



全国高职高专教育精品规划教材

应用经济数学

乔树文 主编



北京交通大学出版社
<http://press.bjtu.edu.cn>

全国高职高专教育精品规划教材

应用经济数学

主 编 乔树文

副主编 姚红梅 薛迎杰 张红霞

马利军 陈伟军

参 编 柳 叶 陈许红

北京交通大学出版社

· 北京 ·

内 容 简 介

本教材以“掌握概念、强化应用、培养技能”为指导思想,体现高职高专教育以应用为目的,以必需、够用为度的基本原则。在体系上突出高等数学课程循序渐进、由浅入深的特点;在内容上淡化理论证明、强调应用和计算;在方法上关注现实、案例驱动、强化软件应用。本教材共分6章,内容包括:函数与极限、导数与微分及其应用、积分及其应用、矩阵与线性方程组、概率统计初步、MATLAB数学实验等。

按照高职高专高等数学教学的特点,我们还与教材同步建设了配套的实训练习题集、电子教案、试题库及多媒体教学课件等完整的立体化教学资源。

本教材可作为高等职业技术学院、高等专科学校、成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院和民办高校经管类专业的教材,也可供科技人员参考。

版权所有,侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

应用经济数学/乔树文主编. —北京:北京交通大学出版社, 2009.4

(全国高职高专教育精品规划教材)

ISBN 978-7-81123-571-5

I. 应… II. 乔… III. 经济数学-高等学校:技术学校-教材 IV. F244.0

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第052672号

责任编辑:史鸿飞

出版发行:北京交通大学出版社

电话:010-51686414

北京市海淀区高粱桥斜街44号

邮编:100044

印刷者:北京鑫海金澳胶印有限公司

经销:全国新华书店

开本:185×260 印张:15.5 字数:365千字

版次:2009年4月第1版 2009年4月第1次印刷

书号:ISBN 978-7-81123-571-5/F·436

印数:1~4 000册 定价:27.00元

本书如有质量问题,请向北京交通大学出版社质监组反映。对您的意见和批评,我们表示欢迎和感谢。

投诉电话:010-51686043, 51686008; 传真:010-62225406; E-mail: press@bjtu.edu.cn.

全国高职高专教育精品 规划教材丛书编委会

主任：曹 殊

副主任：武汉生（西安翻译学院）

朱光东（天津冶金职业技术学院）

何建乐（绍兴越秀外国语学院）

文晓璋（绵阳职业技术学院）

梅松华（丽水职业技术学院）

王 立（内蒙古建筑职业技术学院）

文振华（湖南现代物流职业技术学院）

叶深南（肇庆科技职业技术学院）

陈锡畴（郑州旅游职业学院）

王志平（河南经贸职业学院）

张子泉（潍坊科技学院）

王法能（西安外事学院）

邱曙熙（厦门华天涉外职业技术学院）

逯 侃（步长集团 陕西国际商贸学院）

委员：黄盛兰（石家庄职业技术学院）

张小菊（石家庄职业技术学院）

邢金龙（太原大学）

孟益民（湖南现代物流职业技术学院）

周务农（湖南现代物流职业技术学院）

周新焕（郑州旅游职业学院）

成光琳（河南经贸职业学院）

高庆新（河南经贸职业学院）

李玉香（天津冶金职业技术学院）

邵淑华（德州科技职业学院）

宋立远（广东轻工职业技术学院）

孙法义（潍坊科技学院）

刘爱青（德州科技职业学院）

颜 海（武汉生物工程学院）

出版说明

高职高专教育是我国高等教育的重要组成部分,其根本任务是培养生产、建设、管理和
服务第一线需要的德、智、体、美全面发展的应用型专门人才,所培养的学生在掌握必要的
基础理论和专业知识的基础上,应重点掌握从事本专业领域实际工作的基础知识和职业技
能,因此与其对应的教材也必须有自己的体系和特点。

为了适应我国高职高专教育发展及其对教育改革和教材建设的需要,在教育部的指导
下,我们在全中国范围内组织并成立了“全国高职高专教育精品规划教材研究与编审委员会”
(以下简称“教材研究与编审委员会”)。“教材研究与编审委员会”的成员所在单位皆为教学
改革成效较大、办学实力强、办学特色鲜明的高等专科学校、成人高等学校、高等职业学校
及高等院校主办的二级职业技术学院,其中一些学校是国家重点建设的示范性职业技术学
院。

为了保证精品规划教材的出版质量,“教材研究与编审委员会”在全国范围内选聘“全
国高职高专教育精品规划教材编审委员会”(以下简称“教材编审委员会”)成员和征集教
材,并要求“教材编审委员会”成员和规划教材的编著者必须是从事高职高专教学第一线的
优秀教师和专家。此外,“教材编审委员会”还组织各专业的专家、教授对所征集的教材进
行评选,对所列选教材进行审定。

此次精品规划教材按照教育部制定的“高职高专教育基础课程教学基本要求”而编写。
此次规划教材按照突出应用性、针对性和实践性的原则编写,并重组系列课程教材结构,力
求反映高职高专课程和教学内容体系改革方向;反映当前教学的新内容,突出基础理论知
识的应用和实践技能的培养;在兼顾理论和实践内容的同时,避免“全”而“深”的面面俱
到,基础理论以应用为目的,以必需、够用为尺度;尽量体现新知识和新方法,以利于学生
综合素质的形成和科学思维方式与创新能力的培养。

此外,为了使规划教材更具广泛性、科学性、先进性和代表性,我们真心希望全国从事
高职高专教育的院校能够积极加入到“教材研究与编审委员会”中来,推荐有特色的、有创
新的教材。同时,希望将教学实践的意见和建议,及时反馈给我们,以便对出版的教材不断
修订、完善,不断提高教材质量,完善教材体系,为社会奉献更多更新的与高职高专教育配
套的高质量教材。

此次所有精品规划教材由全国重点大学出版社——北京交通大学出版社出版。适应于各类高等专科学校、成人
高等学校、高等职业学校及高等院校主办的二级技术学院
使用。

全国高职高专教育精品规划教材研究与编审委员会

2009年3月

总 序

历史的年轮已经跨入了公元 2009 年,我国高等教育的规模已经是世界之最,2008 年毛入学率达到 23%,属于高等教育大众化教育的阶段。根据教育部 2006 年第 16 号《关于全面提高高等职业教育教学质量的若干意见》等文件精神,高职高专院校要积极构建与生产劳动和社会实践相结合的学习模式,把工学结合作为高等职业教育人才培养模式改革的重要切入点,带动专业调整与建设,引导课程设置、教学内容和教学方法改革。由此,高职高专教学改革进入了一个崭新阶段。

新设高职类型的院校是一种新型的专科教育模式,高职高专院校培养的人才应当是应用型、操作型人才,是高级蓝领。新型的教育模式需要我们改变原有的教育模式和教育方法,改变没有相应的专用教材和相应的新型师资力量的现状。

为了使高职院校的办学有特色,毕业生有专长,需要建立“以就业为导向”的新型人才培养模式。为了达到这样的目标,我们提出“以就业为导向,要从教材差异化开始”的改革思路,打破高职高专院校使用教材的统一性,根据各高职高专院校专业和生源的差异性,因材施教。从高职高专教学最基本的基础课程,到各个专业的专业课程,着重编写出实用、适用高职高专不同类型人才培养的教材,同时根据院校所在地经济条件的不同和学生兴趣的差异,编写出形式活泼、授课方式灵活、引领社会需求的教材。

培养的差异化是高等教育进入大众化教育阶段的客观规律,也是高等教育发展与社会发展相适应的必然结果。也只有使在校学生接受差异性的教育,才能充分调动学生浓厚的学习兴趣,才能保证不同层次的学生掌握不同的技能专长,避免毕业生被用人单位打上“批量产品”的标签。只有高等学校的培养有差异性,其毕业生才能有特色,从而在就业市场具有竞争力,从而使高职高专的就业率大幅度提高。

北京交通大学出版社出版的这套高职高专教材,是在教育部“十一五规划教材”所倡导的“创新独特”四字方针下产生的。教材本身融入了很多较新的理念,出现了一批独具匠心的教材,其中,扬州环境资源职业技术学院的李德才教授所编写的《分层数学》,教材立意很新,独具一格,提出以生源的质量决定教授数学课程的层次和级别。还有无锡南洋职业技术学院的杨鑫教授编写的一套《经营学概论》系列教材,将管理学、经济学等不同学科知识融为一体,具有很强的实用性。

这套系列教材是由长期工作在第一线、具有丰富教学经验的老师编写的,具有很好的指导作用,达到了我们所提倡的“以就业为导向培养高职高专学生”和因材施教的目标要求。

教育部全国高等学校学生信息咨询与就业指导中心择业指导处处长

中国高等教育学会毕业生就业指导分会秘书长

曹 殊 研究员

前 言

本教材是我们在认真总结、分析并吸收全国高职高专高等数学教学改革的经验基础上,根据教育部颁发的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》,遵循“以应用为目的,以必需、够用为度”的原则,结合我们多年从事经济数学方面的科学研究与教学改革经验及同类教材的发展趋势,针对大专层次的财经管理类专业所需数学知识编写而成,是一本适宜于财经、管理、社科及文史类专业学生学习高等数学课程的教材。

本教材力求体现基础课为专业服务的思想,在保证科学性的基础上,强调讲清概念,减少理论推导,注重学生基本运算能力和分析问题、解决问题能力的培养。本教材的内容及深度以高职高专财经管理专业的需要为基础,以学生专业学习与岗位工作需要为依据,理论知识以够用为度,涉及性质与定理的内容,以图形描述或数值表达或文字说明加以适当解释,淡化逻辑推理。以“专业结合,突出应用”为原则,教材体系突出与财经管理专业紧密结合,体现数学知识专业化、应用问题数学化,突出高等数学在财经管理专业中的应用性。以“案例驱动,问题导向”为原则,数学概念以实际案例为背景导入,知识的展开以解决问题为导向,形成数学知识来源于实际问题,反过来又应用于实际问题。与本教材相配套的有电子教案、多媒体课件、实训习题集、试题库等,供学生学习与老师教学使用。

参加本教材编写的有浙江东方职业技术学院的乔树文、柳叶,陕西邮电职业技术学院的姚红梅,黑龙江林业职业技术学院的薛迎杰,陕西服装艺术职业学院的张红霞,宁夏工商职业技术学院的马利军,浙江嘉兴职业技术学院的陈伟军、陈许红等教师。全书由乔树文完成最后统稿。

在教材编写过程中得到了北京交通大学出版社的指导和帮助,以及各编写教师所在院校的大力支持与协作,在此一并表示感谢。

由于编者水平有限,有不妥之处,敬请广大读者批评指正。

编 者

2009年2月18日

目 录

第1章 函数与极限	1
1.1 函数	1
1.1.1 函数的概念	1
1.1.2 函数的几种特性	3
1.1.3 初等函数	5
1.1.4 常用经济函数	9
1.2 极限的概念	12
1.2.1 数列的极限	12
1.2.2 函数的极限	13
1.3 无穷小量与无穷大量	17
1.3.1 无穷小量	17
1.3.2 无穷大量	19
1.4 极限的运算	19
1.4.1 极限的四则运算法则	19
1.4.2 两个重要极限	22
1.5 函数的连续性	25
1.5.1 函数连续的概念	26
1.5.2 函数的间断点	28
1.5.3 闭区间上连续函数的性质	29
本章小结	29
同步实训1	31
第2章 导数与微分及其应用	36
2.1 导数的概念	36
2.1.1 案例	36
2.1.2 导数的定义	37
2.1.3 导数的几何意义	39
2.1.4 函数可导与连续的关系	40
2.2 导数的运算	40
2.2.1 导数的基本公式	40
2.2.2 导数的四则运算法则	41

2.2.3 复合函数的导数	42
2.2.4 高阶导数	44
2.2.5 隐函数的导数	44
2.2.6 取对数求导法	46
2.3 函数的微分	46
2.3.1 函数微分的概念	46
2.3.2 微分基本公式与运算法则	48
2.3.3 微分在近似计算中的应用	49
2.4 利用导数求极限	50
2.5 函数的单调性与极值	52
2.5.1 函数的单调性	52
2.5.2 函数的极值	54
2.6 函数的最值与导数在经济学中的应用	56
2.6.1 函数的最值	56
2.6.2 最值在经济问题中的应用举例	57
2.6.3 导数在经济分析中的应用	58
本章小结	61
同步实训 2	63
第 3 章 积分及其应用	71
3.1 不定积分的概念	71
3.1.1 原函数的概念	71
3.1.2 不定积分的概念	72
3.1.3 不定积分的性质	73
3.1.4 不定积分的基本公式	74
3.2 定积分的概念	76
3.2.1 案例	76
3.2.2 定积分的定义	78
3.2.3 定积分的几何意义	79
3.2.4 定积分的性质	80
3.3 微积分基本公式	82
3.3.1 变上限积分函数	82
3.3.2 微积分基本公式	83
3.4 换元积分法	85
3.4.1 第一类换元法 (凑微分法)	86
3.4.2 第二类换元法 (去根号法)	89
3.5 分部积分法	90
3.6 无限区间上的广义积分	93
3.7 定积分的应用	95

3.7.1 平面图形的面积	95
3.7.2 旋转体的体积	97
3.7.3 定积分在经济上的应用	98
3.8 微分方程初步	100
3.8.1 微分方程的概念	100
3.8.2 可分离变量的一阶微分方程	104
3.8.3 一阶线性微分方程	106
本章小结	109
同步实训 3	113
第 4 章 矩阵与线性方程组	121
4.1 矩阵的概念	121
4.1.1 矩阵定义	121
4.1.2 特殊的矩阵	122
4.2 矩阵的运算	124
4.2.1 矩阵的加法	124
4.2.2 矩阵的数乘	127
4.2.3 矩阵的乘法	129
4.2.4 矩阵的转置	132
4.2.5 逆矩阵	135
4.3 矩阵的初等行变换	136
4.3.1 矩阵的初等行变换	137
4.3.2 逆矩阵的求法	139
4.3.3 矩阵的秩	141
4.4 线性方程组的解	142
4.4.1 线性方程组解的判定	142
4.4.2 线性方程组的解	144
本章小结	146
同步实训 4	148
第 5 章 概率统计初步	154
5.1 随机事件与概率	154
5.1.1 随机现象	154
5.1.2 随机事件	155
5.1.3 事件间的关系与运算	156
5.1.4 事件的概率	157
5.2 概率的基本公式	158
5.2.1 概率的加法公式	158
5.2.2 条件概率	160

5.2.3	乘法公式	161
5.2.4	事件的独立性	162
5.2.5	二项概率公式	162
5.2.6	全概率公式	163
5.3	随机变量及其分布	164
5.3.1	随机变量	164
5.3.2	离散型随机变量	165
5.3.3	常用离散型分布	166
5.3.4	连续型随机变量	168
5.3.5	常用的连续型分布	169
5.4	随机变量的数字特征	172
5.4.1	数学期望	172
5.4.2	方差	173
5.5	数理统计初步	175
5.5.1	点估计	175
5.5.2	一元线性回归分析	177
	本章小结	180
	同步实训 5	183
第 6 章	MATLAB 数学实验	189
6.1	MATLAB 简介	189
6.1.1	MATLAB 安装与启动	189
6.1.2	MATLAB 的窗口	189
6.1.3	工作空间命令行的编辑与运行	190
6.1.4	MATLAB 常用的常量、变量与函数	191
6.1.5	M 文件	192
6.1.6	MATLAB 中函数运算与作图	192
6.2	MATLAB 在微积分中的应用	195
6.2.1	求极限	195
6.2.2	求导数	196
6.2.3	求极值	197
6.2.4	求积分	198
6.2.5	解微分方程	199
6.3	MATLAB 在线性代数中的应用	199
6.3.1	用 MATLAB 进行矩阵运算	199
6.3.2	用 MATLAB 求解线性方程组	202
6.4	MATLAB 在概率统计中的应用	203
6.4.1	常见概率分布的计算	203
6.4.2	随机变量数字特征的计算	205

6.4.3 统计初步	207
同步实训 6 (上机完成)	208
附录 A 基本初等函数的图像与主要性质	210
附录 B 初等数学常用公式和相关知识选编	213
附录 C 标准正态分布函数数值表	220
附录 D 同步实训参考答案与解法提示	221
参考文献	233

第1章 函数与极限

学习目标

知识目标

- 了解函数的有界性、单调性、奇偶性、周期性的概念.
- 了解左右极限的概念, 无穷小、无穷大的概念.
- 理解函数、基本初等函数、复合函数、分段函数的概念.
- 理解函数极限的概念, 无穷小的性质、函数的连续性.
- 掌握复合函数的复合过程、极限的运算、两个重要极限.

能力目标

- 能应用极限的四则运算法则、两个重要公式求极限.
- 能应用左右极限的概念求分段函数在分段点的极限.
- 能运用函数关系描述经济问题.

重点和难点

- 极限和连续的概念、极限的运算和两个重要极限.

极限概念是微积分学一个最基本、最重要的概念. 一方面, 它是建立微积分学的基础. 另一方面, 极限的思想和分析方法将贯穿微积分学的始终, 函数的连续性、导数与积分等都将借助于极限方法来描述. 本章主要讨论函数的极限与连续的基本概念、基本性质和基本运算, 并介绍它们的一些实际应用.

1.1 函 数

函数是微积分学的主要研究对象, 用数学方法解决经济领域中的应用问题, 首先就是要建立函数关系.

1.1.1 函数的概念

在研究各种实际问题的过程时, 经常会遇到两种不同类型的量: 一种是变的, 即在所研究问题的过程中可取不同的数值; 另一种在所研究问题的过程中保持不变, 只取一个固定值, 前者为变量, 后者为常量. 在同一个过程中, 往往有几个变量同时变化, 但是它们的变化不是孤立的, 而是按照一定的规律互相联系着. 变量之间的互相依赖关系, 就是下面所要介绍的函数关系.

案例 1-1 [圆的面积] 圆的面积与它的半径之间的关系可表示为

$$A = \pi r^2.$$

案例 1-2 [存款利息] 我们去银行存钱, 假设一年期整存整取的年利率为 4.14%, 则存款金额 x 与一年到期时的利息 y 之间的对应关系如表 1-1 所示.

表 1-1

存款金额 x /元	500	1 000	2 000	5 000	10 000	20 000
一年到期时利息 y /元	20.7	41.4	82.8	207	414	828

案例 1-3 [气温变化] 气象台用自动温度记录仪记录下某地一昼夜气温变化的曲线. 如图 1-1 所示.

案例 1-4 [短信收费] 移动公司规定短信收费标准为: 当月所发短信不超过 500 条, 只收月租费 25 元; 超过 500 条的, 每条加收 0.1 元, 则短信费用和用户当月所发短信条数的关系可用下面的形式给出:

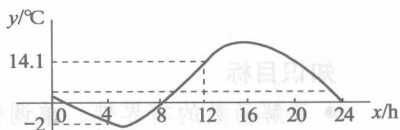


图 1-1

$$y = \begin{cases} 25 & x \leq 500 \\ 25 + 0.1(x - 500) & x > 500 \end{cases}$$

分析 以上列举的案例, 虽然是来自不同的领域, 而且具有不同的表示形式, 有公式、表格、图形, 但它们的共性是: 都反映了在同一过程中有着两个相互依赖的变量, 当其中一个量在某数集内取值时, 按一定的规则, 另一个量有唯一确定的值与之对应. 变量之间的这种关系就是函数关系.

定义 1-1 设 x 和 y 是两个变量, 若当变量 x 在非空数集 D 内任取一数值时, 变量 y 依照某一对应法则 f 总有唯一确定的数值与之对应, 则称变量 y 是关于变量 x 的函数. 记作

$$y = f(x), x \in D$$

其中 x 称为自变量, y 称为因变量, 自变量 x 的取值范围 D 称为函数的定义域, 相应 y 的取值范围称为函数的值域.

当 x 取数值 $x_0 \in D$ 时, 则称该函数在 x_0 有定义, 与 x_0 对应的 y 的数值称为函数在点 x_0 的函数值, 记作

$$f(x_0) \text{ 或 } y|_{x=x_0}$$

定义域和值域都是数集, 一般数集常用区间或邻域的形式表示. 常见的区间有:

开区间 $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$; 闭区间 $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$;

半开区间 $[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$ 或 $(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$.

还有所谓无限区间:

$$[a, +\infty) = \{x \mid a \leq x < +\infty\}; (-\infty, b] = \{x \mid -\infty < x \leq b\};$$

$$(-\infty, +\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}.$$

邻域也是一个经常用到的概念. 点 x_0 为中心的任何开区间称为点 x_0 的邻域, 记作 $U(x_0)$. 设 δ 是任一正数, 则开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 就是点 x_0 的一个邻域, 这个邻域称为点

x_0 的 δ 邻域, 记作 $U(x_0, \delta)$, 即

$U(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, 点 x_0 称为此邻域的中心, δ 称为此邻域的半径.

实训 1-1 求下列函数的定义域.

$$(1) y = \frac{3}{5x^2 + 2x}; \quad (2) y = \sqrt{9 - x^2}; \quad (3) y = \frac{1}{\ln(x-1)}.$$

解 (1) 在分式 $\frac{3}{5x^2 + 2x}$ 中分母不能为零, 所以 $5x^2 + 2x \neq 0$, 解得 $x \neq -\frac{2}{5}$ 且 $x \neq 0$, 即定义域为 $(-\infty, -\frac{2}{5}) \cup (-\frac{2}{5}, 0) \cup (0, +\infty)$.

(2) 在偶次根式中, 被开方式必须大于等于零, 所以有 $9 - x^2 \geq 0$, 解得 $-3 \leq x \leq 3$, 即定义域为 $[-3, 3]$.

(3) 在对数式中, 真数必须大于零, 所以 $x - 1 > 0$, 即 $x > 1$. 又分式中分母不能为零, 所以 $\ln(x - 1) \neq 0$, 即 $x - 1 \neq 1$, 即 $x \neq 2$. 综合起来得出所求函数的定义域为

$$D = (1, 2) \cup (2, +\infty)$$

根据函数的定义可知, 定义域、对应法则、值域构成了函数三要素. 显然, 如果两个函数的三要素相同, 那么我们就认为这两个函数是同一个函数.

函数的表示方法一般有 3 种: 图示法、表格法和公式法. 其中图示法和公式法是数学学习过程中最常用的两种表示方法, 常结合使用.

1.1.2 函数的几种特性

函数的几种特性包括奇偶性、单调性、周期性和有界性. 由于函数的几种特性在中学都已学习过, 这里只作简要说明.

1. 函数的奇偶性

曲线 $y = x^3$ 关于坐标原点对称, 即自变量取一对相反数值时, 相对应的一对函数值也恰是相反数, 这时称 $y = x^3$ 为奇函数, 如图 1-2 所示. 曲线 $y = x^2$ 关于 y 轴对称, 即自变量取一对相反数时, 相对应的一对函数值却相等, 这时称 $y = x^2$ 为偶函数, 如图 1-3 所示.

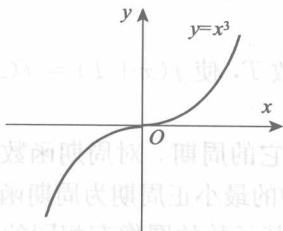


图 1-2

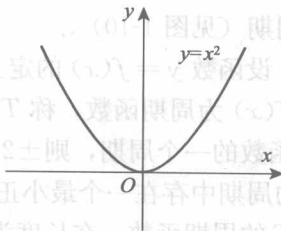


图 1-3

一般地, 设函数 $y = f(x)$ 在集合 D 上有定义, 如果对任意的 $x \in D$, 恒有 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数; 如果对任意的 $x \in D$, 恒有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数.

根据定义可知, 奇、偶函数的定义域必关于原点对称. 奇函数的图像关于原点对称; 偶

函数的图像关于 y 轴对称.

实训 1-2 判断下列函数的奇偶性.

$$(1) f(x) = 3x^2 - 2x^4 + 1; \quad (2) f(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{2}; \quad (3) f(x) = 5x^3 - 2.$$

解 (1) 因为 $f(-x) = 3(-x)^2 - 2(-x)^4 + 1 = 3x^2 - 2x^4 + 1 = f(x)$, 所以 $f(x) = 3x^2 - 2x^4 + 1$ 为偶函数.

(2) 因为 $f(-x) = \frac{a^{-x} - a^{-(-x)}}{2} = \frac{a^{-x} - a^x}{2} = -\frac{a^x - a^{-x}}{2} = -f(x)$, 所以 $f(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{2}$ 为奇函数.

(3) 因为 $f(-x) = 5(-x)^3 - 2 = -5x^3 - 2 \neq f(x)$, $f(-x) \neq -f(x)$, 所以 $f(x) = 5x^3 - 2$ 为非奇非偶函数.

2. 函数的单调性

如图 1-2 所示. 观察函数 $y = x^3$ 的图像, 从左向右看 (沿着 x 轴的正方向) 这是一条上升的曲线, 即函数值随着自变量的值增大而增大, 这样的函数称为在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增加的. 如图 1-3 所示, 在区间 $(-\infty, 0)$ 内, 观察函数 $y = x^2$ 的图像, 我们会看到, 情况完全相反, 这是一条下降的曲线, 即函数值随着自变量的值增大而减少, 这样的函数称为在区间 $(-\infty, 0)$ 内是单调减少的.

一般地, 设函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内有定义, 如果对于 (a, b) 内的任意两点 x_1 和 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内单调增加; 如果对于 (a, b) 内的任意两点 x_1 和 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内单调减少.

单调增加函数与单调减少函数统称为单调函数, 若函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内是单调函数, 则称 (a, b) 是该函数的单调区间.

3. 函数的周期性

我们已经知道, 正弦函数 $y = \sin x$ 是周期函数, 即有

$$\sin(x + 2n\pi) = \sin x (n = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

即 $\pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ 都是函数 $y = \sin x$ 的周期, 而 2π 是它的最小正周期, 一般称 2π 为正弦函数的周期 (见图 1-10).

一般地, 设函数 $y = f(x)$ 的定义域 D , 如果存在正数 T , 使 $f(x+T) = f(x)$ 成立, 则称函数 $y = f(x)$ 为周期函数, 称 T 是它的一个周期.

若 T 是函数的一个周期, 则 $\pm 2T, \pm 3T, \dots$ 也都是它的周期. 对周期函数 $y = f(x)$, 若它在所有的周期中存在一个最小正数, 则通常称周期中的最小正周期为周期函数的周期.

周期为 T 的周期函数, 在长度为 T 的各个区间上, 其函数的图像有相同的形状. 对正弦函数 $y = \sin x$, 在长度为 2π 的各个区间上, 其图像的形状显然是相同的.

4. 函数的有界性

在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上, 函数 $y = \sin x$ 的图像 (见图 1-10) 介于两条平行直线 $y = -1$ 和 $y = 1$ 之间, 即有 $|\sin x| \leq 1$, 这时称 $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界函数. 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内, 函数 $y = x^3$ 的图像 (见图 1-2) 向上、向下都是可以无限延伸, 不可能找到两条平行于 x 轴的直线, 使这个图像介于这两条直线之间, 这时称 $y = x^3$ 在区间

$(-\infty, +\infty)$ 内是无界函数.

一般地, 设函数 $y = f(x)$ 在集合 D 上有定义, 如果存在一个正数 M , 对于所有的 $x \in D$, 恒有 $|f(x)| \leq M$, 则称函数 $f(x)$ 在 D 上是有界函数. 如果不存在这样的正数 M , 则称 $f(x)$ 在 D 上是无界函数.

有界函数的图像必介于两条直线 $y = -M$ 和 $y = M$ 之间.

例如, 反正切函数 $y = \arctan x$ 在定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界函数 (见图 1-4).

1.1.3 初等函数

1. 基本初等函数

基本初等函数通常是指常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数.

(1) 常数函数 $y = C$ (C 为常数), 它的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 其图像如图 1-5 所示.

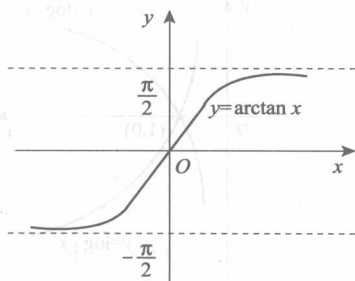


图 1-4

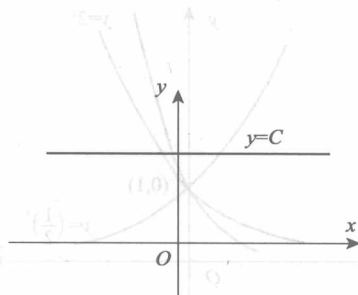


图 1-5

(2) 幂函数 $y = x^\alpha$ (α 为实数), 它的定义域随 α 而异. 如 $y = x^2$, $y = x^{\frac{2}{3}}$, 定义域为 $(-\infty, +\infty)$; 如 $y = x^3$, $y = x^{\frac{1}{3}}$, 其定义域为 $(-\infty, +\infty)$; 如 $y = x^{\frac{1}{2}}$, 其定义域为 $[0, +\infty)$; 如 $y = x^{-1}$, 其定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$; 如 $y = x^{-\frac{1}{2}}$, 定义域为 $(0, +\infty)$ 等.

当 $\alpha > 0$ 时, 函数的图像通过原点 $(0,0)$ 和点 $(1,1)$, 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加. 如图 1-6 所示.

当 $\alpha < 0$ 时, 函数的图像不过原点, 但仍通过点 $(1,1)$, 在 $(0, +\infty)$ 内单调减少. 如图 1-7 所示.

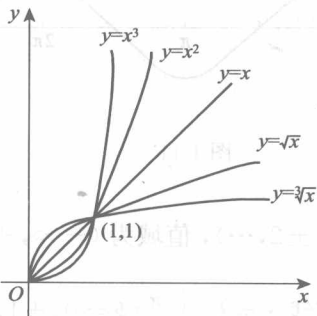


图 1-6

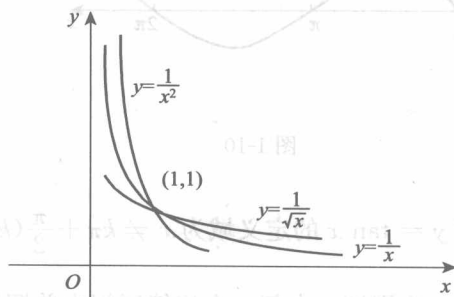


图 1-7