若极限式具有如下两个特点：

(1) 是$\dfrac{0}{0}$型极限，这是首要特点，是本质；

(2) $\sin\square$与分数线对面变量$\square$形式一致，则 $\lim\dfrac{\sin\square}{\square}=1$.

公式 2 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$ 或$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

特点如下：

(1) 是 1^{∞} 型极限；

(2) 括号中 1 后的变量(包括符号)与指数幂互为倒数.

公式 3(抓大头准则)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n}{b_0x^m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & m=n\\ 0, & n<m\\ \infty, & n>m\end{cases}$$

即求 $x\to\infty$的极限时，抓住起决定性作用的 x 的最高次幂的项，把其余的项略掉；而求 $x\to 0$ 的极限时，则正好相反.

公式 4(函数连续的充要条件)

函数在一点 x_0 连续的充要条件是

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$$

公式 5

(1) 当 $x\to+\infty$时，以下各函数趋于$+\infty$的速度由慢到快为 $\ln x, x^{\alpha}(\alpha>0), a^{x}(a>1), x^{x}$.

(2) 当 $n\to\infty$时，通项趋于$+\infty$的速度由慢到快为 $\ln n, n^{\alpha}(\alpha>0), a^{n}(a>1), n!, n^{n}$.

(3) 常用数列极限：

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>0)$，特例为$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$；

$\lim\limits_{n\to\infty}p^{n}=0(|p|<1)$；$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^{k}}=0(k>0)$；$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}=\mathrm{e}$.

(4) 常用函数极限：

$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$；$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$；

$\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arccot} x=0$；$\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arccot} x=\pi$；

$\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{x}=\infty$；$\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{x}=0$；$\lim\limits_{x\to 0^+}x^{x}=1$.

注： 若 $x\to\infty$的极限式中含有 $a^{x}(a>0, a\neq1)$，特别是 e^{x}，或 $\arctan x$，或 $\operatorname{arccot} x$，或$|x|$(或 $x\to 0$ 时，极限式中含 $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$，或 $\arctan\dfrac{1}{x}$，或 $\operatorname{arccot}\dfrac{1}{x}$，或$|x|$)，一定分别求出 $x\to+\infty, x\to-\infty$ (或 $x\to 0^+, x\to 0^-$)时的极限，若两者相等，则 $x\to\infty$(或 $x\to 0$)时的极限存在，否则不存在.

● 核心

$$= 2\lim_{x \to 0} \frac{1}{g(x)} = 2$$

例 2　把 $x \to 0^+$ 时的无穷小量 $\alpha = \int_0^x \cos t^2 \mathrm{d}t, \beta = \int_0^{x^2} \tan\sqrt{t}\mathrm{d}t, \gamma = \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 \mathrm{d}t$ 进行排列，使后者是前者的高阶无穷小，正确的排列次序为(　　).

(A) α,β,γ　　(B) α,γ,β　　(C) β,α,γ　　(D) β,γ,α

分析：用定义做时，一般用洛必达法则，即对分子、分母求导，所以也可以先求导，然后再比较.

解：

$$\alpha' = \cos x^2 \to 1(x \to 0^+), \qquad \beta' = 2x\tan x \sim 2x^2(x \to 0^+)$$

$$\gamma' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x^3 \sim \frac{1}{2}x(x \to 0^+)$$

由于当 $x \to 0^+$ 时，x 的次数越高，根据题意，排列越靠前；又根据洛必达法则，函数的排列次序和导函数的排列次序是相同的，故(B)为正确选项.

例 3　设 $f(x) = 2x - \sin x - \sin x\cos x$，当 $x \to 0$ 时，$f(x)$ 是 x 的(　　)阶无穷小.

解：

$$\lim_{x \to 0}\frac{f(x)}{x^n}(n\text{ 待定}) = \lim_{x \to 0}\frac{2x - \sin x - \sin x\cos x}{x^n}$$

$$= \lim_{x \to 0}\frac{2x - \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x}{x^n} = \lim_{x \to 0}\frac{2 - \cos x - \cos 2x}{nx^{n-1}}$$

$$= \lim_{x \to 0}\frac{\sin x + 2\sin 2x}{n(n-1)x^{n-2}} = \lim_{x \to 0}\frac{\cos x + 4\cos 2x}{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}$$

最后一个极限式中，当 $x \to 0$ 时，分子的极限为 5，若此极限存在，则必须 $n=3$.

注：三角函数一般通过积化和差或倍角公式进行降阶.

题型 2　求未定式函数极限

1. 求 $\frac{0}{0}$ 型未定式函数极限

若 $\lim f(x) = 0, \lim g(x) = 0$，则 $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ 称为 $\frac{0}{0}$ 型未定式函数极限.

思路启迪：(1) 通过因式分解或根式有理化，消去使分母为零的因式，再用极限运算法则或连续函数的性质求解.

所谓根式有理化，是指极限式中含有 $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$（或 $a \pm \sqrt{b}$），在求极限之前先用它们的共轭根式 $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$（或 $a \mp \sqrt{b}$）分别乘以分子、分母，使其“0”因子呈现出来的一种运算.

(2) 利用等价无穷小代换.

(3) 利用洛必达法则求极限（这是求 $\frac{0}{0}$ 型极限最有效的方法，但是要注意使用条件）.

(4) 若前三种方法无法求得极限，可考虑用变量代换（通常是作倒代换，令 $x = \frac{1}{t}$ 或 $x = \frac{1}{t^2}$）.