普通高等教育“十一五”规划教材

大学数学全程解决方案系列

高等数学

（下 册）

李春明 陈琳珏
张国栋 李桂范 编

科学出版社
www.sciencep.com

普通高等教育"十一五"规划教材

大学数学全程解决方案系列

高等数学

（下　册）

李春明　陈琳珏　张国栋　李桂范　编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书分上、下两册. 上册内容包括函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、一元函数的积分学、定积分的应用、向量代数与空间解析几何简介; 下册内容包括多元函数的微分学及其应用、多元函数的积分学及其应用、无穷级数、常微分方程.

本书可作为高等院校理工科(非数学类)及相关专业的教材, 也可作为教师、学生和工程技术人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下册/李春明等编. —北京: 科学出版社, 2009
(普通高等教育"十一五"规划教材. 大学数学全程解决方案系列)
ISBN 978-7-03-023737-8

Ⅰ. 高… Ⅱ. 李… Ⅲ. 高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008) 第 200845 号

责任编辑: 李鹏奇　王　静 / 责任校对: 张怡君
责任印制: 张克忠 / 封面设计: 陈　敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com
新蕾印刷厂 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2009 年 1 月第　一　版　开本: B5(720 × 1000)
2009 年 1 月第一次印刷　印张: 23 3/4
印数: 1—7 000　字数: 454 000

定价: 34. 00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈新蕾〉)

《大学数学全程解决方案系列》序

目前, 高等数学、线性代数、概率论与数理统计等大学数学类公共课的教材版本比较多, 其中不乏一些优秀教材, 它们在教育部统一的教学规范、教学设计、教学安排等框架内, 为全国高等院校师生的教学和学习提供了方方面面的服务. 但从另一方面来说, 不同区域的高校在师资力量、教学习惯、教学环境、学生来源、学生层次、学生求学目的等方面都存在着不小的差异, 由此造成对教材的需求也存在着一些差异. 在遵照执行教育部对大学数学类公共课教学的统一要求的前提下, 我想, 这些差异主要来自于对这些统一要求的具体实施和尝试.

为了更好地提高教学效果, 充分挖掘区域内的教学资源, 增加区域内教师的交流与互动, 优化创新和谐的教研氛围, 培育更加适应本地区高校的优秀教材, 科学出版社在广泛调研的基础上, 组织了黑龙江地区高校最优秀、最有经验的教师, 拟编写一套集主教材、教辅、课件为一体的立体化教材, 并努力争取进入国家级优秀教材的行列. 为此科学出版社、哈尔滨工业大学数学系联合于 2006 年 5 月 27 日在哈尔滨工业大学召开了《大学数学全程解决方案系列》规划教材会议. 在这次会议上, 大家推荐我作为这套丛书的编委会主任, 盛情难却, 我想, 若能和大家共同努力, 团结协作, 认真领会教育部的有关精神, 凭借科学出版社的优秀品牌, 做出一套大学数学类的优秀教材, 也的确是一件有意义的事情.

为此, 我们编委会成员就这套教材作了几次讨论和交流, 希望在以下方面有所突破:

在教学内容上, 有较大创新, 紧跟时代步伐, 从知识点讲述, 到例题、习题, 都要体现时代的特色.

在教学方法上, 充分体现各学校的优秀教学成果, 集中黑龙江地区优秀的教学资源, 力求代表最好的教学水平.

在教学手段上, 充分发挥先进的教学理念, 运用先进的教学工具, 开发立体化的教学产品.

在教材设计上, 节约课时, 事半功倍 (比如在教材上给学生预留较大的自主空间, 让有进一步学习愿望的学生能够自主学习; 开发的课件让老师节约课时, 精心设计的练习册, 让老师节约更多的检查作业的时间).

在教学效果上, 满足对高等数学有不同要求的教师、学生, 让教师好用, 让学生适用.

如今, 这套丛书终于要面世了, 今年秋季有《微积分 (经管类)》、《线性代数 (经

管类)》、《线性代数 (理工类多学时)》、《线性代数 (理工类少学时)》、《概率论与数理统计》、《数学建模》等教材陆续出版. 但我想, 尽管我们的初衷是美好的, 教材中必定还会存在这样那样的问题, 敬请各位读者、专家批评指正.

感谢哈尔滨工程大学、哈尔滨理工大学、黑龙江大学、哈尔滨师范大学、哈尔滨商业大学、黑龙江工程学院、黑龙江科技学院、哈尔滨医科大学、齐齐哈尔大学、佳木斯大学、绥化学院、黑龙江农垦职业学院、黑龙江建筑职业技术学院、黑龙江农业工程职业学院等兄弟院校领导的支持, 科学出版社高等教育出版中心, 哈尔滨工业大学理学院、数学系的领导与老师为这套丛书的出版也付出了努力, 在此一并致谢.

王　勇

2007 年 7 月于哈尔滨工业大学

前　言

随着科学技术的迅速发展, 数学已被广泛地应用到相关的科学领域及生产实践中, 微积分已成为现代数学的基石. 目前, 我国的高校都将高等数学作为一门重要的基础课程, 本教材是在吸收国内外同类教材的精华的基础上, 针对理工科相关专业的特点编写的, 它具有编排合理，语言精练，条理清晰等特点.

本教材注重对微积分的基本思想与基本方法的介绍, 力求简洁、明了; 同时在编写过程中, 考虑到相关学科知识结构的需要, 对一些概念、方法尽可能地结合几何与物理学等知识加以解释和应用举例. 在为其他学科奠定良好基础的同时, 使学生的数学素养与能力得到提高.

在教材的使用过程中, 主讲教师可以根据不同专业、不同学时的授课对象的需要而适当调整. 对数学要求较高的专业原则上可讲授本教材的全部内容, 其他专业可以适当删减.

本书第 8 章及习题参考答案与提示由张国栋编写, 第 9 章由李春明编写, 第 10 章由李桂范编写, 第 11 章由陈琳珏编写, 全书的统稿工作由李春明完成.

本书的出版得到了科学出版社、哈尔滨工业大学、黑龙江大学、佳木斯大学及黑龙江工程学院有关领导的大力支持, 黑龙江大学的杨兴云、刘艳滨、王艳涛等同志为本书作了部分校稿工作, 在此一并致谢.

由于编者水平所限, 同时编写时间也比较仓促, 因此教材中难免存在不足之处, 敬请广大读者给予批评与指正, 以便进一步完善.

作　者

2007 年 6 月

目 录

第 8 章　多元函数的微分学及其应用

在自然科学与工程技术中, 经常遇到自变量的个数是两个或两个以上的函数, 称其为多元函数. 本章将在一元函数微分学的基础上, 并以二元函数为例讨论多元函数的微分法及其应用, 二元以上的函数只类似地给出相应的结论.

8.1　多元函数的基本概念

在讨论一元函数微分学时, 所涉及到的概念与理论都建立在实数集 $\mathbb{R}$ 中的两点间的距离、邻域以及区间等概念的基础上. 为了讨论多元函数的需要, 我们首先将这些概念推广到实数集的积集 $\mathbb{R}^n$ 中, 并给出 n 维 Euclid①空间的概念.

8.1.1　n 维 Euclid 空间

在 7.1 节中我们知道, 空间中的点 P 与有序三元实数组 (x_1, x_2, x_3) 之间可以建立一一对应关系, 这样在数学上可以把有序三元实数组 (x_1, x_2, x_3) 与点 P 视为等同的. 空间中所有点构成的集合常用积集 $\mathbb{R}^3$ 表示, 即

$$\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1,\ x_2,\ x_3 \in \mathbb{R}\},$$

而 $\mathbb{R}^3$ 中的元素 (x_1, x_2, x_3) 也称为点, 或三维向量; 称坐标原点 $(0, 0, 0)$ 为零点, 或三维零向量. 为了表述方便, 常将 $\mathbb{R}^3$ 中的元素 (x_1, x_2, x_3) 简记为 $\boldsymbol{x}$, 即

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3).$$

此时 (x_1, x_2, x_3) 称为 $\boldsymbol{x}$ 的坐标形式.

集合 $\mathbb{R}^3$ 中的元素可以按空间解析几何中的两点间距离来定义两个元素之间的距离, 即对 $\mathbb{R}^3$ 中的任意两点 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$, 称实数

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$$

为点 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的距离, 记为 $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_3$ 或 $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$.

集合 $\mathbb{R}^3$ 中的元素可以按三维向量的加法和数乘运算来定义元素的线性运算, 即对 $\mathbb{R}^3$ 的任意两点 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$ 及任意的实数 λ, 规定加法和数乘运算为

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3),$$

① Euclid, 欧几里得, 约公元前 330~ 公元前 275.

$$\lambda \boldsymbol{x}=(\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3).$$

如果集合 $\mathbb{R}^3$ 按上述方式定义了两点间的距离及元素的线性运算, 则称 $\mathbb{R}^3$ 为三维 Euclid 空间, 简称为三维空间.

类似地可定义 n 维 Euclid 空间.

设 n 是正整数, 且 $n\geqslant 2$. 用 $\mathbb{R}^n$ 表示 n 元有序实数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的全体构成的集合, 即

$$\mathbb{R}^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in\mathbb{R},\ i=1,2,\cdots,n\}.$$

对任意的 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$, 规定两点之间的距离为

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}.$$

对任意的 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$ 及 $\lambda\in\mathbb{R}$, 规定线性运算为

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n),$$

$$\lambda\boldsymbol{x}=(\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots,\lambda x_n).$$

如果 $\mathbb{R}^n$ 按上述方式定义了两点间的距离以及元素的线性运算, 则称 $\mathbb{R}^n$ 为 n 维 Euclid 空间, 简称为 n 维空间.

特别地, $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ 都有明显的几何意义, 分别表示数轴、平面及空间, 而 $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ 的点集分别称为实数集, 平面点集, 空间点集. 通常将 $\mathbb{R}^1$ 记为 $\mathbb{R}$.

本教材中常使用几何中的表示方法, 将 $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ 分别表示为

$$\mathbb{R}^2=\{(x,y)\mid x,\ y\in\mathbb{R}\},\quad \mathbb{R}^3=\{(x,y,z)\mid x,\ y,\ z\in\mathbb{R}\}.$$

用 $P(x,y)$ 表示 $\mathbb{R}^2$ 中以 x 为第一个分量, 以 y 为第二个分量的点, 记为 $P(x,y)\in\mathbb{R}^2$ 或 $P\in\mathbb{R}^2$; 用 $P(x,y,z)$ 表示 $\mathbb{R}^3$ 中以 x 为第一个分量, 以 y 为第二个分量, 以 z 为第三个分量的点, 记为 $P(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ 或 $P\in\mathbb{R}^3$; 用 $|P_1P_2|$ 表示点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 与点 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 之间的距离, 即

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

今后除特别说明外, 均用 $\mathbb{R}^n$ 表示 n 维 Euclid 空间, 用 $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中点 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 之间的距离. 特别地, 点 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 到原点的距离也记为

$$\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}.$$

实数集 $\mathbb{R}$ 中的点 x 与点 y 之间的距离 $\|x-y\|$ 仍记为 $|x-y|$.

8.1.2 $\mathbb{R}^n$ 中的点集

利用距离的定义, 仿照实数集我们可以在 $\mathbb{R}^n$ 中定义邻域、内点、开集等概念.

定义 8.1.1 设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $\delta>0$. 称集 $\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|<\delta\}$ 为点 $\boldsymbol{x}$ 的 δ 邻域, 记为 $U(\boldsymbol{x},\delta)$, 即

$$U(\boldsymbol{x},\delta)=\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|<\delta\};$$

称集 $U(\boldsymbol{x},\delta)-\{\boldsymbol{x}\}$ 为点 $\boldsymbol{x}$ 的去心 δ 邻域, 记为 $\overset{\circ}{U}(\boldsymbol{x},\delta)$, 即

$$\overset{\circ}{U}(\boldsymbol{x},\delta)=\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n \mid 0<\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|<\delta\}.$$

定义 8.1.2 设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 的子集, 且 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$.

(1) 如果存在 $\delta>0$, 使得 $U(\boldsymbol{x},\delta)\subset E$, 则称点 $\boldsymbol{x}$ 为 E 的内点; E 的内点全体构成的集合称为 E 的内部, 记为 E°; 如果 E 中的每一点均为 E 的内点, 即 $E\subset E^\circ$, 则称 E 为 $\mathbb{R}^n$ 中的开集.

(2) 如果对 $\forall\,\delta>0$, 有 $\overset{\circ}{U}(\boldsymbol{x},\delta)\cap E\neq\varnothing$, 则称 $\boldsymbol{x}$ 为点集 E 的聚点; E 的聚点全体所成的集合称为 E 的导集, 记为 E'; 如果 $E'\subset E$, 则称 E 为闭集; 称集 $E\cup E'$ 为 E 的闭包, 记为 $\overline{E}$, 即 $\overline{E}=E\cup E'$.

(3) 如果存在 $\delta>0$, 使得 $U(\boldsymbol{x},\delta)\cap E=\varnothing$, 则称 $\boldsymbol{x}$ 为点集 E 的外点.

(4) 如果 $\boldsymbol{x}\in E$, 但 $\boldsymbol{x}$ 不是 E 的聚点, 则称点 $\boldsymbol{x}$ 为 E 的孤立点; 如果 $E\neq\varnothing$, 且 $E\cap E'=\varnothing$, 则称 E 为孤立点集.

(5) 如果对 $\forall\,\delta>0$, 有 $U(\boldsymbol{x},\delta)\cap E\neq\varnothing$, 且 $U(\boldsymbol{x},\delta)\cap E^c\neq\varnothing$, 则称 $\boldsymbol{x}$ 为 E 的边界点; E 的边界点全体构成的集合称为 E 的边界, 记为 ∂E.

(6) 如果 E 内的任何两点都可以用折线连接起来, 并且该折线上的点都属于 E, 则称 E 为连通集.

(7) 如果 E 为非空的开集, 并且是连通集, 则称 E 为开区域, 简称为区域; 如果 E 是开区域, 则称 $E\cup\partial E$ 为闭区域.

(8) 如果存在 $\delta>0$, 使得 $E\subset U(\mathbf{0},\delta)$, 则称 E 为有界集, 否则称 E 是无界集.

关于定义 8.1.2 作如下说明:

(1) $U(\boldsymbol{x},\delta)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开区域, 并且当 $n=1$ 时, $U(x,\delta)$ 是实数轴上以 x 为心, 以 δ 为半径的开区间; 当 $n=2$ 时, $U(\boldsymbol{x},\delta)$ 是平面 $\mathbb{R}^2$ 上以 $\boldsymbol{x}$ 为心, 以 δ 为半径的开圆盘; 当 $n\geqslant 3$ 时, 称 $U(\boldsymbol{x},\delta)$ 为空间 $\mathbb{R}^n$ 中的以 $\boldsymbol{x}$ 为心, 以 δ 为半径的开球.

(2) 对于 $\mathbb{R}^n$ 的子集 E 来说, E 的聚点或边界点可以属于 E 也可以不属于 E, 但 E 的内点一定是 E 的聚点, E 的孤立点一定是 E 的边界点. 例如, 实数集 $E=\left\{\dfrac{1}{k}\,\middle|\, k\in\mathbb{Z}^+\right\}$ 是 $\mathbb{R}$ 的子集, 且 0 是 E 的唯一的聚点, 但 $0\notin E$.

(3) 对于 $\mathbb{R}^n$ 的任意一个子集 E 来说, 显然有 $E^\circ\subset E\subset\overline{E}$. 但是 E' 与 E 之间没有确定的包含关系. 例如, $\mathbb{R}^n$ 中开球 $U(\boldsymbol{x},\delta)$ 的边界为

$$\partial U(\boldsymbol{x},\delta)=\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|=\delta\};$$

$U(\boldsymbol{x},\delta)$ 的导集为

$$(U(\boldsymbol{x},\delta))' = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| \leqslant \delta\};$$

$U(\boldsymbol{x},\delta)$ 的闭包为

$$\overline{U(\boldsymbol{x},\delta)} = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| \leqslant \delta\}.$$

通常称 $\overline{U(\boldsymbol{x},\delta)}$ 为闭球; $\mathbb{Z}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子集, 且 $(\mathbb{Z}^n)' = (\mathbb{Z}^n)^\circ = \varnothing$, 从而 $\mathbb{Z}^n$ 是孤立点集, 且是闭集.

(4) 存在 $\mathbb{R}^n$ 的子集 E, 使得 E 不是开集, 也不是闭集. 例如, $\mathbb{Q}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子集, 但由 $(\mathbb{Q}^n)' = \mathbb{R}^n$, $(\mathbb{Q}^n)^\circ = \varnothing$ 可知, $\mathbb{Q}^n$ 不是开集, 也不是闭集.

下面给出 $\mathbb{R}^n$ 中变元的极限以及点列的极限的概念.

如果 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, 且

$$x_1 \to a_1, \quad x_2 \to a_2, \quad \cdots, \quad x_n \to a_n,$$

则称变元 $\boldsymbol{x}$ 趋于 $\boldsymbol{a}$, 记为 $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}$ 或 $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\| \to 0$.

如果 $\boldsymbol{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)}) \in \mathbb{R}^n$ $(k \in \mathbb{Z}^+)$, 则称集 $\{\boldsymbol{x}^{(k)} \mid k \in \mathbb{Z}^+\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的点列, 记为 $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ 或记为 $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$.

设 $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的点列, $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. 如果

$$\lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{a}\| = 0,$$

则称点列 $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ 收敛于 $\boldsymbol{a}$, 记为 $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{x}^{(k)} = \boldsymbol{a}$, 或 $\|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{a}\| \to 0$ $(k \to \infty)$.

8.1.3　多元函数的概念

定义 8.1.3　设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 的非空子集, 称映射 $f\colon D \to \mathbb{R}$ 为定义在 D 上的 n 元函数, 记为

$$u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \ \ ((x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D),$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 均称为自变量, u 称为因变量; 称集 D 为 n 元函数 f 的定义域, 称集 $f(D)$ 为 n 元函数 f 的值域; 称集

$$\{(x_1, x_2, \cdots, x_n, f(x_1, x_2, \cdots, x_n)) \mid (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D\}$$

为 n 元函数 f 的图像或图形, 记为 $G_f(D)$.

关于定义 8.1.3 我们作以下的补充说明:

(1) 在定义 8.1.3 中, 如果记 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 则 n 元函数 f 可写为

$$u = f(\boldsymbol{x}) \ \ (\boldsymbol{x} \in D);$$

如果 D 中的点表示为 $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 则 n 元函数 f 可写为

$$u = f(P) \ \ (P \in D).$$

(2) 定义 8.1.3 中, 当 $n=1$ 时, n 元函数就是一元函数; 当 $n \geqslant 2$ 时, n 元函数统称为多元函数. 特别地, 当 $n=2$ 时, 常用 x, y 表示自变量, z 表示对应的函数值, 而把二元函数写为

$$z=f(x,y)\quad ((x,y)\in D);$$

当 $n=3$ 时, 常用 x, y, z 表示自变量, 而把三元函数写为

$$u=f(x,y,z)\quad ((x,y,z)\in D).$$

(3) 求多元函数的定义域的方法与一元函数是一致的. 如果给定了函数解析式, 定义域是使该解析式有意义的点的全体构成的集合. 如果是实际问题, 除使解析式有意义外, 还要结合实际问题的意义来确定. 例如, 函数 $V=xyz$ 的定义域为 $\mathbb{R}^3$; 而当 x, y, z 表示某一长方体的棱长时, V 表示该长方体的体积, 此时 $V=xyz$ 的定义域为

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x>0,\ y>0,\ z>0\}.$$

(4) 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中, 二元函数 $z=f(x,y)$ 的图像 (图 8.1.1) 是一个曲面, 该曲面在 xOy 面上的投影就是该函数的定义域 D. 例如, 二元函数

$$z=\sqrt{1-x^2-y^2}\quad ((x,y)\in D)$$

的图像 (图 8.1.2) 是上半球面, 其定义域就是 xOy 面区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$.

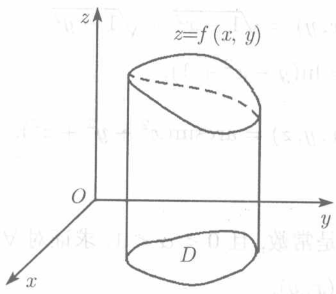

图 8.1.1

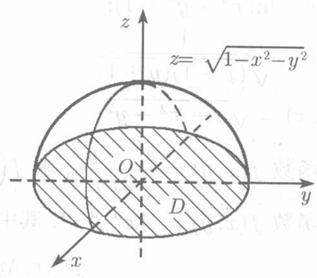

图 8.1.2

例 8.1.1 已知函数 $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$, 求 f 的定义域, 并计算 $f(-2,3)$.

解 要使表达式 $\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ 有意义, 只需 $x^2+y^2\neq 0$, 故函数 $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ 的定义域为 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\neq 0\}$, 并且

$$f(-2,3)=\frac{2\times(-2)\times 3}{(-2)^2+3^2}=-\frac{12}{13}.$$

(5) 设 $n,\ k\in\mathbb{Z}^+$, 则任何一个 n 元函数

$$u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\quad ((x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D)$$

均可以看成一个 $n+k$ 元函数

$$u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+k}) \quad ((x_1, x_2, \cdots, x_{n+k}) \in X),$$

其中

$$X = \{(x_1, x_2, \cdots, x_{n+k}) \mid (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D,\ x_{n+j} \in \mathbb{R},\ j = 1, 2, \cdots, k\}.$$

如例 8.1.1 中的函数可以看成三元函数

$$f(x,y,z) = \frac{2xy}{x^2+y^2} \quad ((x,y,z) \in \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \neq 0\}).$$

(6) 多元初等函数是指可用一个算式表示的多元函数, 该算式是由常数及具有不同自变量的一元基本初等函数经过有限次四则运算和复合运算而得到的. 例如

$$x^2+y^2+z^2, \quad \frac{xy}{x^2+y^2}, \quad (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, \quad \ln\frac{1}{x+y}, \quad \mathrm{e}^{x^2y\sqrt{z}}$$

等都是多元初等函数.

在今后讨论问题时, 一般情况下均以二元函数或三元函数为例.

习　题　8.1

8.1.1　求下列函数的定义域 D, 指出 D 是否为开集、闭集、区域 (开区域或闭区域)、有界集、无界集及 D 的导集和边界, 并画出 D 的图形:

(1) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2-1)$;　　(2) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}$;

(3) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{(x-1)(y+1)}}$;　　(4) $z = \ln(y-x^2+1)$;

(5) $f(x,y,z) = \sqrt{z-x^2-y^2}$;　　(6) $f(x,y,z) = \arcsin(x^2+y^2+z^2)$.

8.1.2　设函数 $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{2xy}$, 求 $f\left(\dfrac{x}{y}, 1\right)$.

8.1.3　设函数 $f(x,y) = Ax^\alpha y^{1-\alpha}$, 其中 A, α 是常数, 且 $0 < \alpha < 1$, 求证对 $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$, 有

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda f(x,y).$$

8.1.4　设函数 $f(x,y)$ 满足下列条件, 求 $f(x,y)$ 的表达式:

(1) $f\left(x+y, \dfrac{y}{x}\right) = x^2 - y^2$;　　(2) $f(x+y, xy) = \dfrac{x+y}{x^2+xy+y^2}$.

8.1.5　画出下列函数的图形:

(1) $z = x + y$;　　(2) $z = \sqrt{x^2+y^2}$;

(3) $z = x^2 + y^2$;　　(4) $z = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9}}$.

8.1.6*　设 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的点列, 其中

$$\boldsymbol{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)}) \quad (k \in \mathbb{Z}^+),$$

则 $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{x}^{(k)} = \boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是: 对每一个 $i\ (i = 1, 2, \cdots, n)$, 有 $\lim\limits_{k\to\infty} x_i^{(k)} = a_i$.

8.2 多元函数的极限与连续

8.2.1 多元函数的极限

首先仿照一元函数极限的定义给出二元函数极限的定义.

定义 8.2.1 设 $f(x,y)$ 是定义在 D 上的二元函数, $(x_0,y_0)\in D'$, A 为常数. 如果对 $\forall\,\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $(x,y)\in D$, 且

$$0<\|(x,y)-(x_0,y_0)\|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

时, 有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon,$$

则称 A 为 $f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的极限, 记为

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A \tag{8.2.1}$$

或

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A \tag{8.2.2}$$

或

$$f(x,y)\to A\ \ ((x,y)\to(x_0,y_0)). \tag{8.2.3}$$

此时, 也称 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 存在; 否则称 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 不存在.

关于多元函数极限的定义我们作如下说明:

(1) 在定义 8.2.1 中, 如果记 $P_0(x_0,y_0)$, $P(x,y)$, 并用记号 $P\to P_0$ 来表示 $(x,y)\to(x_0,y_0)$, 则 (8.2.1) 式和 (8.2.3) 式可记为

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A$$

或

$$f(P)\to A\ \ (P\to P_0).$$

(2) 仿照二元函数极限的定义可将 n 元函数极限的定义叙述如下:

设 $f(P)$ 是定义在 D 上的 n 元函数, $P_0\in D'$, A 为常数. 如果对 $\forall\,\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $P\in D$, $0<|PP_0|<\delta$ 时, 有

$$|f(P)-A|<\varepsilon,$$

则称 A 为 $f(P)$ 当 $P\to P_0$ 时的极限, 记为

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A\ \text{ 或 }\ f(P)\to A\ (P\to P_0).$$

为了区别于一元函数的极限, 通常把 n 元函数的极限称为 n 重极限.

(3) 多元函数的极限与一元函数的极限不同的是: $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)$ 存在是指当 P 在定义域内以任意方式趋于 P_0 时, $f(P)$ 都趋于 A. 由此可知, 如果当 P 在定义域内

以两种不同的方式趋于 P_0 时, $f(P)$ 趋于不同的值, 或当 P 在定义域内以一种方式趋于 P_0 时, $f(P)$ 的极限不存在, 则 $f(P)$ 当 $P \to P_0$ 时的极限不存在.

例如, 函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy\cos(xy)}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

当点 (x,y) 沿直线 $y=0$ 趋于 $(0,0)$ 时, 有

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{(x\times 0)\cos(x\times 0)}{x^2+0^2}=0,$$

当点 (x,y) 沿直线 $y=x$ 趋于 $(0,0)$ 时, 有

$$\lim_{(x,x)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos x^2}{x^2+x^2}=\frac{1}{2},$$

所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在.

(4) 由于 n 重极限的定义与一元函数极限的定义形式上完全相同, 故一元函数的性质 (如极限的唯一性、局部有界性、局部保号性等) 都可以推广到 n 重极限.

下面我们不加证明的给出极限的四则运算法则及复合函数的极限运算法则.

定理 8.2.1 (极限的四则运算法则)　设 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)$ 与 $\lim\limits_{P\to P_0} g(P)$ 存在, 则

(1) $\lim\limits_{P\to P_0}[f(P)\pm g(P)]$ 存在, 且

$$\lim_{P\to P_0}[f(P)\pm g(P)]=\lim_{P\to P_0} f(P)\pm\lim_{P\to P_0} g(P);$$

(2) $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)g(P)$ 存在, 且

$$\lim_{P\to P_0} f(P)g(P)=\lim_{P\to P_0} f(P)\lim_{P\to P_0} g(P);$$

(3) 当 $\lim\limits_{P\to P_0} g(P)\neq 0$ 时, $\lim\limits_{P\to P_0}\dfrac{f(P)}{g(P)}$ 存在, 且

$$\lim_{P\to P_0}\frac{f(P)}{g(P)}=\frac{\lim\limits_{P\to P_0} f(P)}{\lim\limits_{P\to P_0} g(P)}.$$

定理 8.2.2 (复合函数的极限运算法则)　设 $u=f(\varphi(P))$ 是由 n 元函数 $v=\varphi(P)$ 与一元函数 $u=f(v)$ 构成的复合函数, 且在邻域 $\mathring{U}(P_0)$ 内有定义. 如果 $\lim\limits_{P\to P_0}\varphi(P)=v_0$, $\lim\limits_{v\to v_0} f(v)=A$, 且当 $P\in\mathring{U}(P_0)$ 时, 有 $\varphi(P)\neq v_0$, 则 $\lim\limits_{P\to P_0} f(\varphi(P))$ 存在, 且

$$\lim_{P\to P_0} f(\varphi(P))=\lim_{v\to v_0} f(v)=A.$$

下面给出几个例子.

例 8.2.1　用定义证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}\right)=0.$