中等专业学校教材

数　学

SHUXUE

第三册

辽宁省中专数学教材编写组 编

辽宁科学技术出版社

中等专业学校教材

数学

辽宁省中专数学教材编写组 编

辽宁科学技术出版社

主　编　陶增骈
副主编　张成卓　李大发　由震云
编　委　（按姓氏笔画为序）
于殿生　方桂梅　王化久
马　骦　由震云　刘晓东
李大发　李玉臣　李挺雄
张成卓　孟繁杰　胡晋延
陶增骈　教勤章　崔润泉

中等专业学校教材
数　　学
Shuxue
第三册
辽宁省中专数学教材编写组　编

辽宁科学技术出版社出版　（沈阳市南京街6段1里2号）
辽宁省新华书店发行　沈阳市第一印刷厂印刷

开本：787×1092　1/32　印张：12 $\frac{1}{4}$ 字数：270,000
1989年6月第1版　1989年6月第1次印刷

责任编辑：白京久　插　图：李艳芬
封面设计：曹太文

印数：1-13,840
ISBN7-5381-0657-X/G·97　定价：3.35元

前　　言

本套教材是根据1983年教育部审定的四年制《中等专业学校数学教学大纲》的要求，根据中专数学教学内容要深浅适度，在应用上要加强的原则，从辽宁省中专数学教学的实际出发，适当参考现行中专数学教材内容，在辽宁省教育委员会的指导下，组织辽宁省部分中等专业学校长期从事中专数学教学工作的副教授、高级讲师、讲师编写的。在编写内容上，注意了与初中数学知识的衔接，突出了基础知识、基本理论和基本应用。在推理论证方式的选择上，力求避繁就简、科学直观。

本套教材分基础数学（一、二、三册）和应用数学（四册）两部分。招收初中学生的学校使用1～4册，招收高中学生的学校使用3～4册。

本套教材除经典内容外，均由辽宁师范大学梁宗巨教授、贺贤孝副教授主审。辽宁师范大学的谢光熹副教授、大连工业学校的林惠泉同志也参加了部分章节的审订工作。

本册为基础数学的第三册，包括极限与连续、一元微积分、微分方程等内容。参加本册教材编写的有王化久（第十五、十七、十九章）、张传仁（第十六、十八章）、杨汉山（第二十章）、刘泽民（第十七章）、李大发（第二十一章）等同志，由沈阳市机电工业学校王化久同志统稿。

由于时间仓促，水平有限，不当之处敬请读者批评指正，以便修订。

辽宁省中专数学教材编写组

1988.11

目　　录

第十五章　函数、极限与连续

函数、极限都是数学中重要的基本概念，也是微积分的基础。本章将在进一步复习函数概念的基础上，着重讨论函数的极限和函数的连续性等问题。

§15—1　函　　数

一　函数的概念

在客观世界中有许多变量，它们之间往往不是孤立的，而是互相依赖，互相制约的。变量之间这种相互依赖的确定关系在数学上就称为函数关系。

1　函数的定义

定义　设D是一个实数集，如果对属于D的每一个数x，按照某个对应关系，y都有唯一确定的值和它对应，则称变量y是变量x的**函数**，记作$y=f(x)$，且称x为**自变量**，y为**因变量**，数集D称为函数的**定义域**。当x取遍D中的一切实数值时，与它对应的函数值的集合M称为函数的**值域**。

在函数的定义中，并没有要求自变量变化时，函数的对应值一定要变。重要的是：对于每个自变量$x\in D$，都有确定的$y\in M$与之对应。由此可知$y=c$（c是常量）也是自变量x的函数，因为当$x\in R$时，都有确定的c值和它对应。

2　函数的定义域

定义域是函数定义中的一个重要内容。因此研究函数时，必须注意它的定义域，在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义来确定的。例如，圆的面积A与它的半

径r之间的函数关系由公式$A=\pi r^2$给定，当半径r取任何正数时，由公式可以确定圆面积A的相应数值。所以函数$A=\pi r^2$的定义域为无限区间 $(0,+\infty)$ 。当函数用数学算式表达时，它的定义域就使数学式子有意义的自变量的一切数值，可依下列规律求出函数的定义域：

（1）当函数为分式时，分母不能为零；

（2）当函数为偶次根式时，根号内的式子必须大于或等于零；

（3）当函数为对数式时，真数必须大于零；

（4）在arcsinu或arccosu中必须$|u|\leqslant 1$；

（5）如果函数表达式中含有分式、根式、对数式及反三角函数式，则应取各部分定义域的交集。

例 1 求下列函数的定义域：

（1）$y=x^2-2x+3$；

（2）$y=\dfrac{1}{4-x^2}+\sqrt{x+2}$；

（3）$y=\lg\dfrac{x}{x-2}$；

（4）$y=\sqrt{x^2-4}+\arcsin\dfrac{x}{2}$。

解 （1）$y=x^2-2x+3$

因为当x取任何实数时，y都有一个确定的值与它对应，所以函数y的定义域为 $(-\infty,+\infty)$ 。

注：当函数是多项式时，定义域为 $(-\infty,+\infty)$。

（2）$y=\dfrac{1}{4-x^2}+\sqrt{x+2}$

因为$4-x^2\neq 0$，所以$x\neq\pm 2$；

因为$x+2\geqslant 0$，所以$x\geqslant -2$；

所以函数的定义域为$(-2, 2)\cup(2, +\infty)$。

（3）$y=\lg\frac{x}{x-2}$

因为$\frac{x}{x-2}>0$，所以$x>2$或$x<0$。

所以函数的定义域为$(-\infty, 0)\cup(2, +\infty)$。

（4）$y=\sqrt{x^2-4}+\arcsin\frac{x}{2}$

因为$x^2-4\geqslant 0$，所以$|x|\geqslant 2$，即$x\geqslant 2$或$x\leqslant -2$；

又因为$\left|\frac{x}{2}\right|\leqslant 1$，即$-2\leqslant x\leqslant 2$。

所以函数的定义域为$x=\pm 2$。

应当注意：

①函数的定义域不一定是区间。如（4）的定义域是孤立的点± 2；

②仔细地研究一下函数的定义，就可以发现，构成函数的要素有两个：i对应关系；ii定义域。两个函数只有当它们的定义域和对应关系完全相同时，这两个函数才相同。

如函数$y=\sin^2x+\cos^2x$与$y=1$，它们的定义域和对应关系都相同，所以它们是相同的函数。

又如$y=\frac{x^2-1}{x-1}$与$y=x+1$，它们的定义域不同，所以它们不是相同的函数。

3　函数与函数值的记号

y是x的函数可以记为$y=f(x)$，也可以记为$y=\varphi(x)$、$y=F(x)$，这里的"f"、"φ"、"F"表示y与x之间的对应规律，

它们是可以任意采用的。但如果要同时考察几个不同的函数，为了区别清楚，就要采用不同的函数记号来表示。

函数$y=f(x)$当$x=x_0\in D$时，对应的函数值记为$f(x_0)$或$y|_{x=x_0}$，并称函数在x_0处有定义。这时要注意$f(x_0)$不是x_0的函数，而只是函数$f(x)$在点x_0的值。

例 2 已知$f(x)=\sqrt{4-x^2}$，求$f(0)$、$f(1)$、$f(a+1)$。

解 $f(0)=\sqrt{4-0^2}=2$；

$f(1)=\sqrt{4-1^2}=\sqrt{3}$；

$$f(a+1)=\sqrt{4-(a+1)^2}=\sqrt{4-a^2-2a-1}=\sqrt{3-a^2-2a}。$$

例 3 若$\varphi(x)=\dfrac{|x-2|}{x+1}$，求$\varphi(-2)$，$\varphi(a)$。

解 $\varphi(-2)=\dfrac{|-4|}{-2+1}=-4$；

$$\varphi(a)=\frac{|a-2|}{a+1}。$$

4 函数的表示法

表示函数的方法，常用的有公式法、表格法和图象法三种。以后我们所讨论的函数常用公式法来表示。

有时，会遇到在不同的范围内用不同的式子表示一个函数。

如：$y=f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\geqslant0\\ -x & x<0\end{cases}$是定义在区间$(-\infty,+\infty)$内的一个函数。当$x\geqslant0$时，$f(x)=\sqrt{x}$；当$x<0$时，$f(x)=-x$。它的图象如图15—1所示。

在不同的范围用不同的式子来表示的函数称为**分段函数**。

求分段函数的函数值时，应把自变量的值代入相应取值范围的表达式进行计算。

例如，在上面的分段函数中，$f(4)=\sqrt{4}=2$，$f(-4)=(-4)=4$。

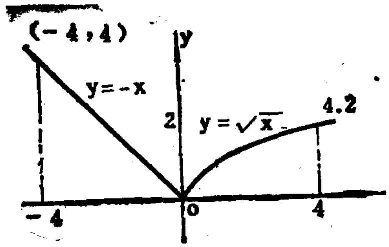

图 15—1

二 函数的几种特性

1 函数的奇偶性

定义 如果函数$y=f(x)$对于定义域内的任意x，都有$f(-x)=f(x)$，则称该函数为**偶函数**；如果$f(x)$对于定义域内的任意x，都有$f(-x)=-f(x)$，则称该函数为**奇函数**。若$f(x)$既非偶函数，又非奇函数，则称$f(x)$**非奇非偶函数**。

对于偶函数，x和$-x$处函数值相等，其图形关于y轴对（图15—2）。对于奇函数，x和$-x$处的函数值只差一负号，其图形关于原点对称（图15—3）。

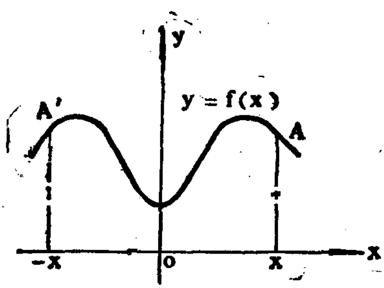

图 15—2

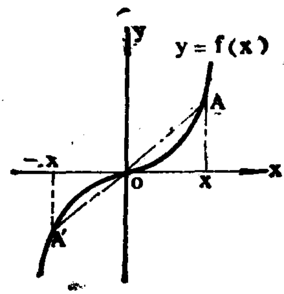

图 15—3

应当注意：根据定义，参看图15—2和图15—3可知，奇函数和偶函数的定义域必须关于原点对称。

例 4 判断下列函数的奇偶性：

（1）$y=x^3$是奇函数，因为$f(-x)=(-x)^3=-x^3$
$=-f(x)$。

（2）$y=x^4-2x^2$是偶函数，因为$f(-x)=(-x)^4-2(-x)^2=x^4-2x^2=f(x)$。

（3）$y=\sin x$是奇函数，因为$f(-x)=\sin(-x)=-\sin x=-f(x)$。

（4）$y=\cos x$是偶函数，因为$f(-x)=\cos(-x)=\cos x=f(x)$。

（5）$y=x+x^2$是非奇非偶函数，因为$f(-x)=-x+(-x)^2=-x+x^2$，它既不等于$-f(x)=-(x+x)^2$，又不等于$f(x)=x+x^2$，所以是非奇非偶函数。

2 函数的单调性

定义 如果函数$f(x)$对于区间(a,b)内的任意两点x_1和x_2，当$x_1<x_2$时，有$f(x_1)<f(x_2)$，则称函数在区间(a,b)内**单调增加**的，区间(a,b)叫做函数$f(x)$的单调增加区间；当$x_1<x_2$时有$f(x_1)>f(x_2)$，则称此函数在区间(a,b)内是**单调减少**的，区间(a,b)叫做函数$f(x)$的单调减少区间。直观地

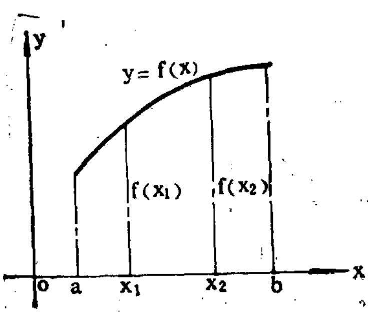

图 15—4

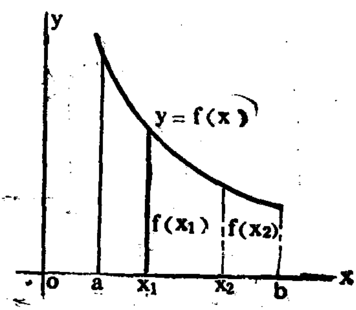

图 15—5

说，单调增加函数，它的图象是随着x的增加而上升的曲线（图15—4）；单调减少函数，它的图象是随着x的增加而下降的曲线（图15—5）。

例如，由图15—6可知，函数$y=x^2$在$[0,+\infty)$上是单调增加的；在区间$(-\infty,0]$上是单调减少的，在区间$(-\infty,+\infty)$内不是单调函数。

又如函数$y=\log_a x$（$a>1$）在定义域$(0,+\infty)$内是单调增加的，$y=\log_a x$（$0<a<1$）在定义域$(0,+\infty)$内是单调减少的（图15—7）。

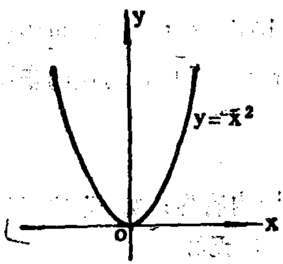

图 15—6

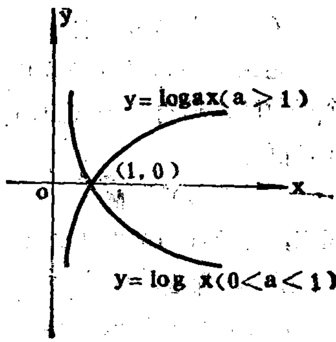

图 15—7

3　函数的周期性

定义　对于函数$y=f(x)$，若存在常数$l>0$使得对于定义域内的一切x都有$f(x+l)=f(x)$，则称此函数为周期函数，满足这个等式的最小正数l叫做此函数的周期。

其图象的特点是：自变量每隔一固定的长度l，图形重复出现（图15—8）。

大家知道，$y=\sin x$和$y=\cos x$都是以2π为周期的周期函数；$y=\mathrm{tg}x$和$y=\mathrm{ctg}x$都是以π为周期的周期函数。函数

$y = A\sin(\omega t + \varphi)$ $(\omega > 0)$ 也是周期函数，其周期为 $\frac{2\pi}{\omega}$。

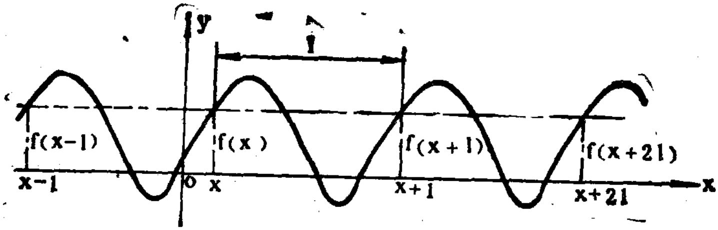

图 15—8

4 函数的有界性

定义 设函数f(x)在区间(a, b)内有定义，如果存在一个正数M，使得对于区间(a, b)内的一切x值，对应的函数值f(x)恒有

$$|f(x)| \leqslant M$$

成立，那么f(x)就称为在区间(a, b)内**有界**；如果这样的数M不存在，那么称f(x)在区间(a, b)内**无界**。

例如，$y = \sin x$在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的，因为对于一切 $x \in R$，$|\sin x| \leqslant 1$都成立，这里$M = 1$。

又如$f(x) = \frac{1}{x}$，在区间(0, 1)内是无界的，因为对于区间 (0, 1) 内的一切x，不存在正数M，使$\left|\frac{1}{x}\right| \leqslant M$成立。但是$f(x) = \frac{1}{x}$在区间[1, 2]内是有界的，因为对于区间[1, 2]上的一切x，都有$\left|\frac{1}{x}\right| \leqslant 1$成立，这里$M = 1$。

三　反函数

在研究两个变量的一个函数关系中，自变量和因变量的地位往往是相对的。设某种商品销售总收入为y，销售量为x，已知该商品的单价为a，如果给定了销售量x，则可以通过关系$y=ax$确定销售总收入y，y是x的函数。反过来，如果给定销售总收入y，则可以由关系$x=\frac{y}{a}$确定销售量x，x是y的函数。我们称后一函数（$x=\frac{y}{a}$）是前一函数($y=ax$)的反函数，或者说它们互为反函数。一般地有：

定义　设函数$y=f(x)$，定义域为D，值域为M。如果对于M中的每一个y值($y\in M$)都可以从关系式$y=f(x)$中确定唯一的x值($x\in D$)与之对应，则称所确定的以y为自变量的函数$x=\varphi(y)$是函数$y=f(x)$的**反函数**，它的定义域为**M**，值域为**D**。

习惯上，函数的自变量都用x表示，所以反函数也可以表示为$y=\varphi(x)$或者$y=f^{-1}(x)$。

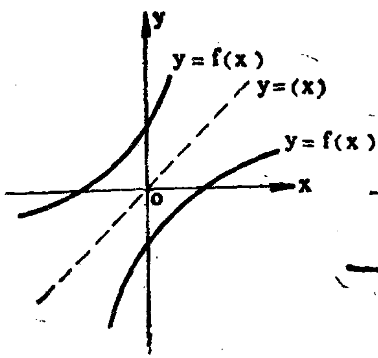

图　15—9

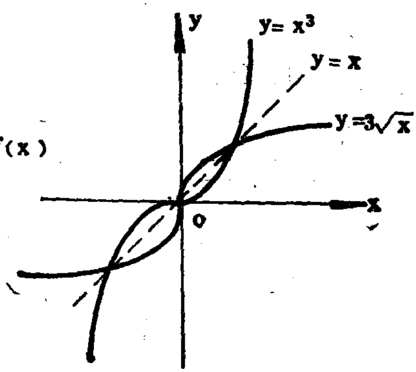

图　15—10

函数$y=f(x)$的图象与其反函数$y=\varphi(x)$的图象关于直线$y=x$对称（图15—9）。

例 5 求$y=x^3$的反函数并作图。

解 $y=x^3$ 的反函数是 $x=\sqrt[3]{y}$ 或 $y=\sqrt[3]{x}$；

$y=x^3$ 的图形与$y=\sqrt[3]{x}$的图形关于直线$y=x$对称（图15—10）。

练习 15—1

1. 填空

（1）函数的对应值是否一定要随自变量的改变而改变？________。

（2）记号$f(x)$和$f(a)$的区别是________。

（3）设$f(x)=\dfrac{2-x}{x+1}$，则$f(0)=$____，$f(1)=$____，$f(a)=$____。

（4） $y=y=\dfrac{1}{x}$的定义域为________；

$y=\dfrac{1}{\lg(3x-2)}$的定义域为________。

（5）$f(x)=\dfrac{x}{x}$与$\varphi(x)=1$是不是相同的函数____，其原因是________________________。

2. 选择题

（1）函数 $y=\sqrt{\sin(\cos x)}$的定义域是（　）；

①$2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$；

②$2k\pi\leqslant x\leqslant 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$；